УДК 517.98

І. В. Чернега

# ПІВКІЛЬЦЕ У СПЕКТРІ АЛГЕБРИ СИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА ПРОСТОРІ $\ell_1$

*Розглянуто півкільце числових послідовностей у спектрі алгебри симетричних аналітичних функцій на просторі $\ell_1$. Досліджено проблему неперервності комплексних гомоморфізмів цього півкільця і питання про продовження гомоморфізмів на відповідне кільце.*

**Вступ.** Дослідження спектрів алгебр аналітичних функцій на банахових просторах розпочалось наприкінці двадцятого століття. Однією з перших у цьому напрямку була робота [7], де автори досліджували властивості алгебри аналітичних функцій на одиничній кулі спряженого простору, яка породжена $*$-слабко неперервними лінійними функціоналами. У роботах [5, 6] автори вивчали алгебру $\mathcal{H}_b(X)$ комплекснозначних цілих функцій на банаховому просторі $X$, які є обмежені на обмежених множинах, і її спектр $\mathcal{M}_b$, а також рівномірну алгебру $\mathcal{H}^\infty(B)$ обмежених аналітичних функцій на одиничній кулі $B$ банахового простору зі спектром $\mathcal{M}$. У роботі [11] описано спектр алгебри $\mathcal{H}_b(X)$ у вигляді прямої суми послідовності банахових просторів, поповненій в топології Гельфанда, а також алгебри аналітичних рівномірно неперервних функцій на одиничній кулі банахового простору.

У статті [4] описано спектр алгебри $A_{us}(B_{\ell_p})$ симетричних рівномірно неперервних аналітичних функцій на одиничній кулі $B_{\ell_p}$ простору $\ell_p$ як поліноміально опуклу оболонку деякої підмножини в одиничній кулі простору $\ell_\infty$ і досліджено алгебру $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$, яка є замиканням алгебри симетричних поліномів в $\mathcal{H}_b(\ell_p)$. Авторами показано, що алгебра $A_{us}(B_{\ell_p})$ алгебраїчно і топологічно ізоморфна рівномірній банаховій алгебрі, породженій координатними проекціями в $\ell_\infty$. Подальше вивчення спектра алгебри $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ продовжувалось у [8, 9]. У цій роботі досліджено алгебраїчні та топологічні властивості півкільця елементів спектра алгебри $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$.

Наведемо необхідні поняття та означення. Нехай $x, y \in \ell_1$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$ і $y = (y_1, y_2, \ldots)$. Будемо вважати елементи $x$ та $y$ еквівалентними (і будемо використовувати позначення $x \sim y$), якщо існує перестановка $\sigma$ на множині натуральних чисел така, що $\sigma(x) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, \ldots) = y$.

Розглянемо на просторі $\ell_1$ поліноми

$$F_k\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Доведено [10], що ці поліноми утворюють алгебраїчну базу в $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ – алгебрі всіх симетричних поліномів на $\ell_1$.

Зауважимо [4], що якщо $F_k(x) = F_k(y)$ для довільних $x, y \in \ell_1$ для будь-якого $k$, тоді $x \sim y$.

На алгебраїчній базі алгебри $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ сім'ю функціоналів $\psi_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, означено [4] таким чином:

$$\psi_\lambda(F_1) = \lambda \quad \text{і} \quad \psi_\lambda(F_k) = 0 \quad \text{для} \quad k > 1$$

і продовжено за лінійністю і мультиплікативністю на всю алгебру $\mathcal{P}_s(\ell_1)$.

Означимо множину $\mathbb{S}^+$ як

$$\mathbb{S}^+ := \mathbb{C} \times \ell_1 / \sim,$$

тобто $[x] \in \mathbb{S}^+$ можна подати у вигляді $x = (\lambda, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, де $\lambda \in \mathbb{C}$ і $(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_1 / \sim$. Враховуючи це, можемо доозначити поліноми $F_k$ на $\mathbb{S}^+$ таким чином:

$$F_k(\lambda, x_1, \ldots, x_n, \ldots) = \psi_\lambda(F_k) = \begin{cases} \lambda + \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i, & k = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^k, & k \neq 1. \end{cases}$$

Для елементів $x = (x_1, x_2, \ldots)$ і $y = (y_1, y_2, \ldots)$, $x, y \in \ell_1$, операцію *змішування* $x \bullet y \in \ell_1$ у [3, 8] означено так:

$$x \bullet y = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots).$$

Також означено операцію *мультиплікативного змішування* $x \lozenge y$ [2] як множину $\{(x_i y_j),\ i, j \in \mathbb{N}\}$, пронумеровану одним індексом у деякому фіксованому порядку. Легко бачити, що $F_k(x \bullet y) = F_k(x) + F_k(y)$ для довільних $x, y \in \ell_1$, $k \in \mathbb{N}$, та $F_k(x \lozenge y) = F_k(x) F_k(y)$.

Зауважимо, що згідно з [2, 9], $\mathbb{S}^+$ лежить у спектрі $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ алгебри $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ цілих симетричних аналітичних функцій з $\ell_p$ в $\mathbb{C}$, що є обмеженими на обмежених множинах. Тобто для кожного елемента $[x] \in \mathbb{S}^+$, $x = (\lambda, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, існує єдиний характер $\varphi$ на $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ такий, що $\varphi(F_k) = F_k(x)$. Операції $\bullet$, $\lozenge$ можна продовжити до операцій на спектрі $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ так, що $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ буде півкільцем [2], однак невідомо, чи відображення $\mathbb{S}^+ \to \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ є сюр'єктивним. Метою цієї роботи є дослідження півкільця $\mathbb{S}^+$, зокрема питання про вкладення $\mathbb{S}^+$ у комутативне кільце.

**Продовження операцій з півкільця на кільце.** Розглянемо елемент $x = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, \lambda, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_1(\mathbb{Z})$, де $\lambda \in \mathbb{C}$. Будемо використовувати позначення $x^+ := (\ldots, 0, \ldots, 0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $x^- := (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, 0, \ldots, 0, \ldots)$ та $x_0 := (\ldots, 0, \ldots, 0, \lambda, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Означимо

$$F_k(x^+) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k \quad \text{і} \quad F_k(x^-) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{-i}^k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

а також

$$F_k(x_0) = \psi_\lambda(F_k) = \begin{cases} \lambda, & k = 1, \\ 0, & k \neq 1. \end{cases}$$

***Означення 1.*** Для елемента $x \in \ell_1(\mathbb{Z})$ означимо

$$\tilde{F}_k(x) = F_k(x^+) - F_k(x^-) + \psi_\lambda(F_k).$$

Очевидно, що

$$\tilde{F}_k(x^-) = -F_k(x).$$

***Означення 2.*** Говоримо, що $x \sim y$, де $x, y \in \ell_1(\mathbb{Z})$, якщо $\tilde{F}_k(x) = \tilde{F}_k(y)$ для будь-якого $k$.

Продовжимо операцію $\bullet$ на $\ell_1(\mathbb{Z})$ так, що $x \sim x^- \bullet x_0 \bullet x^+$. При цьому $x \bullet y := z$, $z = z^- \bullet z_0 \bullet z^+$, де

$$z^- = x^- \bullet y^-, \qquad z_0 = x_0 \bullet y_0, \qquad z^+ = x^+ \bullet y^+.$$

Для $x, y \in \ell_1(\mathbb{Z})$ позначимо $x \Diamond y := w$, $w = w^- \bullet w_0 \bullet w^+$, де $w^-$, $w_0$ та $w^+$ означимо таким чином:

$$w^- = x^- \Diamond y^+ \bullet x^+ \Diamond y^-,$$

$$w^+ = x^+ \Diamond y^+ \bullet x^- \Diamond y^-,$$

$$w_0 = x_0 \Diamond y_0 \bullet x_0 \Diamond y^+ \bullet y_0 \Diamond x^+ \bullet x_0 \Diamond y^- \bullet y_0 \Diamond x^-.$$

**Твердження 1.** *Нехай* $x = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, \lambda, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_1(\mathbb{Z})$, $y = (\ldots, y_{-n}, \ldots, y_{-1}, \mu, y_1, \ldots, y_n, \ldots) \in \ell_1(\mathbb{Z})$. *Тоді:*

(***i***) $\tilde{F}_k(x \bullet y) = \tilde{F}_k(x) + \tilde{F}_k(y)$;

(***ii***) $\tilde{F}_k(x \Diamond y) = \tilde{F}_k(x)\tilde{F}_k(y)$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $(\psi_\lambda \bullet \psi_\mu)(F_k) = \psi_{\lambda+\mu}(F_k)$, а також враховуючи, що $F_k(x \bullet y) = F_k(x) + F_k(y)$ для довільних $x, y \in \ell_1$, $k \in \mathbb{N}$, отримуємо

$$\tilde{F}_k(x \bullet y) = \tilde{F}_k(z) = F_k(z^+) - F_k(z^-) + F_k(z_0) = F_k(x^+ \bullet y^+) - $$
$$- F_k(x^- \bullet y^-) + (\psi_\lambda \bullet \psi_\mu)(F_k) = F_k(x^+) + F_k(y^+) -$$
$$- F_k(x^-) - F_k(y^-) + \lambda + \psi = \tilde{F}_k(x) + \tilde{F}_k(y).$$

Для обчислення $\tilde{F}_k(x \Diamond y)$ врахуємо, що $F_k(x \Diamond y) = F_k(x)F_k(y)$ і $F_k(w_0) = \psi_{\lambda\mu} \bullet \psi_{\lambda F_1(y^+)} \bullet \psi_{\mu F_1(x^+)} \bullet \psi_{-\lambda F_1(y^-)} \bullet \psi_{-\mu F_1(x^-)}$ (див. [2]). Тоді

$$\tilde{F}_k(x \Diamond y) = \tilde{F}_k(w) = F_k(w^+) - F_k(w^-) + F_k(w_0) = F_k(x^+ \Diamond y^+ \bullet x^- \Diamond y^-) -$$
$$- F_k(x^- \Diamond y^+ \bullet x^+ \Diamond y^-) +$$
$$+ \psi_{\lambda\mu} \bullet \psi_{\lambda F_1(y^+)} \bullet \psi_{\mu F_1(x^+)} \bullet \psi_{-\lambda F_1(y^-)} \bullet \psi_{-\mu F_1(x^-)} =$$
$$= F_k(x^+)F_k(y^+) + F_k(x^-)F_k(y^-) - F_k(x^-)F_k(y^+) -$$
$$- F_k(x^+)F_k(y^-) + \lambda\mu + \lambda F_1(y^+) + \mu F_1(x^+) -$$
$$- \lambda F_1(y^-) - \mu F_1(x^-) = \big(F_k(x^+) - F_k(x^-) + F_k(x_0)\big) \times$$
$$\times \big(F_k(y^+) - F_k(y^-) + F_k(y_0)\big) = \tilde{F}_k(x)\tilde{F}_k(y).$$

Твердження доведено. ♦

Позначимо $\mathbb{S} := \ell_1(\mathbb{Z})/\sim$. Очевидно, що введені операції $\bullet$ та $\Diamond$ можемо означити на фактор-просторі незалежно від вибору представника.

***Означення 3.*** Для довільного елемента $[x] \in \mathbb{S}$ означимо його норму як

$$\|[x]\| = \inf\{\|x^-\| + \|x_0\| + \|x^+\|\},$$

де $\inf$ береться по всіх зображеннях $x$ у вигляді $x = x^- \bullet x_0 \bullet x^+$.

Безпосередня перевірка показує, що $\mathbb{S}$ є повним метричним простором відносно метрики $\rho(x, y) = \|[x - y]\|$.

Нагадаємо деякі необхідні нам означення.

***Означення 4*** **[2, 8].** Відображення $f \mapsto T_y^s(f)$, де $T_y^s(f)(x) = f(x \bullet y)$, будемо називати *симетричним зсувом.* Відображення $f \mapsto M_y(f)$, де $M_y(f)(x) = f(x \lozenge y)$, назвемо мультиплікативним зсувом.

За допомогою симетричного та мультиплікативного зсувів у роботах [2, 8] введено операції симетричної та мультиплікативної згорток на спектрі алгебри $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$.

***Означення 5*** **[2, 8].** Нехай $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ та $\theta \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)'$. Їх *симетричну згортку* $\theta \star f$ означимо як

$$(\theta \star f)(x) = \theta[T_x^s(f)].$$

Мультиплікативну згортку $\theta \square f$ означимо таким чином:

$$(\theta \square f)(x) = \theta[M_x(f)].$$

***Означення 6*** **[2, 8].** Для довільних $\varphi, \theta \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)'$ їх симетрична (відповідно, мультиплікативна) згортка визначається як

$$(\varphi \star \theta)(f) = \varphi(\theta \star f) = \varphi(y \mapsto \theta(T_y^s f))$$

(відповідно, $(\varphi \square \theta)(f) = \varphi(\theta \square f)$).

Справджується таке

**Твердження 2.** *Для довільних* $\theta, \varphi, \psi \in \mathbb{S}$ *виконується рівність*

$$\theta \square (\varphi \star \psi) = (\theta \square \varphi) \star (\theta \square \psi).$$

Д о в е д е н н я. Оскільки для довільних $\varphi, \theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ справджуються такі рівності: $(\varphi \star \theta)(F_k) = \varphi(F_k) + \theta(F_k)$ [9, теорема 1.6] та $(\varphi \square \theta)(F_k) = \varphi(F_k)\theta(F_k)$ [2, теорема 1.1], то, враховуючи твердження 1, отримуємо

$$\big((\theta \square \varphi) \star (\theta \square \psi)\big)(\tilde{F}_k) = (\theta \square \varphi)(\tilde{F}_k) + (\theta \square \psi)(\tilde{F}_k) = \theta(\tilde{F}_k)\varphi(\tilde{F}_k) +$$

$$+ \theta(\tilde{F}_k)\psi(\tilde{F}_k) = \theta(\tilde{F}_k)\big(\varphi(\tilde{F}_k) + \psi(\tilde{F}_k)\big) =$$

$$= \theta(\tilde{F}_k)(\varphi \star \psi)(\tilde{F}_k) = \theta \square (\varphi \star \psi)(\tilde{F}_k),$$

що й потрібно було довести. ♦

**Наслідок 1.** *Множина* $(\mathbb{S}, \square, \star)$ *є комутативним нормованим кільцем з одиницею.*

Нехай $A$ − довільне комутативне кільце, $\Phi : \mathbb{S}_+ \to A$ − гомоморфізм, а $\tilde{\Phi} : \mathbb{S} \to A$. Введемо операцію інволюції ${}^*: x \mapsto x^*$ на $\ell_1(\mathbb{Z})$ таким чином:

$$(x^*)^- = x^+, \qquad (x^*)^+ = x^-.$$

Операцію $^*$ продовжимо на $\mathbb{S}$ так: $x^* = [x^*]$. Очевидно, що введена операція не залежить від вибору представника. Дійсно, нехай $x, y \in \ell_1(\mathbb{Z})$, $x = x^- \bullet x_0 \bullet x^+$, $y = y^- \bullet y_0 \bullet y^+$. За означенням 2, $x \sim y$, якщо $\tilde{F}_k(x) = \tilde{F}_k(y)$ для будь-якого $k$. Оскільки операція $^*$ елементу $x = x^- \bullet x_0 \bullet x^+$ ставить у відповідність елемент $x^* = x^+ \bullet x_0 \bullet x^-$, а елементу $y = y^- \bullet y_0 \bullet y^+$ – елемент $y^* = y^+ \bullet y_0 \bullet y^-$, то, враховуючи твердження 1, отримуємо, що $\tilde{F}_k(x^*) = \tilde{F}_k(y^*)$.

Оскільки $\mathbb{S}_+$ природно вкладається в $\mathbb{S}$, $\mathbb{S}_+ \ni [(\lambda, x_1, \ldots, x_n, \ldots)] \mapsto$ $\mapsto [(\ldots, 0, \ldots, 0, \lambda, x_1, \ldots, x_n, \ldots)] \in \mathbb{S}$, то для $x = x_0 \bullet x^+$ визначимо $\tilde{\Phi}([x]) =$ $= \Phi(x_0) + \Phi(x^+)$, а для $x = x^-$ покладемо $\tilde{\Phi}([x]) = -\Phi(x^*)$.

Тоді

$$\tilde{\Phi}([x^+ \bullet x_0 \bullet x^-]) = \tilde{\Phi}([x^+]) + \tilde{\Phi}([x_0]) + \tilde{\Phi}([x^-]) =$$

$$= \Phi(x^+) + \Phi(x_0) - \Phi(x^*).$$

Аналогічно, як у твердженні 1, можна показати, що $\tilde{\Phi}$ – гомоморфізм. З неперервності $\Phi$ за допомогою очевидних міркувань отримуємо неперервність $\tilde{\Phi}$. Тоді виконується така

**Теорема.** *Нехай $A$ – комутативне кільце. Тоді кожен гомоморфізм $\Phi : \mathbb{S}_+ \to A$ можна продовжити до гомоморфізму $\tilde{\Phi} : \mathbb{S} \to A$, тобто діаграма*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}_+ \arrow[r, "\Phi"] & A \\ \cap & \\ \mathbb{S} \arrow[uur, "\tilde{\Phi}"'] & \end{tikzcd}$$

*є комутативною.*

**Наслідок 2.** *Кожен комплексний гомоморфізм на $\mathbb{S}^+$ є неперервним.*

Д о в е д е н н я випливає з відомого факту про те, що кожен комплексний гомоморфізм на банаховому кільці є неперервним (див., наприклад, [1]). ♦

Зауважимо, що $\mathbb{S}$ міститься у спектрі алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на $\ell_1(\mathbb{Z})$, породженої поліномами $\tilde{F}_k$, $k = 1, \ldots, n, \ldots$, і поповненої у топології рівномірної збіжності на обмежених множинах.


1. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. – Москва: Физматгиз, 1960. – 315 с.
2. *Загороднюк А., Чернега І.* Мультиплікативна згортка на спектрі алгебр симетричних аналітичних функцій // Мат. вісн. НТШ. – 2012. – **9**. – С. 129–139.
3. *Чернега І. В.* Оператор зсуву у просторі симетричних аналітичних функцій на $\ell_1$ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49,** № 2. – С. 52–57.
4. *Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A.* Algebras of symmetric holomorphic functions on $\ell_p$ // Bull. Lond. Math. Soc. – 2003. – **35**, No. 1. – P. 55–64.
5. *Aron R. M., Cole B. J., Gamelin T. W.* Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine angew. Math. – 1991. – **415.** – P. 51–93.
6. *Aron R. M., Cole B. J., Gamelin T. W.* Weak-star continuous analytic funtions // Can. J. Math. – 1995. – **47**, No. 4. – P. 673–683.
7. *Carne T. K., Cole B., Gamelin T. W.* A uniform algebra of analytic functions on a Banach space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – **314**, No. 2. – P. 639–659.

8. *Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A.* Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 2012. – **55**, No. 01. – P. 125–142.
9. *Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A.* The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // J. Math. Anal. Appl. – 2012. – **395.** – P. 569–577.
10. *González M., Gonzalo R., Jaramillo J. A.* Symmetric polynomials on rearrangement-invariant function spaces // J. London Math. Soc. – 1999. – **59,** No. 2. – P. 681–697.
11. *Zagorodnyuk A.* Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 2006. – **134,** No. 9. – P. 2559–2569.

**ПОЛУКОЛЬЦО В СПЕКТРЕ АЛГЕБРЫ СИММЕТРИЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ПРОСТРАНСТВЕ $\ell_1$**

*Рассмотрено полукольцо числовых последовательностей в спектре алгебры симметричных аналитических функций на пространстве $\ell_1$. Исследована проблема непрерывности комплексных гомоморфизмов рассматриваемого полукольца и вопрос о продолжении этих гомоморфизмов на соответствующее кольцо.*

**SEMIRING IN THE SPECTRUM OF THE ALGEBRA OF SYMMETRIC ANALYTIC FUNCTIONS ON SPACE $\ell_1$**

*A semiring of numerical sequences in the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions on the space $\ell_1$ is considered. The problem of continuity of complex homomorphisms of the semiring and the extension of the homomorphisms to the corresponding ring is investigated.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
28.01.13