

ПРУЖНА РІВНОВАГА ПРОСТОРУ З ВИКРИВЛЕНИМ ТОНКИМ ПРУЖНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗА ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

Досліджено задачу антиплоского деформування ізотропного середовища з викривленою тонкою пружною неоднорідністю. Методика розв'язування задачі ґрунтується на використанні методу функцій стрибків та умов взаємодії матриці з тонким криволінійним включенням і розв'язуванні результуючої системи сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами типу Коші методом колокацій. Розглянуто низку прикладів. Результати обчислень коефіцієнтів інтенсивності напружень для тріщини і абсолютно жорсткого включення уздовж дуги кола зіставлено з відповідними аналітичними результатами. Для тріщини уздовж симетричної дуги параболи детально досліджено напружений стан. Вивчено також вплив модуля пружності та форми викривленості неоднорідності (дуга кола, парабола, половина косинусоїди) на узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень. Виявлено, що для коефіцієнтів інтенсивності напружень біля вістря неоднорідності визначальне значення має нахил дотичної у вістрі до площини прикладання зусиль зсуву.

Вступ. Реальні механічні, а особливо міцнісні характеристики матеріалів та елементів конструкцій сильно залежать від наявності у них неоднорідностей, що завжди виникають під час промислового виготовлення, експлуатації та відновлювального ремонту таких об'єктів. Найбільш поширеними типами таких неоднорідностей є тріщини, тонкі пружні чи практично абсолютно жорсткі включення (АЖВ). Виготовлення тіл без дефектів іноді можливе лише у лабораторних умовах, хоча, у свою чергу, найбільш цікавим з огляду на економічну доцільність є використання тонких неоднорідностей як арматури різноманітних композитних матеріалів, у тому числі й інтелектуальних, окремих підкріплювальних елементів конструкцій тощо. Прогнозування міцності, надійності чи довговічності таких елементів конструкції, а також визначення їхнього напружено-деформованого стану для подальшого вдосконалення фізико-хімічних характеристик матеріалу або здійснення необхідної чи вимушеної модифікації складових конструкції є актуальними задачами механіки деформівного твердого тіла.

На сьогоднішній день найбільш вивченими серед задач механіки тіл з тонкими неоднорідностями структури є задачі плоскої теорії пружності. Задачі поздовжнього зсуву у багатьох випадках є простішими, однак, з огляду на вужче практичне використання, вони є менш вивченими, хоча основні методи і підходи, які застосовують при їхньому розв'язуванні, можна доволі часто перенести на відповідні плоскі і навіть тривимірні задачі. Більше цього, між окремими класами задач, зокрема між задачами стаціонарної теплопровідності тіл з включеннями та тріщинами і відповідними антиплоскими задачами теорії пружності, встановлено повну аналогію [3, 10].

Щодо геометрії тонких дефектів можна зазначити, що тіла з прямолінійними в поперечному перерізі тріщинами вивчено доволі добре (див. монографії [6, 10]). Тріщини викривленої конфігурації досліджено у значно меншій кількості публікацій. На аналітичному рівні для викривлених неоднорідностей вдалося розв'язати лише задачу для дефекту вздовж дуги кола. Дуже мало праць стосується дослідження антиплоских задач для тріщин довільної геометрії, а тим більше – жорстких чи навіть пружних тонких включень, коли розв'язки для тріщини чи АЖВ отримуються як окремі граничні випадки. Серед таких робіт можна виділити праці, виконані з використанням прямих числових методів, а також роботи, побудовані на застосуванні аналітично-числових підходів. Зокрема, з використанням методу граничних елементів Я. М. Пастернаком і Г. Т. Сулимом досліджено задачу плоскої [9] та антиплоскої [4] деформації тонкого пружного включення

уздовж дуги кола. Метод граничних елементів у плоских і антиплоских задачах пружної рівноваги тіл з криволінійними тріщинами також застосовано у [16]. Дослідження обмеженого тіла з криволінійною тріщиною за антиплоского деформування з використанням методу граничних інтегральних рівнянь здійснено у [17]. У роботі [11] з використанням підходів теорії функцій комплексної змінної досліджено задачу антиплоскої деформації простору з ламаною тріщиною, а також з тріщиною уздовж параболи. Методика числового дослідження задачі полягала у моделюванні неоднорідності за допомогою системи стичних прямолінійних тріщин. У подібний спосіб з використанням методу функцій стрибків у § 20 [10] запропоновано розв'язувати задачі для пружної тонкої викривленої неоднорідності. П'ятий розділ монографії [5] також стосується дослідження поздовжнього зсуву тіл із викривленими тріщинами з використанням методу сингулярних рівнянь. Застосування image-методу для криволінійних тріщин здійснено у [12]. Гіперсингулярні рівняння для криволінійної тріщини побудовано у [13], а їхнє числове розв'язування для колових областей з криволінійними дефектами здійснено у [14]. Випадок слабо викривленої тріщини розглянуто у [15, 18,].

У цій роботі, ґрунтуючись на [1, 8, 10], побудуємо один з універсальних підходів до дослідження впливу тонких неоднорідностей типу тріщини, абсолютно жорсткого чи пружного включення викривленої конфігурації на напружено-деформований стан однорідного ізотропного простору.

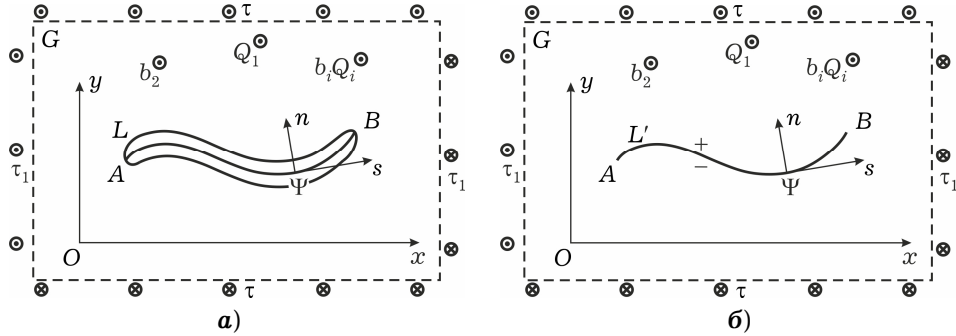


Рис. 1. а) – тонке викривлене включення у просторі; б) – схема задачі на основі методу функцій стрибків.

1. Формулювання задачі. Розглянемо нескінченний ізотропний простір з модулем зсуву G і тонким пружним стрічковим включенням уздовж осі Oz декартової системи координат. За антиплоскої деформації напружений стан у площинах, паралельних до площини xOy , є однаковим, а отже, достатньо обмежитися дослідженням перерізу S тіла площиною xOy . Вважатимемо, що серединна лінія перерізу цієї площиною включення з контуром L (рис. 1а) є гладкою неперервною кривою $L' \equiv L'_{AB}$ з лівим A та правим B кінцями (торцями), заданою параметрично рівняннями $x = X(\ell)$, $y = Y(\ell)$, $\ell \in [-1, 1]$ (рис. 1б). Між включенням і матрицею існує ідеальний механічний контакт. Товщина включення дорівнює $2h$, його модуль зсуву – G^{in} . Зовнішнє навантаження задане на нескінченності полем однорідних напружень $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$, $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau_1$, а також зосередженими силами інтенсивності Q_j і гвинтовими дислокаціями з ненульовими складовими вектора Бюргерса b_j , що можуть діяти всередині області S у точках z_j^* , $j = 1, \dots, N$. Необхідно визначити напружений стан і концентрацію напружень біля фронтів включення такої неоднорідної структури.

2. Математичне формулювання задачі. Для розв'язування задачі скористаємося методом функцій стрибків § 1 [10], згідно з яким включення ви-

лучаємо з розгляду, а його вплив на матрицю заміняємо невідомими функціями стрибків напружень $f_5(t)$ і похідних від переміщень $f_6(t)$ на осьовій лінії L' неоднорідності:

$$\sigma_{nz}^- - \sigma_{nz}^+ = f_5(t), \quad \frac{\partial}{\partial s}(w^- - w^+) = f_6(t), \quad t \in L'. \quad (1)$$

Тут σ_{nz}^\pm та w^\pm – напруження і переміщення у матриці на лівому L'^+ і правому L'^- (якщо рухатися від A до B) берегах лінії L' . Згідно з [8, 10] напружений стан простору з викривленим включенням за антиплоскої деформації у декартовій системі координат можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(z) + i\sigma_{xz}(z) &= \sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z) + \hat{\sigma}_{yz}(z) + i\hat{\sigma}_{xz}(z), \\ \hat{\sigma}_{yz}(z) + i\hat{\sigma}_{xz}(z) &= \frac{i}{2\pi} \int_{L'} \frac{f_5(t) + iGf_6(t)}{t-z} dt, \quad z = x + iy, \quad t \in L'. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут dt – диференціал дуги кривої; $z \equiv x + iy$ – точка комплексної площини, у якій шукають напруження (використання однакового стандартного позначення для комплексної змінної та осі координат не повинно викликати непорозуміння); $\sigma_{yz}^0, \sigma_{xz}^0$ – відоме [8, 10] напруження у просторі без неоднорідності, проте із таким самим зовнішнім навантаженням:

$$\sigma_{yz}^0(z) + i\sigma_{xz}^0(z) = \tau + i\tau_1 - \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{Q_j + iGb_j}{z - z_j^*}, \quad (3)$$

$\hat{\sigma}_{yz}(z), \hat{\sigma}_{xz}(z)$ – збурений включенням розв'язок. Цю складову формули (2), що відповідає за наявність викривленого дефекту, можна отримати з фізичних міркувань, а саме: відповідності функціям стрибків розподілених уздовж кривої L' зосереджених сил і гвинтових дислокацій невідомої густини.

Для визначення невідомих наперед функцій стрибків f_5, f_6 , а отже, й віднайдення напружено-деформованого стану тіла з дефектом, слід додатково скористатися двома умовами взаємодії матриці з неоднорідністю, які зв'язують між собою певними функціональними залежностями компоненти векторів напружень і переміщень матриці на прилеглих до включення поверхнях. Для випадку окремого дослідження одного з граничних випадків тонкого пружного включення, а саме: тріщини з вільними від зусиль берегами, умови взаємодії окреслюють очевидний зв'язок між складовими вектора напружень на верхньому, «+», і нижньому, «-», берегах тріщини: $\sigma_{nz}^+ - \sigma_{nz}^- = 0, \sigma_{nz}^+ + \sigma_{nz}^- = 0$. Якщо ж на протилежних берегах тріщини задано симетричні напруження τ^{cr} , то умови взаємодії запишуться у вигляді: $\sigma_{nz}^+ - \sigma_{nz}^- = 0, \sigma_{nz}^+ + \sigma_{nz}^- = 2\tau^{cr}$ (останні умови легко трансформуються і для несиметричного навантаження берегів тріщини). Подібним чином для абсолютно жорсткого включення за ідеального контакту з матрицею умови взаємодії, які пов'язують похідні від переміщення (або переміщення) на верхньому і нижньому берегах неоднорідності, набувають вигляду

$$\frac{\partial(w^+ - w^-)}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial(w^+ + w^-)}{\partial s} = 0.$$

У роботі [8] виведено умови взаємодії для тонкого прямолінійного пружного включення з використанням апріорних торцевих сталей і припущення про ідеальний механічний контакт між складовими. У граничних випадках ці умови дають умови взаємодії для абсолютно жорсткого вклю-

чення, тріщини та однорідного матеріалу. Загальніші умови взаємодії, що враховують неідеальний контакт між матрицею і неоднорідністю, на основі [8; 10, § 15] побудовано в [1]. Зазначимо, що викривленість серединної лінії включення практично не впливає на метод побудови та остаточний вигляд умов взаємодії [1, 8, 10]. Нехай $\psi \in [-1, 1]$, а $\Psi(X(\psi), Y(\psi))$ – поточна точка кривої L' (див. рис. 1б). Тоді умови взаємодії викривленого пружного включення з матрицею у випадку ідеального механічного контакту складових набудуть вигляду

$$\begin{aligned} G^{\text{in}} \left(\frac{\partial w^+(\Psi)}{\partial s} + \frac{\partial w^-(\Psi)}{\partial s} \right) + \frac{1}{h} \int_{L'_{A\Psi}} (\sigma_{nz}^+ - \sigma_{nz}^-) dt &= 2\sigma_{sz}^{\text{av}}(A), \\ \sigma_{nz}^+(\Psi) + \sigma_{nz}^-(\Psi) &= \frac{1}{h} \int_{L'_{A\Psi}} G^{\text{in}} \left(\frac{\partial w^+}{\partial s} - \frac{\partial w^-}{\partial s} \right) dt + \frac{w^* G^{\text{in}}}{h}, \\ \sigma_{sz}^{\text{av}}(A) &= \sigma_{sz}^0(A) \frac{G^{\text{in}}}{\max(G^{\text{in}}, G)}, \\ w^* &= 2h\sigma_{nz}^0(A) \frac{\min(G^{\text{in}}, G)}{GG^{\text{in}}}, \quad \Psi \in L'. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $L'_{A\Psi}$ – частина дуги $L' \equiv L'_{AB}$ від точки A до Ψ ; σ_{sz}^{av} , w^* – торцьові сталі.

3. Побудова системи сингулярних інтегральних рівнянь. Для використання формул (2) в умовах взаємодії (4) знайдемо граничні значення напружень (2) на берегах включення у системі координат $s\Psi n$. Перехід до локальної системи координат здійснюється за формулами

$$\begin{aligned} z &= (s + in)e^{i\alpha\Psi} + X(\psi) + iY(\psi), \quad \alpha_\Psi = i \arctg(Y'(\psi)/X'(\psi)), \\ \sigma_{nz} + i\sigma_{sz} &= (\sigma_{yz} + i\sigma_{xz})e^{i\alpha\Psi}. \end{aligned}$$

Згідно з формулою Сохоцького – Племелі [10] граничні значення напружень (2) на берегах викривленого тонкого пружного включення набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \sigma_{nz}^\pm(\Psi) + i\sigma_{sz}^\pm(\Psi) &= \sigma_{nz}^0(\Psi) + i\sigma_{sz}^0(\Psi) \mp \frac{1}{2}[f_5(\Psi) + iGf_6(\Psi)] + \\ &+ \hat{\sigma}_{nz}(\Psi) + i\hat{\sigma}_{sz}(\Psi), \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\hat{\sigma}_{nz}(\Psi) + i\hat{\sigma}_{sz}(\Psi) = \frac{i}{2\pi} \int_{L'} \frac{f_5(t) + iGf_6(t)}{t - \Psi} e^{i\alpha\Psi} dt. \quad (6)$$

Підставляючи (5) в умови (4), з використанням залежності $\frac{\partial w^\pm}{\partial s} = \frac{\sigma_{sz}^\pm}{G}$ і врахуванням (1) отримаємо систему двох сингулярних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} 2\hat{\sigma}_{sz}(\Psi) - \frac{G}{G^{\text{in}}h} \int_{L'_{A\Psi}} f_5(t) dt + 2\sigma_{sz}^0(\Psi) &= 2\frac{G}{G^{\text{in}}} \sigma_{sz}^{\text{av}}(A), \\ 2\hat{\sigma}_{nz}(\Psi) + \frac{G^{\text{in}}}{Gh} \int_{L'_{A\Psi}} Gf_6(t) dt + 2\sigma_{nz}^0(\Psi) &= \frac{w^* G^{\text{in}}}{h}. \end{aligned} \quad (7)$$

Додаткові умови глобальної рівноваги неоднорідності та однозначності переміщень при обході навколо неї подаються у вигляді

$$\int_{L'} f_5(t) dt = 0, \quad \int_{L'} f_6(t) dt = 0. \quad (8)$$

Якщо матриця містить декілька включень уздовж лінії L' , що на цей раз складається з окремих розімкнутих дуг, то всі записані вище співвідношення збережуть свій вигляд за винятком умов (8), які треба записати для кожної дуги окремо.

Отже, для знаходження напружено-деформованого стану простору з викривленою пружною неоднорідністю необхідно розв'язати систему сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР) (7), (8) і використати для врахування контакту торців із матрицею апріорні торцеві сталі з (4).

4. Розв'язування результуючої системи сингулярних інтегральних рівнянь. Розв'язування ССІР (7), (8) здійснимо методом колокацій. Перейдемо у (6)–(8) від інтегралів по кривій до інтегралів по відрізьку за формулами:

$$\int_{L'} H(t) dt = \int_{-1}^1 H(\ell) \sqrt{X'^2(\ell) + Y'^2(\ell)} d\ell,$$

$$\int_{L'_{A\Psi}} F(t) dt = \int_{-1}^{\Psi} F(\ell) \sqrt{X'^2(\ell) + Y'^2(\ell)} d\ell, \quad \Psi(X(\Psi), Y(\Psi)), \quad \Psi \in [-1, 1], \quad (9)$$

де $H(\ell)$, $F(\ell)$ – відповідні підінтегральні функції. Тоді з (6) отримаємо

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{nz}(\Psi) + i\hat{\sigma}_{sz}(\Psi) &\equiv \hat{\sigma}_{nz}(\Psi(\Psi)) + i\hat{\sigma}_{sz}(\Psi(\Psi)) = \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{[f_5(\ell) + iGf_6(\ell)] \sqrt{X'^2(\ell) + Y'^2(\ell)} e^{i \arctg(Y'(\ell)/X'(\ell))}}{X(\ell) + iY(\ell) - [X(\Psi) + iY(\Psi)]} d\ell = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_5(\ell)(x_1c_2 - y_1c_1) + Gf_6(\ell)(y_1c_2 + x_1c_1)}{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{X'^2(\ell) + Y'^2(\ell)} d\ell + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_5(\ell)(x_1c_1 + y_1c_2) + Gf_6(\ell)(y_1c_1 - x_1c_2)}{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{X'^2(\ell) + Y'^2(\ell)} d\ell, \end{aligned}$$

$$x_1 = X(\ell) - X(\Psi), \quad y_1 = Y(\ell) - Y(\Psi),$$

$$c_1 = \cos[\arctg(Y'(\Psi)/X'(\Psi))], \quad c_2 = \sin[\arctg(Y'(\Psi)/X'(\Psi))], \quad \Psi \in [-1, 1],$$

а ССІР (7) з додатковими умовами (8) набуде вигляду

$$2\hat{\sigma}_{sz}(\Psi) - \frac{G}{G^{\text{in}}h} \int_{-1}^{\Psi} f_5(\ell) \sqrt{X'^2(\ell) + Y'^2(\ell)} d\ell + 2\sigma_{sz}^0(\Psi) = 2\frac{G}{G^{\text{in}}} \sigma_{sz}^{\text{av}}(A),$$

$$2\hat{\sigma}_{nz}(\Psi) + \frac{G^{\text{in}}}{Gh} \int_{-1}^{\Psi} Gf_6(\ell) \sqrt{X'^2(\ell) + Y'^2(\ell)} d\ell + 2\sigma_{nz}^0(\Psi) = \frac{w^* G^{\text{in}}}{h}, \quad (10)$$

$$\int_{-1}^1 f_5(\ell) \sqrt{X'^2(\ell) + Y'^2(\ell)} d\ell = 0, \quad \int_{-1}^1 f_6(\ell) \sqrt{X'^2(\ell) + Y'^2(\ell)} d\ell = 0. \quad (11)$$

Розв'язок ССІР (10) з додатковими умовами (11) шукатимемо у вигляді скінченної суми ряду за ортогональними многочленами з виділеною кореневою особливістю:

$$f_r(\ell) = \sum_{n=0}^{N_1} A_{rn} T_n(\ell) / \sqrt{1 - \ell^2}, \quad \ell \in [-1, 1], \quad r = 5, 6, \quad (12)$$

де A_{rn} – шукані коефіцієнти; T_n – поліноми Чебишева першого роду; N_1 – кількість членів скінченної суми ряду. Відповідно до схеми методу колока-

цій вимагатимемо виконання рівнянь (10) не на неперервному ($\psi \in [-1, 1]$), а на деякому скінченному дискретному наборі точок колокації $\psi_k \in [-1, 1]$, $k = 1, \dots, N_1$. У ролі точок колокації, як і для випадку прямолінійних неоднорідностей [2], вибиратимемо нулі полінома Чебишева другого роду $U_{N_1}(\psi)$:

$$\psi_k = \cos\left[\frac{\pi k}{N_1 + 1}\right], \quad k = 1, \dots, N_1.$$

Підставляючи (12) у (10), (11) та задовольняючи отримані рівняння у N_1 точках колокації ψ_k , $k = 1, \dots, N_1$, отримуємо повну систему лінійних алгебричних рівнянь стосовно невідомих A_{rn} :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N_1} A_{5n} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\ell)(x_1 c_1 + y_1 c_2) \sqrt{X'^2(\ell) + Y'^2(\ell)}}{(x_1^2 + y_1^2) \sqrt{1 - \ell^2}} d\ell - \right. \\ & \quad \left. - \frac{G}{G^{\text{in}} h} \int_{-1}^{\psi_k} \frac{T_n(\ell)}{\sqrt{1 - \ell^2}} \sqrt{X'^2(\ell) + Y'^2(\ell)} d\ell \right] + \\ & \quad + \sum_{n=0}^{N_1} A_{6n} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 G \frac{T_n(\ell)(y_1 c_1 - x_1 c_2) \sqrt{X'^2(\ell) + Y'^2(\ell)}}{(x_1^2 + y_1^2) \sqrt{1 - \ell^2}} d\ell \right] + \\ & \quad + 2\sigma_{sz}^0 = 2 \frac{G}{G^{\text{in}}} \sigma_{sz}^{\text{av}}(A), \\ & \sum_{n=0}^{N_1} A_{5n} \left[-\frac{1}{\pi} \frac{1}{G} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\ell)(x_1 c_2 - y_1 c_1) \sqrt{X'^2(\ell) + Y'^2(\ell)}}{(x_1^2 + y_1^2) \sqrt{1 - \ell^2}} d\ell \right] + \\ & \quad + \sum_{n=0}^{N_1} A_{6n} \left[-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\ell)(y_1 c_2 + x_1 c_1) \sqrt{X'^2(\ell) + Y'^2(\ell)}}{(x_1^2 + y_1^2) \sqrt{1 - \ell^2}} d\ell + \right. \\ & \quad \left. + \frac{G^{\text{in}}}{G h} \int_{-1}^{\psi_k} \frac{T_n(\ell)}{\sqrt{1 - \ell^2}} \sqrt{X'^2(\ell) + Y'^2(\ell)} d\ell \right] + \frac{2}{G} \sigma_{nz}^0 = \frac{w^* G^{\text{in}}}{G h}, \\ & \quad k = 1, \dots, N_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N_1} A_{5n} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\ell)}{\sqrt{1 - \ell^2}} \sqrt{X'^2(\ell) + Y'^2(\ell)} d\ell = 0, \\ & \sum_{n=0}^{N_1} A_{6n} \int_{-1}^1 \frac{T_n(\ell)}{\sqrt{1 - \ell^2}} \sqrt{X'^2(\ell) + Y'^2(\ell)} d\ell = 0. \end{aligned}$$

Розв'язок цієї системи описує, згідно з (12), (2) і (3), шуканий напружено-деформований стан для простору з неоднорідністю. Для прямолінійного тонкого включення [2; 10, § 4] обчислення наявних у системі лінійних алгебричних рівнянь сингулярних інтегралів здійснюється з використанням точних аналітичних формул. У випадку дослідження викривленої неоднорідності для обчислення сингулярних інтегралів можна побудувати спеціальні квадратурні формули. Проте, оскільки сингулярні інтеграли типу Коші слід обчислювати в сенсі головного значення, то можна застосувати і прямі числові методи (скажімо, метод Сімпсона), ізолюючи особливу точку.

Однією з основних характеристик тріщиностійкості матеріалу є коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) у вістрі дефекту. Узагальненням цих коефіцієнтів для тонких включень є узагальнені КІН [8, 10], які обчислюються за формулами

$$K_{32}^{B,A} - iK_{31}^{B,A} = \mp \sqrt{\frac{\pi}{2}} (p_5^{B,A} + iGp_6^{B,A}),$$

$$p_r^{B,A} = \lim_{t \rightarrow B,A} [\sqrt{s^{B,A}}(t) f_r(t)], \quad r = 5, 6,$$

де $s^{B,A}$ – дугова відстань від точки t на дузі L' до її правого чи лівого кінця відповідно. Тут і далі у формулах для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень правому вістрю (B) неоднорідності відповідає верхній знак, а лівому (A) – нижній. Зважаючи на викривленість неоднорідності, граничне значення дуги має вигляд

$$\lim_{t \rightarrow B,A} s^{B,A}(t) = \mp \lim_{\ell \rightarrow \pm 1} (\ell \mp 1) \sqrt{X'^2(\ell) + Y'^2(\ell)},$$

а отже, використовуючи (12) та припускаючи, що границя існує, запишемо розрахункову формулу для узагальнених КІН

$$\begin{aligned} K_{32}^{B,A} - iK_{31}^{B,A} &= \mp \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{N_1} T_n(\pm 1) [A_{5n} + iGA_{6n}] \sqrt[4]{X'^2(\pm 1) + Y'^2(\pm 1)} = \\ &= \mp \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt[4]{X'^2(\pm 1) + Y'^2(\pm 1)} \sum_{n=0}^{N_1} A_{5n} \mp \\ &\mp i \frac{G\sqrt{\pi}}{2} \sqrt[4]{X'^2(\pm 1) + Y'^2(\pm 1)} \sum_{n=0}^{N_1} (-1)^n A_{6n}. \end{aligned} \quad (13)$$

5. Числові результати. Апробуємо достовірність розробленого підходу на чотирьох прикладах. Максимальна кількість точок колокації, використаних для розглянутих нижче прикладів не перевищувала $N_1 = 20$; сингулярні інтеграли обчислювали методом Сімпсона з похибкою $\varepsilon = 10^{-3}$, ізолюючи (виокремлюючи) особливість в (11) при $\ell = \psi$ колом радіуса $\delta = 10^{-5}$. Це забезпечило похибку обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень близько 1 %.

Приклад 1. Тріщина уздовж ду- ги кола. Розглянемо тріщину уздовж дуги кола радіуса R з розхилом центрального кута 2α (рис. 2). У цьому випадку $X(\ell) = R \sin(\alpha\ell)$; $Y(\ell) = R \cos(\alpha\ell)$, $\ell \in [-1, 1]$. Навантаження задане на нескінченності сталими однорідними напруженнями $\sigma_{yz}^\infty = \tau$, $\sigma_{xz}^\infty = 0$. Зазначимо, що для тріщин довільної геометрії $K_{32}^{B,A} = 0$. Тріщину змодельюємо дуже податним включенням з відносним модулем пружності $G^{\text{in}}/G = 10^{-7}$; відносна товщина дефекту складає $h/R = 0.01$.

Згідно з [7] нормоване значення КІН для тріщини уздовж дуги кола радіуса R , що лежить на центральному куті з розхилом 2α , за такого навантаження визначається формулою

$$\begin{aligned} K_{31}^{0B,A} &= \frac{K_{31}^{B,A}}{\tau\sqrt{\pi R\alpha}} = \frac{\tau\sqrt{\pi R \sin(\alpha)} \sin(\pi/2 \pm \alpha/2)}{\tau\sqrt{\pi R\alpha}} = \\ &= \sqrt{\sin(\alpha)/\alpha} \sin(\pi/2 \pm \alpha/2). \end{aligned} \quad (14)$$

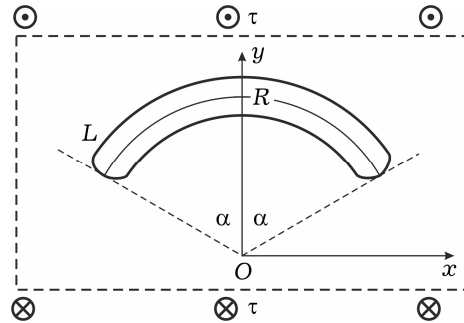


Рис. 2. Неоднорідність уздовж дуги кола.

Таблиця 1. Нормоване значення КІН K_{31}^{0B} для тріщини уздовж дуги кола за однорідного навантаження $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$.

2α	$4\pi/3$	$7\pi/6$	π	$5\pi/6$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$
Формула (14)	0.3215	0.4420	0.5642	0.6815	0.7876	0.8766	0.9439
$N_1 = 5$ --- $\Delta \%$	$\frac{0.3279}{1.9907}$	$\frac{0.4468}{1.0860}$	$\frac{0.5673}{0.5495}$	$\frac{0.6854}{0.5723}$	$\frac{0.7914}{0.4825}$	$\frac{0.8810}{0.5019}$	$\frac{0.9488}{0.5191}$
$N_1 = 10$ --- $\Delta \%$	$\frac{0.3235}{0.6220}$	$\frac{0.4446}{0.5882}$	$\frac{0.5676}{0.6026}$	$\frac{0.6856}{0.6016}$	$\frac{0.7923}{0.5967}$	$\frac{0.8819}{0.6046}$	$\frac{0.9496}{0.6038}$

У табл. 1 розраховані КІН для різних кутів розхилу центрального кута при $N_1 = 5, 10$ членів скінченної суми ряду (12) зіставлено із відповідними значеннями точної аналітичної формули (14). Спостерігаємо, що вже $N_1 = 10$ членів розкладу функцій стрибків у ряд за поліномами Чебишева забезпечили відносну похибку Δ меншу 1% для всіх розглянутих кутів. Це засвідчує достовірність запропонованого підходу. Зазначимо, що збільшення кількості точок колокації N_1 приведе до збільшення точності обчислення КІН лише за належного збільшення точності обчислень сингулярних інтегралів. Свою похибку вносить теж моделювання тріщини податним включенням.

Приклад 2. АЖВ уздовж дуги кола. Розглянемо сформульовану у прикладі 1 задачу, коли тип розглядуваної неоднорідності – абсолютно жорстке включення. В обчисленнях вважатимемо, що відносний модуль зсуву неоднорідності $G^{\text{in}}/G = 10^7$; відносна товщина – $h/R = 0.01$.

Можна стверджувати [10], що абсолютно жорсткому включенню можна поставити у відповідність невідомий розподіл зосереджених сил уздовж осової лінії неоднорідності. Тріщина, у свою чергу, моделюється іншим типом зосереджених чинників, а саме – дислокаціями, проте математично між цими типами дефектів існує повна аналогія. Тому у літературі АЖВ іноді називають антитріщиною: для прямолінійної тріщини у просторі, що розміщена уздовж осі Ox за навантаження $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$ на нескінченності, КІН K_{31}^0 з точністю до знаку дорівнюють КІН K_{32}^0 для так само розміщеного прямолінійного АЖВ за навантаження $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau_1 \equiv \tau$. Виявляється (це можна стверджувати також і на рівні побудованих ССІР), що для тріщини і АЖВ уздовж дуги кола така залежність також справджується. Тому у табл. 2 здійснюватимемо порівняння результатів обчислення узагальнених КІН K_{32}^{0B} для АЖВ уздовж дуги кола за навантаження $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$ із КІН K_{31}^{0B} для тріщини уздовж дуги кола за навантаження $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau_1 \equiv \tau$, для якого відома точна аналітична формула [7]:

$$K_{31}^{0B,A} = \frac{K_{31}^{B,A}}{\tau_1 \sqrt{\pi R \alpha}} = \frac{\tau_1 \sqrt{\pi R \sin(\alpha)} \sin(\pm \alpha/2)}{\tau_1 \sqrt{\pi R \alpha}} = \sqrt{\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}} \sin\left(\pm \frac{\alpha}{2}\right). \quad (15)$$

У табл. 2 подано значення нормованих КІН для різних кутів розхилу центрального кута при $N_1 = 5, 10$ членів скінченної суми ряду (12) у порівнянні із (15). Як і для прикладу 1, спостерігаємо, що менша від 1% відносна похибка Δ досягається вже для $N_1 = 10$. Зазначимо, що подані у табл. 1 для тріщини уздовж дуги кола за навантаження $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$ результати обчис-

лення КІН K_{31}^{0B} з похибкою, меншою ніж 1%, збігаються із результатами обчислення КІН для геометрично такого самого і так само розміщеного АЖВ за навантаження $\sigma_{xz}^\infty = \tau_1 \equiv \tau$.

Таблиця 2. Нормоване значення КІН K_{32}^{0B} для АЖВ уздовж дуги кола за однорідного навантаження $\sigma_{yz}^\infty = \tau$.

2α	$4\pi/3$	$7\pi/6$	π	$5\pi/6$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$
Формула (15)	0.5569	0.5760	0.5642	0.5229	0.4547	0.3631	0.2529
$N_1 = 5$	0.5500	0.5729	0.5634	0.5234	0.4557	0.3641	0.2538
$\Delta\%$	1.2390	0.5382	0.1418	0.0956	0.2199	0.2754	0.2538
$N_1 = 10$	0.5605	0.5795	0.5675	0.5260	0.4574	0.3652	0.2546
$\Delta\%$	0.6464	0.6076	0.5849	0.5928	0.5938	0.5784	0.6722

Приклад 3. Тріщина уздовж дуги параболи. Проаналізуємо напружений стан у тілі з тріщиною уздовж дуги параболи, заданої параметрично рівняннями $X(\ell) = \ell$, $Y(\ell) = \ell^2$, $\ell \in [-1, 1]$, у просторі із модулем зсуву G (рис. 3). Навантаження задано на нескінченності однорідними напруженнями $\sigma_{yz}^\infty = \tau$. Нехай $a = X(1)$ – півдовжина відрізка, що стягує вершини неоднорідності.

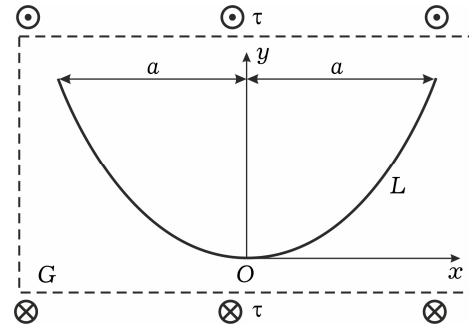


Рис. 3. Тріщина уздовж параболи.

Тріщину змодельюємо дуже податним включенням з відносним модулем пружності $G^{\text{in}}/G = 10^{-7}$ і відносною товщиною дефекту $h = 0.01a$. Обчислення нормованого КІН $K_{31}^{0B} = K_{31}^0/\tau\sqrt{\pi a}$ запропонованим підходом для $N_1 = 20$ дає $K_{31}^{0B} = 0.827$.

Порівнюючи це значення із величиною $K_{31}^{0B} \approx 0.83$, взятою з графічної залежності КІН цієї ж задачі у публікації [11], бачимо, що різниця між ними є меншою від 1%.

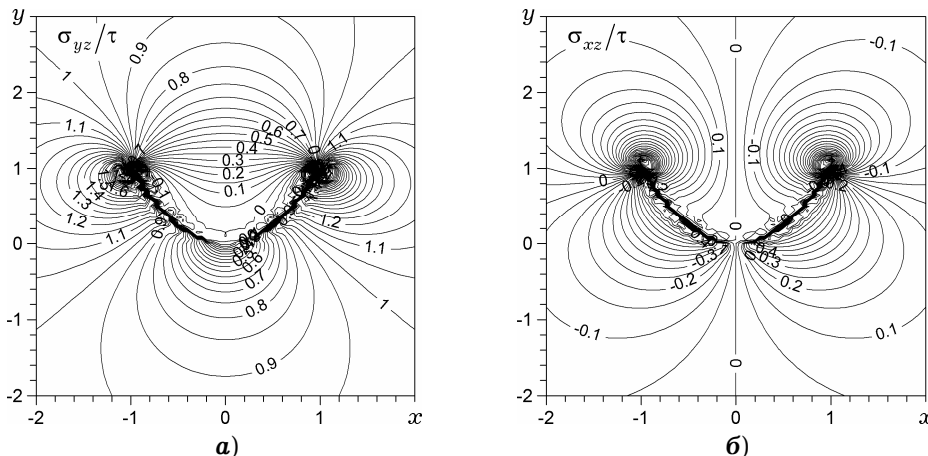


Рис. 4. Лінії рівня для напружень у тілі з тріщиною уздовж параболи у просторі за навантаження $\sigma_{yz}^\infty = \tau$.

Для вибраних значень параметрів задачі функції стрибків дорівнюють

$$f_5(\ell)/\tau = 0, \\ Gf_6(\ell)/\tau = \{1.3657T_1(\ell) - 0.3295T_3(\ell) + 0.0896T_5(\ell) - \\ - 0.0264T_7(\ell) + 0.0084T_9(\ell) - 0.0029T_{11}(\ell) + \\ + 0.0012T_{13}(\ell) - 0.0001T_{15}(\ell) + 0.0003T_{17}(\ell) - \\ - 0.00005T_{19}(\ell)\} \frac{1}{\sqrt{1-\ell^2}}, \quad \ell \in [-1, 1].$$

На рис. 4 спостерігаємо природне згущення ліній рівня нормованих значень напружень σ_{yz}/τ та σ_{xz}/τ біля вершин тріщини, де інтенсивність напружень досягає свого максимуму. Поля напружень σ_{yz} є симетричними стосовно осі $x = 0$, а поля напружень σ_{xz} – антисиметричними. Зазначимо також, що, оскільки тип розглядуваної неоднорідності – тріщина, то з міркувань симетрії $f_5(\ell) = 0$, а $f_6(\ell)$ є непарною функцією. У випадку дослідження АЖВ отримаємо $f_6(\ell) = 0$ та парну функцію $f_5(\ell)$. Для пружного включення ненульовими можуть бути обидві функції стрибків.

Приклад 4. Тонке пружне включення. У цьому прикладі дослідимо вплив модуля пружності вигнутої уздовж трьох типів кривих тонкої неоднорідності на нормовані узагальнені КІН. Розглянемо пружні включення L з відносним модулем пружності $k = G^{\text{in}}/G$ уздовж кривих L' , заданих рівняннями 1) $X(\ell) = \ell$, $Y(\ell) = 1 - \cos(\pi\ell/2)$ (половина косинусоїди); 2) $X(\ell) = \ell$, $Y(\ell) = \ell^2$ (дуга параболи); 3) $X(\ell) = \sin(\pi\ell/2)$, $Y(\ell) = 1 - \cos(\pi\ell/2)$ (дуга кола) $\ell \in [-1, 1]$ (див. вірзку рис. 5). Лінії L' для кожного із випадків викривленого включення мають однакові координати вершини і серединної точки. Як і для попереднього прикладу $a = X(1)$ – півдовжина відрізка, що стягує вершини неоднорідностей. Відносна товщина дефекту складає $h/a = 0.01$. Навантаження задане сталими напруженнями на нескінченності $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$.

На рис. 5 подано графіки залежності нормованих узагальнених КІН K_{31}^{0B} , K_{32}^{0B} від відносного модуля зсуву k неоднорідності. Зазначимо, що, оскільки використовували найпростішу, так звану плівкову модель включення [10, § 15], то узагальнені КІН K_{31}^{0B} і K_{32}^{0B} за такого навантаження будуть нульовими відповідно для жорсткішого і податнішого ніж матриця включення.

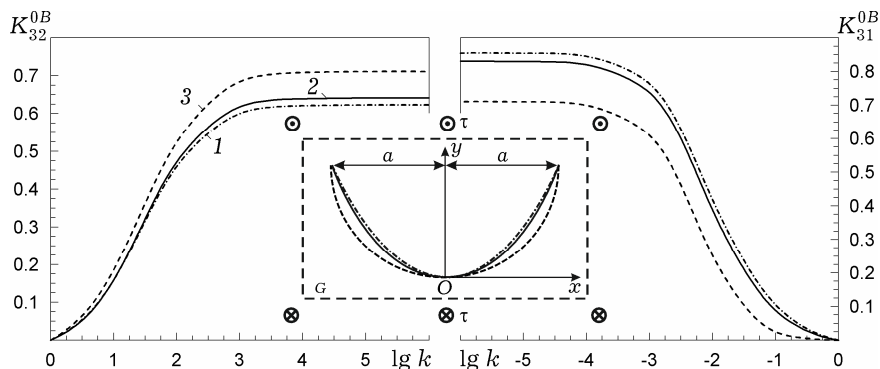


Рис. 5. Залежності нормованих узагальнених КІН K_{31}^{0B} , K_{32}^{0B} від відносного модуля зсуву k .

З рис. 5 видно, що в цілому мінімальні узагальнені КІН K_{31}^{0B} для податнішої, ніж матриця, неоднорідності досягаються для дефекту уздовж кривої 3 (на врізці до рисунка – півколо, штрихова лінія), незважаючи на те, що її довжина є найбільшою серед розглянутих кривих. Це пов'язано, перш за все, з тим, що дотична до осі перерізу тріщини у вершині тріщини уздовж дуги кола орієнтована під прямим кутом до площини прикладеного навантаження. Максимальні КІН K_{31}^{0B} відповідно отримано для кривої 1 (на врізці до рисунка – штрихпунктирна лінія). Для жорсткішої від матриці неоднорідності спостерігається протилежна ситуація: максимальні КІН K_{32}^{0B} отримано для АЖВ уздовж півкола, а мінімальні – для АЖВ уздовж кривої 1.

Висновки. У цій роботі на основі відомих аналітично-числових підходів дослідження ізотропних тіл за наявності у них тонких пружних прямолінійних дефектів розроблено методику визначення напруженого стану та узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень у масивних ізотропних тілах із викривленими тонкими пружними неоднорідностями, зокрема й тріщинами та абсолютно жорсткими включеннями, за умов деформування поздовжнім зсувом. Отримані результати засвідчили добру узгодженість із одержаними раніше для окремих форм тріщини на основі точних аналітичних формул, а також з використанням прямих числових та аналітично-числових методів різними авторами (різниця між результатами склала менше 1%). Це підтверджує достовірність запропонованого підходу. Виявлено вплив відносної жорсткості включення та форми його викривленості на зміну узагальнених КІН. Для КІН біля вістря неоднорідності визначальне значення має нахил дотичної у вістрі до площини прикладання зусиль зсуву.

1. Васильєв К. В., Сулим Г. Т. Застосування методу прямого вирізування до розв'язування задачі поздовжнього зсуву клина з тонкими неоднорідностями довільної орієнтації // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2010. – **53**, № 3. – С. 117–126.
Те саме: Vasil'ev K. V., Sulym H. T. Application of the method of direct cutting-out to the solution of the problem of longitudinal shear of a wedge with thin heterogeneities of arbitrary orientation // *J. Math. Sci.* – 2012. – **180**, No. 2. – P. 122–134.
2. Васильєв К. В., Сулим Г. Т. Розв'язування інтегральних рівнянь задач для шаруватих середовищ із довільно орієнтованими стрічковими неоднорідностями методом колокацій // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика.* – 2009. – Вип. 15. – С. 157–169.
3. Кім Г. С. Про аналогію між поздовжнім зсувом і стаціонарною теплопровідністю тіл з включеннями та тріщинами // *Доп. АН УРСР. Сер. А.* – 1977. – № 4. – С. 334–338.
4. Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Олійник Н. Р. Метод граничних елементів у задачах антиплоского деформування анізотропних тіл із тонкими неоднорідностями // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* – 2012. – Вип. 76. – С. 119–133.
5. Саврук М. П., Зеленьак В. М. Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. – Львів: Растр, 2009. – 212 с.
6. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
7. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с. – (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие в 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка – Т. 2.)
8. Сулим Г. Т. Антиплоская задача для системы линейных включений в изотропной среде // *Прикл. математика и механика.* – 1981. – **45**, № 2. – С. 308–318.
9. Сулим Г. Т., Пастернак Я. М. Визначення параметрів граничного стану пластин із тонкими криволінійними пружними включеннями // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2009. – **45**, № 2. – С. 75–84.
10. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформованих твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.

11. Chen Y. Z. Complex potentials and singular integral equation for curve crack problem in antiplane elasticity // Int. J. Eng. Sci. – 2000. – **38**, No. 5. – P. 565–574.
12. Chen Y. Z. Image method for curved crack problem in antiplane elasticity // Int. J. Fract. – 1991. – **48**, No. 4. – P. R75 – R78.
13. Chen Y. Z. Hypersingular integral equation for curved crack problem in antiplane elasticity // Int. J. Fract. – 1994. – **66**, No. 1. – P. R19 – R21.
14. Chen Y. Z., Lin X. Y., Wang Z. X. Numerical solutions of a hypersingular integral equation for antiplane elastic curved crack problems of circular regions // Acta Mechanica. – 2004. – **173**, No. 1-4. – P. 1–11.
15. Chiang C. R. Slightly curved cracks in antiplane strain // Int. J. Fract. – 1987. – **32**, No. 4 – P. R63 – R66.
16. Pan E. A general boundary element analysis of 2-D linear elastic fracture mechanics // Int. J. Fract. – 1997. – **88**, No. 1. – P. 41–59.
17. Paulino G. H., Saif M. T. A., Mukhewee S. A finite elastic body with a curved crack loaded in anti-plane shear // Int. J. Solids Struct. – 1993. – **30**, No. 8. – P. 1015–1037.
18. Vroonhoven J. C. W. Stress intensity factors for curvilinear cracks loaded under anti-plane strain (mode III) conditions // Int. J. Fract. – 1995. – **70**, No. 1. – P. 1–18.

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПРОСТРАНСТВА С ИСКРИВЛЕННЫМ ТОНКИМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СДВИГЕ

Исследована задача антиплоского деформирования изотропной среды с искривленной тонкой упругой неоднородностью. Методика решения задачи построена на использовании метода функций скачков и условий взаимодействия матрицы с тонким криволинейным включением, а также решении результирующей системы сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши методом коллокаций. Рассмотрен ряд примеров. Результаты вычислений коэффициентов интенсивности напряжений для трещины и абсолютно жесткого включения вдоль дуги окружности сопоставлены с соответствующими аналитическими результатами. Для трещины вдоль симметричной дуги параболы детально исследовано напряженное состояние. Изучено также влияние модуля упругости и формы искривления неоднородности (дуга окружности, парабола, половина косинусоиды) на обобщенные коэффициенты интенсивности напряжений. Установлено, что для коэффициентов интенсивности напряжений около острия неоднородности определяющее значение имеет наклон касательной в острие к плоскости приложения усилий сдвига.

ELASTIC EQUILIBRIUM OF SPACE WITH A THIN CURVED ELASTIC INCLUSION UNDER LONGITUDINAL SHEAR

The problem of antiplane deformation of isotropic medium with a thin curved elastic heterogeneity is investigated. The method of solving the problem is based on using jump functions and interaction conditions of the matrix with a thin curved inclusion and solving the resulting system of singular integral equations with Cauchy kernels using collocation method. Several examples are considered. The results of computing the stress intensity factors for a crack and absolutely rigid inclusion along the arc of a circle with the corresponding analytical results are matched. For the cracks along the symmetric arc of parabola the stress state is studied in detail. We have also studied the influence of elastic modulus and the form of heterogeneity (arc of a circle, parabola, half-cosine) on the generalized stress intensity factors. It is found that the tangent slope at the tip to the plane of shift efforts is very essential for the stress intensity factors at the tip of heterogeneity.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
² Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів