

**ВПЛИВ НАГРІВАННЯ НА ПРИПОВЕРХНЕВУ НЕОДНОРІДНІСТЬ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПОЛІВ У ДІЕЛЕКТРИКАХ**

*Співвідношення локально градієнтної теорії діелектриків, яка ґрунтується на врахуванні процесу локального зміщення маси, використано для дослідження напружено-деформованого стану та поляризації вільної від силового навантаження порожнистої кулі, на поверхнях якої підтримуються різні значення температури. Показано, що співвідношення цієї нелокальної теорії дозволяють оцінити вплив градієнта температури на приповерхневу неоднорідність полів напружень, поляризації і зв'язаного електричного заряду, а також описують піроелектричний і термополяризаційний ефекти.*

**Вступ.** Останні десятиріччя характеризуються значною мініатюризацією технічних пристроїв, інтенсивним розвитком нанотехнологій, синтезом і широким впровадженням у техніку композитних, пористих і надвисокочастотних діелектричних матеріалів. Дослідження таких об'єктів у межах континуальних моделей потребує врахування градієнтності стану фізично малих елементів тіла. Тому інтенсивного розвитку набули нелокальні теорії діелектриків, які є природним узагальненням класичних теорій. Метою побудови нелокальних теорій є узгодження моделей континуальної електромагнітотермомеханіки з теорією ґратки [7, 12, 18] і рядом експериментально встановлених фактів, які не вдається обґрунтувати на основі класичних теорій. До таких належать, зокрема, аномальна залежність ємності тонких діелектричних плівок від товщини (аномалія Міда) [17], оптична активність кварцу [13, 19], високочастотна дисперсія пружних хвиль [8], флексоелектричний і термополяризаційний ефекти [2, 6, 15, 20, 23].

Можна виділити два підходи до побудови нелокальних теорій [4, 21]. Перший полягає у заданні функціональних визначальних співвідношень просторового типу [11], другий – у розширенні простору параметрів стану градієнтами певних фізичних величин [14, 16, 18, 22]. Теорії першого типу іноді називають «нелокальними» або «сильно нелокальними» теоріями, а теорії другого типу відомі як «градієнтні» або «слабо нелокальні».

До класу теорій градієнтного типу належить також локально градієнтна теорія електромагнітотермомеханіки неферромагнітних діелектричних тіл, яка ґрунтується на врахуванні поряд із деформаційними, тепловими та електромагнітними процесами також локального зміщення маси [5, 9]. Наслідком урахування локального зміщення маси є розширення простору параметрів стану двома додатковими парами параметрів стану, одна із яких містить просторовий градієнт потенціалу  $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$ , де  $\mu_\pi$  – міра впливу локального зміщення маси на внутрішню енергію системи [5], а  $\mu$  – хімічний потенціал. Наявність серед параметрів локального термодинамічного стану просторового градієнта потенціалу  $\mu'_\pi$  надає цій теорії статус нелокальної. У працях [1, 3, 9, 10] показано, що співвідношення локально градієнтної лінійної теорії описують такі спостережувані ефекти, як аномалія Міда [10], високочастотна дисперсія модифікованої пружної хвилі [3], піроелектричний ефект [1] тощо. У вказаних працях конкретні дослідження проведено за ізотермічного наближення. Винятком є лише робота [1], у якій на прикладі термопружного шару ідеального діелектрика вивчено вплив постійного температурного поля на приповерхневу неоднорідність електро-механічних полів і показано, що використання співвідношень локально градієнтної теорії дозволило у межах лінійного наближення описати піроелектричний ефект. Метою пропонованої роботи є вивчення впливу градієнта температури на термоелектромеханічну поведінку неферромагнітного ізотропного тіла в лінійному наближенні.

**1. Формулювання задачі.** Розглянемо порожнисту ізотропну кулю, яку у момент  $t = 0$  виділено з безмежного середовища так, що у наступні моменти часу  $t > 0$  вона контактує з вакуумом. Матеріал кулі – ідеальний діелектрик. Масові сили та розподілені джерела тепла у тілі відсутні. Поверхні кулі вільні від силового навантаження і підтримуються за різних збурень температури  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\theta_1 \neq \theta_2$ , щодо її відлікового значення  $T_0$ . Обмежимося розглядом стаціонарного стану порожнистої кулі.

Для вивчення лінійного відгуку тіла на градієнт температури використаємо лінеаризовану систему рівнянь локально градієнтної електромагніто-термомеханіки неферромагнітних діелектричних тіл, отриману у працях [5, 9]. Приймаючи за розв'язувальні функції вектор переміщень  $\mathbf{u}$ , збурення температури  $\theta$ , питому густину наведеної маси  $\rho_m$  та електричний потенціал  $\varphi_e$ , у стаціонарному наближенні ключовій системі рівнянь моделі надамо вигляду:

$$\left( K + \frac{1}{3} G \right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + G \Delta \mathbf{u} - K \alpha_T \nabla \theta - K \alpha_\rho \nabla \rho_m = 0, \quad (1)$$

$$\Delta \theta = 0, \quad (2)$$

$$\Delta \rho_m - \lambda_{\mu E}^2 \rho_m = \frac{K \alpha_\rho}{\rho_0 d_\rho} \Delta(\nabla \cdot \mathbf{u}), \quad (3)$$

$$\Delta \varphi_e = - \frac{\mathbf{x}_E}{\chi_m - \mathbf{x}_E \chi_{Em}} \rho_m. \quad (4)$$

Тут  $\lambda_{\mu E}^2 = d_\rho^{-1} (\chi_m - \mathbf{x}_E \chi_{Em})^{-1}$ ;  $\mathbf{x}_E = \rho_0 \chi_{Em} / \varepsilon$ ;  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \rho_0 \chi_E$ ;  $\rho_0$  – густина маси у вихідному стані;  $K$  – модуль об'ємного стиску за сталих температури та питомої густини наведеної маси;  $G$  – модуль зсуву;  $\alpha_T$  – температурний коефіцієнт об'ємного розширення за сталої питомої густини наведеної маси;  $\alpha_\rho$  – коефіцієнт об'ємного розширення, спричиненого локальним зміщенням маси за незмінної температури;  $d_\rho$  – ізотермоізохоричний коефіцієнт залежності потенціалу  $\mu'_\pi$  від питомої густини наведеної маси;  $\varepsilon_0$  – електрична стала;  $\chi_E$  – діелектрична сприйнятність;  $\chi_m$  і  $\chi_{Em}$  – коефіцієнти, які характеризують відповідно локальне зміщення маси та поляризованість тіла, зумовлені градієнтом потенціалу  $\mu'_\pi$ .

Віднесемо тіло до сферичної системи координат  $(r, \varphi, \vartheta)$ , у якій воно займає область простору  $R_1 \leq r \leq R_2$ . Стан тіла за описаної зовнішньої дії має центральну симетрію. Отже, усі шукані функції залежать лише від радіальної координати  $r$ :  $\mathbf{u} = (u_r(r), 0, 0)$ ,  $\theta = \theta(r)$ ,  $\varphi_e = \varphi_e(r)$ ,  $\rho_m = \rho_m(r)$ . Рівняння (1)–(4) у сферичній системі координат запишемо так:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_r) \right] - \alpha'_T \frac{d\theta}{dr} - \alpha'_\rho \frac{d\rho_m}{dr} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\rho_m}{dr} \right) - \lambda_{\mu E}^2 \rho_m = K' \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u_r) \right) \right], \quad (7)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi_e}{dr} \right) = - \frac{\mathbf{x}_E}{\chi_m - \mathbf{x}_E \chi_{Em}} \rho_m. \quad (8)$$

Тут

$$\alpha'_T = K\alpha_T \left( K + \frac{4}{3}G \right)^{-1}, \quad \alpha'_\rho = K\alpha_\rho \left( K + \frac{4}{3}G \right)^{-1}, \quad K' = K\alpha_\rho (\rho_0 d_\rho)^{-1}.$$

До системи рівнянь (5)–(8) слід долучити рівняння для визначення потенціалу електричного поля у вакуумі (в областях  $0 \leq r < R_1$ ,  $r > R_2$ ):

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi_{ev}^{(i)}(r)}{dr} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

крайові умови на поверхнях  $r = R_1$  та  $r = R_2$ :

$$\sigma_{rr}(R_i) = 0, \quad \theta(R_i) = \theta_i, \quad \mu'_\pi(R_i) = 0, \quad (10)$$

$$j_e(R_i) = j_{ev}^{(i)}(R_i), \quad D(R_i) = D_v^{(i)}(R_i), \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

та умови обмеженості електричного потенціалу у вакуумі при  $r \rightarrow 0$  та  $r \rightarrow +\infty$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi_{ev}^{(1)} < \infty, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi_{ev}^{(2)} = 0. \quad (12)$$

Тут  $\sigma_{rr}$  – радіальна компонента тензора напружень;  $\varphi_{ev}^{(1)}$  та  $\varphi_{ev}^{(2)}$  – відповідно електричні потенціали в областях  $0 \leq r < R_1$  та  $r > R_2$ ;  $\mathbf{D} = (D(r), 0, 0)$  і  $\mathbf{D}_v^{(i)} = (D_v^{(i)}(r), 0, 0)$  – вектори індукції електричного поля у тілі і вакуумі.

Зазначимо, що співвідношення (10) відповідають умові відсутності нормальних до поверхні тіла механічних зусиль, заданню на поверхнях тіла збурень температури  $\theta_1$  і  $\theta_2$ , а також рівності нулеві потенціалу  $\mu'_\pi$  (оскільки тіло контактує з вакуумом). Формули (11) є математичним записом умови неперервності електричного потенціалу при переході через поверхні тіла  $r = R_1$  та  $r = R_2$ , а також відсутності стрибка нормальної компоненти вектора індукції електричного поля.

Запишемо крайові умови (10) і (11) через розв'язувальні функції  $u_r$ ,  $\theta$ ,  $\rho_m$ ,  $\varphi_e$ ,  $\varphi_{ev}^{(1)}$  та  $\varphi_{ev}^{(2)}$ . З огляду на співвідношення Коші та рівняння стану моделі локально градієнтної електромагнітотермомеханіки [5, 9], для ненульових компонент тензорів деформації  $e_{rr}$ ,  $e_{\varphi\varphi}$ ,  $e_{\vartheta\vartheta}$  і напружень  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ , вектора поляризації  $\mathbf{p} = (p, 0, 0)$ , потенціалу  $\mu'_\pi$ , а також індукції електричного поля у тілі  $D$  і вакуумі  $D_v^{(i)}$  запишемо

$$e_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad e_{\varphi\varphi} = e_{\vartheta\vartheta} = \frac{u_r}{r}, \quad (13)$$

$$\sigma_{rr} = \left( K + \frac{4}{3}G \right) \frac{du_r}{dr} + 2 \left( K - \frac{2}{3}G \right) \frac{u_r}{r} - K\alpha_T\theta - K\alpha_\rho\rho_m, \quad (14)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\vartheta\vartheta} = \left( K - \frac{2}{3}G \right) \frac{du_r}{dr} + 2 \left( K + \frac{1}{3}G \right) \frac{u_r}{r} - K\alpha_T\theta - K\alpha_\rho\rho_m, \quad (15)$$

$$p = -\chi_E \frac{d\varphi_e}{dr} + \chi_{Em} \left[ K \frac{\alpha_\rho}{\rho_0} \frac{d}{dr} \left( \frac{du_r}{dr} + 2 \frac{u_r}{r} \right) + \beta_{Tp} \frac{d\theta}{dr} - d_\rho \frac{d\rho_m}{dr} \right], \quad (16)$$

$$\mu'_\pi = \mu'_{\pi 0} + d_\rho\rho_m - \beta_{Tp}\theta - K \frac{\alpha_\rho}{\rho_0} \left( \frac{du_r}{dr} + 2 \frac{u_r}{r} \right), \quad (17)$$

$$D = -\varepsilon \frac{d}{dr} \left\{ \varphi_e + \alpha_E \left[ d_\rho\rho_m - \beta_{Tp}\theta - K \frac{\alpha_\rho}{\rho_0} \left( \frac{du_r}{dr} + 2 \frac{u_r}{r} \right) \right] \right\}, \quad (18)$$

$$D_v^{(i)} = -\varepsilon_0 \frac{d\varphi_{ev}^{(i)}}{dr}. \quad (19)$$

Тут  $\mu'_{\pi 0}$  – значення потенціалу  $\mu'_{\pi}$  у природному стані необмеженого одно-  
рідного середовища, а  $\beta_{T\rho}$  – ізотермо-ізохоричний коефіцієнт залежності  
питомої ентропії від питомої густини наведеної маси.

З урахуванням формул (14), (17)–(19) крайові та контактні умови (10),  
(11) набудуть вигляду

$$\left. \frac{du_r}{dr} \right|_{r=R_i} + 2 \frac{3K - 2G}{3K + 4G} \frac{u_r(R_i)}{R_i} - \alpha'_\rho \rho_m(R_i) = \alpha'_T \theta_i, \quad (20)$$

$$\theta(R_i) = \theta_i, \quad (21)$$

$$d_\rho \rho_m(R_i) - K \frac{\alpha_\rho}{\rho_0} \left( \left. \frac{du_r}{dr} \right|_{r=R_i} + 2 \frac{u_r(R_i)}{R_i} \right) = -\mu'_{\pi 0} + \beta_{T\rho} \theta_i, \quad (22)$$

$$\varphi_e(R_i) = \varphi_{ev}^{(i)}(R_i), \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

$$\varepsilon \left. \frac{d}{dr} \left\{ \varphi_e + \alpha_E \left[ d_\rho \rho_m - \beta_{T\rho} \theta - K \frac{\alpha_\rho}{\rho_0} \left( \frac{du_r}{dr} + 2 \frac{u_r}{r} \right) \right] \right\} \right|_{r=R_i} = \varepsilon_0 \left. \frac{d\varphi_{ev}^{(i)}}{dr} \right|_{r=R_i}. \quad (24)$$

Рівняння (5) і (7) зв'язані між собою. Однак, якщо у правій частині  
рівняння (7) просторові похідні від вектора переміщення замінити згідно з  
(5) похідними від температури та питомої густини наведеної маси і  
врахувати рівняння теплопровідності (6), то у підсумку для знаходження  
функції  $\rho_m$  отримаємо

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\rho_m}{dr} \right) - \lambda_\rho^2 \rho_m = 0, \quad (25)$$

де

$$\lambda_\rho^2 = \lambda_{\mu E}^2 \left( 1 - \frac{K^2 \alpha_\rho^2}{\rho_0 d_\rho (K + 4G/3)} \right)^{-1}.$$

З огляду на те, що  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\rho_m}{dr} \right) = \frac{d^2(r\rho_m)}{dr^2}$ , рівняння (25) запишемо так:

$$\frac{d^2(r\rho_m)}{dr^2} - \lambda_\rho^2 r\rho_m = 0. \quad (26)$$

**2. Розв'язок задачі та його аналіз.** Таким чином, задача про визначен-  
ня напружено-деформованого стану, електричного потенціалу та поляриза-  
ції нагрітої порожнистої кулі зводиться до розв'язування системи рівнянь  
(5), (6), (8), (9), (26) із крайовими та контактними умовами (20)–(24) та умо-  
вами обмеженості електричного потенціалу у вакуумі (12) із наступним ви-  
значенням компонент тензора напружень і поляризації зі співвідношень  
(14)–(16). Тепер можна запропонувати таку схему розв'язування сформу-  
льованої задачі. Знаходимо температуру та питому густину наведеної маси  
з рівнянь (6) і (26), а знаючи ці функції, визначаємо електричний потенціал  
і переміщення на основі рівняння рівноваги (5) і рівнянь електростатики (8)  
і (9). При цьому задача теплопровідності (6), (21) не пов'язана із визна-  
ченням решти функцій. Її розв'язком є функція

$$\theta(r) = \theta_1 - \delta_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right).$$

Тут  $\delta_0 = \theta_1 - \theta_2$ .

Зазначимо, що рівняння (26) для визначення питомої густини наведеної  
маси не зв'язане з іншими рівняннями розв'язувальної системи. Однак  
функції  $\rho_m$ ,  $u_r$ ,  $\varphi_e$ ,  $\varphi_{ev}^{(i)}$  пов'язані умовами (20), (22) і (24).

Розв'язок системи рівнянь (5), (8), (9) і (26) має вигляд

$$\begin{aligned}
u_r(r) &= \frac{A_3}{3}r + \frac{A_4}{r^2} + \alpha'_T r \left[ \frac{\theta_1}{3} + \delta_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left( \frac{1}{2r} - \frac{1}{3R_1} \right) \right] + \\
&\quad + \frac{\alpha'_\rho}{\lambda_\rho r} \left\{ A_1 \left[ \text{ch}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{sh}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] + A_2 \left[ \text{sh}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{ch}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] \right\}, \\
\rho_m(r) &= \frac{1}{r} [A_1 \text{sh}(\lambda_\rho r) + A_2 \text{ch}(\lambda_\rho r)], \\
\varphi_e(r) &= \frac{x_E}{r} \left\{ \delta_0 \frac{\bar{\beta}_{Tp} R_1 R_2}{R_2 - R_1} - d_\rho (1 - K' \alpha'_\rho) [A_1 \text{sh}(\lambda_\rho r) + A_2 \text{ch}(\lambda_\rho r)] \right\}, \\
\varphi_{ev}^{(1)}(r) &= \varphi_*, \quad \varphi_{ev}^{(2)}(r) = 0.
\end{aligned}$$

Тут  $\bar{\beta}_{Tp} = \beta_{Tp} + \alpha'_T K \alpha_\rho / \rho_0$ ;  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , – сталі величини, які визначаються із крайових умов задачі. Подамо  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , як суму трьох складових:

$$A_j = A_j^m + A_j^\theta + A_j^\delta,$$

де

$$\begin{aligned}
A_i^m &= \mu_{\pi 0} a_i^m \left( K' \frac{n_1^m R_1 - n_2^m R_2}{N_1 R_1 - N_2 R_2} - \frac{1}{d_\rho} \right), \\
A_i^\theta &= \theta_1 a_i^m \left( K' \frac{n_1^\theta R_1 - n_2^\theta R_2}{N_1 R_1 - N_2 R_2} + \frac{\bar{\beta}_{Tp}}{d_\rho} \right), \\
A_i^\delta &= \delta_0 \left( K' a_i^m \frac{n_1^\delta R_1 - n_2^\delta R_2}{N_1 R_1 - N_2 R_2} - a_i^\delta \frac{\bar{\beta}_{Tp}}{d_\rho} \right), \quad i = 1, 2, \\
A_3^m &= \mu_{\pi 0} \frac{n_1^m R_1 - n_2^m R_2}{N_1 R_1 - N_2 R_2}, \quad A_4^m = \mu_{\pi 0} \frac{R_1 R_2 (n_1^m N_2 - n_2^m N_1)}{\lambda_\rho (N_1 R_1 - N_2 R_2)}, \\
A_3^\theta &= \theta_1 \frac{n_1^\theta R_1 - n_2^\theta R_2}{N_1 R_1 - N_2 R_2}, \quad A_4^\theta = \theta_1 \frac{R_1 R_2 (n_1^\theta N_2 - n_2^\theta N_1)}{\lambda_\rho (N_1 R_1 - N_2 R_2)}, \\
A_3^\delta &= \delta_0 \frac{n_1^\delta R_1 - n_2^\delta R_2}{N_1 R_1 - N_2 R_2}, \quad A_4^\delta = \delta_0 \frac{R_1 R_2 (n_1^\delta N_2 - n_2^\delta N_1)}{\lambda_\rho (N_1 R_1 - N_2 R_2)}, \\
C_i &= \text{ch}(\lambda_\rho R_i) - \frac{\text{sh}(\lambda_\rho R_i)}{\lambda_\rho R_i}, \quad S_i = \text{sh}(\lambda_\rho R_i) - \frac{\text{ch}(\lambda_\rho R_i)}{\lambda_\rho R_i}, \\
N_i &= \frac{K}{4G} \lambda_\rho R_i^2 - K' \alpha'_\rho (a_1^m C_i + a_2^m S_i), \\
n_i^m &= -\frac{\alpha'_\rho}{d_\rho} (a_1^m C_i + a_2^m S_i), \quad n_i^\theta = \bar{\beta}_{Tp} \frac{\alpha'_\rho}{d_\rho} (a_1^m C_i + a_2^m S_i) + \frac{1}{3} \alpha'_T \lambda_\rho R_i^2, \\
n_i^\delta &= \alpha'_T \lambda_\rho R_i^2 \frac{R_1 R_2}{(R_2 - R_1)} \left( \frac{1}{2R_i} - \frac{1}{3R_1} \right) - \bar{\beta}_{Tp} \frac{\alpha'_\rho}{d_\rho} (a_1^\delta C_i + a_2^\delta S_i), \\
a_1^m &= \frac{R_2 \text{ch}(\lambda_\rho R_1) - R_1 \text{ch}(\lambda_\rho R_2)}{(1 - K' \alpha'_\rho) \text{sh}[\lambda_\rho (R_2 - R_1)]}, \quad a_2^m = \frac{R_1 \text{sh}(\lambda_\rho R_2) - R_2 \text{sh}(\lambda_\rho R_1)}{(1 - K' \alpha'_\rho) \text{sh}[\lambda_\rho (R_2 - R_1)]}, \\
a_1^\theta &= \theta_1 a_1^m - \delta_0 a_1^\delta, \quad a_2^\theta = \theta_1 a_2^m + \delta_0 a_2^\delta, \\
a_1^\delta &= \frac{R_2 \text{ch}(\lambda_\rho R_1)}{(1 - K' \alpha'_\rho) \text{sh}[\lambda_\rho (R_2 - R_1)]}, \quad a_2^\delta = \frac{R_2 \text{sh}(\lambda_\rho R_1)}{(1 - K' \alpha'_\rho) \text{sh}[\lambda_\rho (R_2 - R_1)]}.
\end{aligned}$$

Знаючи переміщення, електричний потенціал та питому густину наведеної маси, на основі формул (14) і (15) знаходимо вирази для напружень:

$$\sigma_{rr}(r) = -4G\alpha'_T \left[ \frac{\theta_1}{3} + \delta_\theta \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left( \frac{1}{2r} - \frac{1}{3R_1} \right) \right] + KA_3 - 4G \frac{A_4}{r^3} - \frac{4G\alpha'_p}{\lambda_\rho r^2} \left\{ A_1 \left[ \text{ch}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{sh}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] + A_2 \left[ \text{sh}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{ch}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] \right\}, \quad (27)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r) = \sigma_{\vartheta\vartheta}(r) = -4G\alpha'_T \left[ \frac{\theta_1}{3} + \delta_\theta \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left( \frac{1}{4r} - \frac{1}{3R_1} \right) \right] + KA_3 + 2G \frac{A_4}{r^3} - 2G \frac{\alpha'_p}{r} \left\{ A_1 \left[ \text{sh}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{ch}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} + \frac{\text{sh}(\lambda_\rho r)}{(\lambda_\rho r)^2} \right] + A_2 \left[ \text{ch}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{sh}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} + \frac{\text{ch}(\lambda_\rho r)}{(\lambda_\rho r)^2} \right] \right\}. \quad (28)$$

Відповідно для напруженості електричного поля у тілі та поляризації маємо формули

$$E(r) = \frac{\alpha_E}{r} \left\langle \bar{\beta}_{Tp} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{\delta_\theta}{r} + d_\rho \lambda_\rho (1 - K'\alpha'_p) \left\{ A_1 \left[ \text{ch}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{sh}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] + A_2 \left[ \text{sh}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{ch}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] \right\} \right\rangle,$$

$$p(r) = \frac{\chi_E \alpha_E - \chi_{Em}}{r} \left\langle \bar{\beta}_{Tp} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{\delta_\theta}{r} + d_\rho \lambda_\rho (1 - K'\alpha'_p) \left\{ A_1 \left[ \text{ch}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{sh}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] + A_2 \left[ \text{sh}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{ch}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] \right\} \right\rangle.$$

При цьому вектор індукції електричного поля у тілі дорівнює нулеві.

Бачимо, що механічні напруження, питома густина наведеної маси, напруженість електричного поля і поляризація є лінійними функціями збурення температури і їм властива неоднорідність розподілу вздовж радіальної координати. Зазначимо, що перші доданки у формулах (27) і (28) зумовлені зв'язком процесів деформування і теплопровідності. Ці доданки визначають температурні напруження у рамках класичних лінійних теорій. Якщо температурний коефіцієнт об'ємного розширення  $\alpha_T$  покласти рівним нулеві, то ці складові зникнуть. Доданки, пропорційні величинам  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , є наслідком урахування локального зміщення маси та його зв'язку з процесами деформування і теплопровідності. Вони визначають неоднорідність розподілу напружень, зумовлену взаємозв'язком згаданих процесів. Такі складові будуть відсутні, якщо вихідну задачу формулювати на основі співвідношень класичної теорії діелектриків.

Функції  $f = \{\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{\vartheta\vartheta}, E, p\}$  можна подати як суму двох доданків:

$$f = f^m(r) + f^T(r; \theta_1, \delta_\theta),$$

де складові  $f^m = \{\sigma_{rr}^m, \sigma_{\varphi\varphi}^m, \sigma_{\vartheta\vartheta}^m, E^m, p^m\}$  зумовлені перевпорядкуванням структури приповерхневих областей тіла (локальним зміщенням маси). Вони не залежать від температурного поля і визначаються на основі співвідношень

$$\sigma_{rr}^m(r) = KA_3^m - 4G \frac{A_4^m}{r^3} - \frac{4G\alpha'_p}{\lambda_\rho r^2} \left\{ A_1^m \left[ \text{ch}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{sh}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] + A_2^m \left[ \text{sh}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{ch}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] \right\},$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varphi\varphi}^m(r) = \sigma_{99}^m(r) &= KA_3^m + 2G \frac{A_4^m}{r^3} - 2G \frac{\alpha'_\rho}{r} \left\{ A_1^m \left[ \text{sh}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{ch}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\text{sh}(\lambda_\rho r)}{(\lambda_\rho r)^2} \right] + A_2^m \left[ \text{ch}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{sh}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} + \frac{\text{ch}(\lambda_\rho r)}{(\lambda_\rho r)^2} \right] \right\}, \\
E^m(r) &= d_\rho \lambda_\rho (1 - K' \alpha'_\rho) \frac{\alpha_E}{r} \left\{ A_1^m \left[ \text{ch}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{sh}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] + \right. \\
&\quad \left. + A_2^m \left[ \text{sh}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{ch}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] \right\}, \\
p^m(r) &= d_\rho \lambda_\rho (1 - K' \alpha'_\rho) \frac{\chi_E \alpha_E - \chi_{Em}}{r} \left\{ A_1^m \left[ \text{ch}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{sh}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] + \right. \\
&\quad \left. + A_2^m \left[ \text{sh}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{ch}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Відповідно для визначення  $f^T(r; \theta_1, \delta_\theta) = \{\sigma_{rr}^T, \sigma_{\varphi\varphi}^T, \sigma_{99}^T, E^T, p^T\}$  маємо формули

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^T(r) &= -\frac{4}{3} G \alpha'_T \theta_1 - 2G \alpha'_T \delta_\theta \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left( \frac{1}{r} - \frac{2}{3R_1} \right) + K(A_3^\theta + A_3^\delta) - \\
&\quad - 4G \frac{(A_4^\theta + A_4^\delta)}{r^3} - \frac{4G \alpha'_\rho}{\lambda_\rho r^2} \left\{ (A_1^\theta + A_1^\delta) \left[ \text{ch}(\lambda_\rho r) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\text{sh}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] + (A_2^\theta + A_2^\delta) \left[ \text{sh}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{ch}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] \right\}, \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varphi\varphi}^T(r) = \sigma_{99}^T(r) &= -\frac{4}{3} G \alpha'_T \theta_1 - G \alpha'_T \delta_\theta \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left( \frac{1}{r} - \frac{4}{3R_1} \right) + K(A_3^\theta + \\
&\quad + A_3^\delta) + 2G \frac{(A_4^\theta + A_4^\delta)}{r^3} - 2G \frac{\alpha'_\rho}{r} \left\{ (A_1^\theta + A_1^\delta) \left[ \text{sh}(\lambda_\rho r) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\text{ch}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} + \frac{\text{sh}(\lambda_\rho r)}{(\lambda_\rho r)^2} \right] + (A_2^\theta + A_2^\delta) \times \right. \\
&\quad \left. \times \left[ \text{ch}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{sh}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} + \frac{\text{ch}(\lambda_\rho r)}{(\lambda_\rho r)^2} \right] \right\}, \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E^T(r) &= \frac{\alpha_E}{r} \left\langle \frac{\bar{\beta}_{T\rho} R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{\delta_\theta}{r} + d_\rho \lambda_\rho (1 - K' \alpha'_\rho) \left\{ (A_1^\theta + A_1^\delta) \left[ \text{ch}(\lambda_\rho r) - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\text{sh}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] + (A_2^\theta + A_2^\delta) \left[ \text{sh}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{ch}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] \right\} \right\rangle, \quad (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^T(r; \theta_1, \delta_\theta) &= \frac{\chi_E \alpha_E - \chi_{Em}}{r} \left\langle \bar{\beta}_{T\rho} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{\delta_\theta}{r} + \right. \\
&\quad \left. + d_\rho \lambda_\rho (1 - K' \alpha'_\rho) \left\{ (A_1^\theta + A_1^\delta) \left[ \text{ch}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{sh}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (A_2^\theta + A_2^\delta) \left[ \text{sh}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{ch}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] \right\} \right\rangle. \quad (32)
\end{aligned}$$

Складові  $f^T(r; \theta_1, \delta_\theta) = \{\sigma_{rr}^T, \sigma_{\varphi\varphi}^T, \sigma_{\theta\theta}^T, E^T, p^T\}$  визначають зумовлені впливом температурного поля додаткові напруження, напруженість електричного поля та поляризацію порожнистої кулі. Перші члени у формулах (29), (30) разом із складовими, пропорційними  $A_j^\theta$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , визначають радіальні та меридіональні напруження, зумовлені сталою температурою  $\theta = \theta_1$ , тоді як другі доданки у цих формулах, пропорційні збуренню температури  $\delta_\theta$ , як і доданки, пропорційні  $A_j^\delta$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , є температурними напруженнями, спричиненими наявністю в тілі градієнта температури.

На рис. 1 показано розподіл напружень  $\sigma_{\varphi\varphi}/\sigma^*$  уздовж безрозмірної радіальної координати  $\zeta = \lambda_\rho r$  у тонкій порожнистій кулі радіусів  $\lambda_\rho R_1 = 10$  і  $\lambda_\rho R_2 = 11$ . Тут  $\sigma^* = 4G\alpha'_T\theta^*$ ,  $\theta^*$  – характерна температура. Суцільні лінії відповідають меридіональним напруженням за відсутності градієнта температури у тілі ( $\delta_\theta = 0$ , крива 1) і його наявності ( $\delta_\theta/\theta^* = -0.1$ , крива 2).

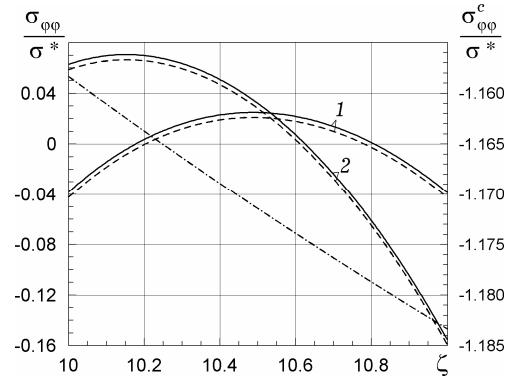


Рис. 1

Розрахунки проведено для таких значень безрозмірних параметрів:  $K/(4G) = 0.5$ ;  $K'\alpha'_\rho = 4 \cdot 10^{-3}$ ;  $\theta_1/\theta^* = 3.2$ ;  $\bar{\beta}_{T\rho}\alpha_\rho/(d_\rho\alpha_T) = 10^{-8}$ ;  $d_\rho\theta^*\alpha_T/(\mu_{\pi 0}\alpha_\rho) = -0.9$ . Для порівняння штриховими лініями зображено розподіл напружень у порожнистій кулі за відсутності постійного температурного поля ( $\theta_1 = 0$ ): крива 1 – без градієнта температури ( $\delta_\theta = 0$ ), крива 2 – за його наявності ( $\delta_\theta/\theta^* = -0.1$ ). Штрихпунктирна крива відповідає температурним напруженням  $\sigma_{\varphi\varphi}^c/\sigma^*$ , обчисленим на основі класичної теорії:

$$\sigma_{\varphi\varphi}^c(r) = -\frac{4}{3}G\alpha'_T \left[ \theta_1 + \delta_\theta \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \left( \frac{3}{4r} - \frac{1}{R_1} \right) \right].$$

Бачимо, що врахування процесу локального зміщення маси призводить до якісних і кількісних змін у розподілі напружень у тілі. Зазначимо, що для масивних тіл збурення температурного поля  $\theta_1$  мало впливає на характер розподілу і величину меридіональних напружень. Бачимо також, що на відміну від постійного температурного поля, градієнт температури в тілі призводить до істотних змін напруженого стану порожнистої кулі.

Криві на рис. 2 ілюструють розподіл меридіональних  $\sigma_{\varphi\varphi}/\sigma^*$  (рис. 2а) і радіальних  $\sigma_{rr}/\sigma^*$  (рис. 2б) напружень уздовж безрозмірної радіальної координати  $\zeta$  у кулі із внутрішнім і зовнішнім радіусами відповідно  $\lambda_\rho R_1 = 10$  і  $\lambda_\rho R_2 = 20$ . Суцільні лінії 1–3 відповідають  $\delta_\theta/\theta^* = 0.3, 0.6, 0.8$  та  $d_\rho\theta^*\alpha_T/(\mu_{\pi 0}\alpha_\rho) = -0.5$ , а значення решти параметрів такі ж, як і для кривих на рис. 1. Штрихові криві ілюструють неоднорідність розподілу меридіональних і радіальних напружень у тонкій порожнистій кулі за відсутності у ній збурення температури та її градієнта. Бачимо, що за фіксованої температури внутрішньої поверхні кулі шляхом охолодження її



зовнішньої поверхні можна змінити характер меридіональних поверхневих напружень зі стискувальних (крива 1 на рис. 2а) на розтягувальні (криві 2 і 3 на цьому ж рисунку).

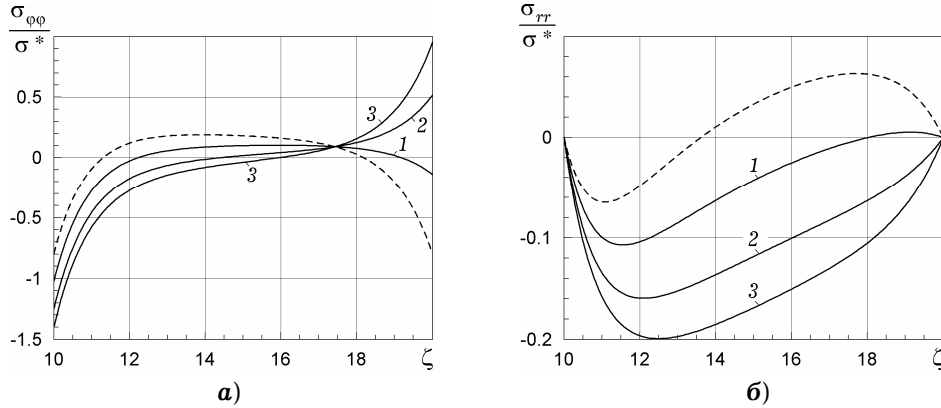


Рис. 2

Аналіз формули (31) показує, що нагрів поверхонь кулі до температури  $\theta_1$  має наслідком збурення напруженості електричного поля  $E^0$ :

$$E^0(r) = d_\rho \lambda_\rho (1 - K' \alpha'_\rho) \frac{\alpha_E}{r} \left\{ A_1^0 \left[ \text{ch}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{sh}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] + A_2^0 \left[ \text{sh}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{ch}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] \right\},$$

а задання на поверхнях тіла різниці температури  $\delta_\theta = \theta_1 - \theta_2$  (градієнта температури у тілі) – збурення напруженості електричного поля  $E^\delta$ :

$$E^\delta(r) = \frac{\alpha_E}{r} \left\langle \frac{\bar{\beta}_{Tp} R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{\delta_\theta}{r} + d_\rho \lambda_\rho (1 - K' \alpha'_\rho) \left\{ A_1^\delta \left[ \text{ch}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{sh}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] + A_2^\delta \left[ \text{sh}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{ch}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] \right\} \right\rangle.$$

З аналізу формули (32) випливає, що складова  $p^T$  ненульової компоненти вектора поляризації зумовлена взаємозв'язком локального зміщення маси з процесами поляризації, теплопровідності та деформування. У класичній стаціонарній лінійній теорії ізотропних діелектриків збурення температурного поля не впливає на електричне поле, а отже, співвідношення класичної теорії не описують піроелектричний і термополяризаційний ефекти. На відміну від класичної теорії, формула (32) описує ці ефекти: додаткову поляризацію  $p^0(r; \theta_1)$  тіла, спричинену однорідним нагрівом (у випадку, який розглядаємо, це є нагрів тіла до температури  $\theta_1$ ), тобто *піроелектричний ефект*:

$$p^0(r; \theta_1) = d_\rho \lambda_\rho (1 - K' \alpha'_\rho) \frac{\chi_E \alpha_E - \chi_{Em}}{r} \times \left\{ A_1^0 \left[ \text{ch}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{sh}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] + A_2^0 \left[ \text{sh}(\lambda_\rho r) - \frac{\text{ch}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] \right\},$$

а також поляризацію  $p^\delta(r; \delta_\theta)$  тіла внаслідок наявності у ньому градієнта температури  $\delta_\theta$ , відому як *термополяризаційний ефект* [2, 6]:

$$p^\delta(r; \delta_\theta) = \frac{\chi_E \alpha_E - \chi_{Em}}{r} \left\langle \bar{\beta}_{Tp} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{\delta_\theta}{r} + d_\rho \lambda_\rho (1 - K' \alpha'_\rho) \times \right. \\ \left. \times \left\{ A_1^\delta \left[ \operatorname{ch}(\lambda_\rho r) - \frac{\operatorname{sh}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] + A_2^\delta \left[ \operatorname{sh}(\lambda_\rho r) - \frac{\operatorname{ch}(\lambda_\rho r)}{\lambda_\rho r} \right] \right\} \right\rangle.$$

При цьому внаслідок поляризації тіла на його поверхнях виникає зв'язаний електричний заряд густини  $\sigma_{se}(R_i) = \rho_0 p(R_i)$ :

$$\sigma_{se}(R_i) = - \frac{\varepsilon_0 \rho_0 \chi_{Em}}{\varepsilon R_i} \left[ \bar{\beta}_{Tp} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \frac{\delta_\theta}{R_i} + d_\rho \lambda_\rho (1 - K' \alpha'_\rho) (A_1 C_i + A_2 S_i) \right].$$

Наслідком піроелектричного ефекту є виникнення на поверхнях  $r = R_1$  та  $r = R_2$  кулі додаткового зв'язаного електричного заряду, пропорційного збуренню температури:

$$\sigma_{se}^0(R_i; \theta_1) = - \frac{\varepsilon_0 \chi_{Em}}{\varepsilon R_i} d_\rho \lambda_\rho (1 - K' \alpha'_\rho) (A_1^0 C_i + A_2^0 S_i),$$

а наслідком термополяризаційного ефекту – виникнення додаткового зв'язаного заряду, пропорційного градієнту температури:

$$\sigma_{se}^\delta(R_i; \delta_\theta) = - \frac{\varepsilon_0 \chi_{Em}}{\varepsilon R_i} \left[ \delta_\theta \frac{\bar{\beta}_{Tp} R_2 R_1}{(R_2 - R_1) R_i} + d_\rho \lambda_\rho (1 - K' \alpha'_\rho) (A_1^\delta C_i + A_2^\delta S_i) \right].$$

Криві на рис. 3 ілюструють вплив товщини стінки  $\delta_R = \lambda_\rho (R_2 - R_1)$  порожнистої кулі на величину зв'язаного поверхневого заряду  $\sigma_{se}/\sigma_{se}^*$  на зовнішній поверхні тіла  $r = R_2$  для значень градієнта температури  $\delta_\theta/\theta^* = 0.6, 0.3, -0.3, -0.6$  (криві 1–4) при  $\theta_1 = 0$ . Значення решти параметрів такі, як і для кривих на рис. 1. Тут  $\sigma_{se}^* = -\varepsilon_0 \rho_0 \mu_{\pi 0} \lambda_\rho \chi_{Em} / \varepsilon$ . Бачимо, що нагрівом чи охолодженням зовнішньої поверхні кулі можна досягнути зміни не лише величини, а й знаку поверхневого заряду. Цей ефект вагоміший для малих товщин, коли в кулі реалізується великий градієнт температури.

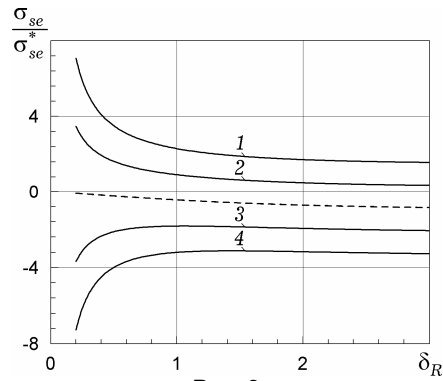


Рис. 3

**Висновки.** Співвідношення локально градієнтної лінійної теорії діелектриків дозволяють оцінити вплив градієнта температури на приповерхневу неоднорідність напружено-деформованого стану та поляризацію ізоτροпних тіл. Ці співвідношення, на відміну від класичних лінійних теорій діелектриків, описують піроелектричний і термополяризаційний ефекти, зумовлені взаємозв'язком локального зміщення маси із процесами деформування, теплопровідності та поляризації. Наслідками термополяризаційного та піроелектричного ефектів є виникнення на поверхнях кулі додаткового зв'язаного заряду, пропорційного градієнту температури та збуренню температури відносно вихідного стану. Показано, що шляхом зміни температури зовнішньої поверхні кулі (за фіксованої температури внутрішньої поверхні) можна ефективно змінювати не лише механічні напруження у кулі, а й розподіл і величину її електричної поляризації, а також величину та знак поверхневого заряду.

1. Грицина О. Вплив температури на поверхневі напруження та поляризацію діелектричного шару // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2011. – Вип. 14. – С. 29–38.
2. Гуревич В. Л., Таганцев А. К. К теории термополяризационного эффекта в центросимметричных диэлектриках // Письма в ЖЭТФ. – 1982. – **35**, вып. 3. – С. 106–108.
3. Кондрат В. Ф., Грицина О. Р. Механоэлектромагнитна взаємодія в ізотропних діелектриках з урахуванням локального зміщення маси // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 1. – С. 150–158.  
Te same: Kondrat V. F., Hrytsyna O. R. Mechanoelectromagnetic interaction in isotropic dielectrics with regard for the local displacement of mass // J. Math. Sci. – 2010. – **168**, No. 5. – P. 688–698.
4. Кондрат В., Грицина О. Лінійні теорії електромагнітомеханіки діелектриків // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2009. – Вип. 9. – С. 7–46.
5. Кондрат В., Грицина О. Рівняння електромагнітоtherмомеханіки поляризованих неферромагнітних тіл за врахування локального зміщення маси // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2008. – Вип. 8. – С. 69–83.
6. Таганцев А. К. Пиро-, пьезо-, флексоэлектрический и термополяризационный эффекты в ионных кристаллах // Успехи физ. наук. – 1987. – **152**, № 3. – С. 423–448.
7. Askar A., Lee P. C. Y., Cakmak A. S. Lattice dynamics approach to the theory of elastic dielectrics with polarization gradient // Phys. Rev. **B**. – 1970. – **1**, No. 8. – P. 3525–3537.
8. Axe J. D., Harada J., Shirane G. Anomalous acoustic dispersion in centrosymmetric crystals with soft optic phonons // Phys. Rev. **B**. – 1970. – **1**, No. 3. – P. 1227–1234.
9. Burak Ya., Kondrat V., Hrytsyna O. An introduction of the local displacements of mass and electric charge phenomena into the model of the mechanics of polarized electromagnetic solids // J. Mech. Mater. Struct. – 2008. – **3**, No. 6. – P. 1037–1046.
10. Chapla Ye., Kondrat S., Hrytsyna O., Kondrat V. On electromechanical phenomena in thin dielectric films // Task Quarterly. – 2009. – **13**, No. 1-2. – P. 145–154.
11. Eringen A. C. Theory of nonlocal piezoelectricity // J. Math. Phys. – 1984. – **25**, No. 3. – P. 717–727.
12. Eringen A. C., Kim B. S. Relation between non-local elasticity and lattice dynamics // Cryst. Latt. Def. – 1977. – **7**. – P. 51–57.
13. Joffrin J., Levelut A. Mise en evidence et mesure du pouvoir rotatoire acoustique naturel du quartz- $\alpha$  // Solid State Commun. – 1970. – **8**, No. 19. – P. 1573–1575.
14. Kafadar C. B. The theory of multipoles in classical electromagnetism // Int. J. Eng. Sci. – 1971. – **9**, No. 9. – P. 831–853.
15. Ma W., Cross L. E. Observation of the flexoelectric effect in relaxor  $\text{Pb}(\text{Mg}_{1/3}\text{Nb}_{2/3})\text{O}_3$  ceramics // Appl. Phys. Lett. – 2001. – **78**, No. 19. – P. 2920–2921.
16. Majdoub M. S., Sharma P., Çağın T. Enhanced size-dependent piezoelectricity and elasticity in nanostructures due to the flexoelectric effect // Phys. Rev. **B**. – 2008. – **77**, No. 12. – P. 125424(2008).
17. Mead C. A. Anomalous capacitance of thin dielectric structures // Phys. Rev. Lett. – 1961. – **6**, No. 10. – P. 545–546.
18. Mindlin R. D. Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics // J. Elasticity. – 1972. – **2**, No. 4. – P. 217–282.
19. Pine A. S. Direct observation of acoustical activity in  $\alpha$ -quartz // Phys. Rev. **B**. – 1970. – **2**, No. 6. – P. 2049–2054.
20. Rafikov E., Savinov A., Jastrabik L., Trepakov V. Frequency and temperature dependence of the thermopolarization response in dynamic investigations // Phys. Status Solidi. **A**. – 1994. – **144**, No. 2. – P. 471–477.
21. Yang J. A review of a few topics in piezoelectricity // Appl. Mech. Rev. – 2006. – **59**, No. 6. – P. 335–345.
22. Yang J. S., Yang X. M. Electric field gradient effect and thin film capacitance // World J. Eng. – 2004. – **2**. – P. 41–45.
23. Zubko P., Catalan G., Buckley A., Welche P. R. L., Scott J. F. Strain-gradient-induced polarization in  $\text{SrTiO}_3$  single crystals // Phys. Rev. Lett. – 2007. – **99**, No. 16. – P. 167601(2007).

## **ВЛИЯНИЕ НАГРЕВА НА ПРИПОВЕРХНОСТНУЮ НЕОДНОРОДНОСТЬ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ДИЭЛЕКТРИКАХ**

Соотношения локально градиентной теории диэлектриков, которая основывается на учете процесса локального смещения массы, использованы для исследования напряженно-деформированного состояния и поляризации свободного от силовой нагрузки полого шара, на поверхностях которого поддерживаются разные значения температуры. Показано, что соотношения этой нелокальной теории позволяют оценить влияние градиента температуры на приповерхностную неоднородность полей напряжений, поляризации и связанного электрического заряда, а также описывают пьезоэлектрический и термополяризационный эффекты.

## **EFFECT OF HEATING ON THE NEAR-SURFACE INHOMOGENEITY OF ELECTRICAL AND MECHANICAL FIELDS IN DIELECTRICS**

*The relations of the local gradient theory of dielectrics that takes into account the process of local mass displacement are used for investigation of the stress-strain state and polarization of a hollow sphere. The surfaces of the sphere are free from power load and different values of temperature are maintained on it. It is shown that the relations of non-local theory allow us to estimate the effect of the temperature gradient on a near-surface inhomogeneity of the stresses, the polarization and the bound electrical charge. These relations also describe the pyroelectric and thermopolarization effects.*

Центр мат. моделювання  
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
25.01.12