

СИНТЕЗ ВИПРОМІНЮЮЧИХ СИСТЕМ З ПЛОСКИМ РОЗКРИВОМ ЗА ЗАДАНОЮ ДІАГРАМОЮ НАПРЯМЛЕНОСТІ ЗА ПОТУЖНІСТЮ. II. ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ У ТОЧКАХ БІФУРКАЦІЇ

Продовжується розпочате в роботі [8] дослідження задачі синтезу випромінюючої системи з плоским розкривом за заданою діаграмою напрямленості за потужністю. Характерною особливістю задач цього класу є неєдиність і біфуркація розв'язків. На основі теорії галуження подається методика знаходження (у першому наближенні) відмінних від нульового розв'язків, яка дає можливість визначити основні властивості розв'язків, що значною мірою спрощує знаходження оптимальних розв'язків задачі синтезу чисельними методами.

Знаходження біфуркуючих розв'язків у першому наближенні. Розглянемо біфуркацію розв'язків системи рівнянь (15), (16), поданої в роботі [8], для випадку прямокутного розкриву. Покладаємо, що фізичні параметри задачі синтезу (2) змінюються на промені $c_2 = \beta c_1$, де β – дійсний числовий невід'ємний параметр, який характеризує відношення сторін прямокутного розкриву. З фізичної точки зору збільшення параметра c_1 означає, що зростає площа розкриву, а це надає більшої можливості для створення оптимального амплітудно-фазового розподілу (АФР) поля в розкриві, яке сформувало би необхідну діаграму напрямленості (ДН) за потужністю.

У роботі [8] наведено й обґрунтовано чисельні алгоритми для знаходження множини точок біфуркації розв'язків системи рівнянь (15), (16) (власні значення рівняння (22)), в основу яких покладено метод неявної функції [5, 6]. Власні функції у точках біфуркації $(c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)})$ знаходимо на підставі рівняння (22) методом Данилевського або за допомогою ітераційного процесу, запропонованого в роботах [9, 10], після підстановки у рівняння (22) власного значення $(c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)})$.

У випадку прямокутного розкриву ядро в рівнянні (22) набуває вигляду

$$\mathcal{K}(s_1, s_2, s'_1, s'_2; c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) = \frac{\sin(c_1^{(0)}(s_1 - s'_1))}{\pi(s_1 - s'_1)} \cdot \frac{\sin(\beta c_1^{(0)}(s_2 - s'_2))}{\pi(s_2 - s'_2)}. \quad (38)$$

Розглянемо одновимірний випадок галуження [1], покладаючи в системі рівнянь (15), (16)

$$c_1 = c_1^{(0)} + \mu, \quad c_2 = \beta c_1^{(0)} + \beta \mu. \quad (39)$$

Шукані розв'язки позначимо через $w(Q, \mu)$, $\omega(Q, \mu)$.

Підставляючи вирази (39) у систему (16), (17) і розкладаючи підінтегральні функції в околі точки $(c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}, 0, 0)$ у рівномірно збіжні степеневі ряди за функціональними аргументами w , ω і числовим параметром μ , одержуємо аналогічну до (20), (21) систему нелінійних інтегральних рівнянь типу Ляпунова – Шмідта відносно малих розв'язків w , ω у вигляді

$$\begin{aligned} w(Q) - \frac{2}{\alpha} \iint_{\bar{G}} N_0(Q') \mathcal{K}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) w(Q') dQ' = \\ = \frac{2}{\alpha} \sum_{m+n+p \geq 2} \mu^p \iint_{\bar{G}} A_{mnp}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) w^m(Q') \omega^n(Q') dQ', \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega(Q) - \frac{2}{\alpha} \iint_{\bar{G}} N_0(Q') \mathcal{K}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) \omega(Q') dQ' = \\ = \frac{2}{\alpha} \sum_{m+n+p \geq 2} \mu^p \iint_{\bar{G}} B_{mnp}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) w^m(Q') \omega^n(Q') dQ'. \quad (41)\end{aligned}$$

Нехай $(c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)})$ – власне значення лінійного однорідного інтегрального рівняння

$$\varphi(Q) = \frac{2}{\alpha} \iint_{\bar{G}} N_0(Q') \mathcal{K}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) \varphi(Q') dQ', \quad (42)$$

а $\varphi_1(Q)$ – відповідна йому власна функція. Спряжене до (42) рівняння має вигляд

$$\psi(Q) = \frac{2}{\alpha} N_0(Q) \iint_{\bar{G}} \mathcal{K}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) \psi(Q') dQ'. \quad (43)$$

Власну функцію цього рівняння, що відповідає власному значенню $(c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)})$, позначимо через $\psi_1(Q)$.

Для подальших перетворень системи рівнянь (40), (41) розглянемо питання про загальний вираз для резольвенти Фредгольма у частковому випадку системи інтегральних рівнянь вигляду

$$w(Q) - \iint_{\bar{G}} \mathcal{K}_{11}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta) w(Q') dQ' = \Phi_1(Q, w(Q'), \omega(Q'), c_1^{(0)}, \beta, \mu), \quad (44)$$

$$\omega(Q) - \iint_{\bar{G}} \mathcal{K}_{22}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta) \omega(Q') dQ' = \Phi_2(Q, w(Q'), \omega(Q'), c_1^{(0)}, \beta, \mu), \quad (45)$$

у лівій частині якої лінійні інтегральні оператори не взаємозв'язані відносно функцій $w(Q')$ і $\omega(Q')$.

Систему рівнянь (44), (45) запишемо у матричній формі:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} w(Q) \\ \omega(Q) \end{pmatrix} - \iint_{\bar{G}} \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{11}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta) & 0 \\ 0 & \mathcal{K}_{22}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w(Q') \\ \omega(Q') \end{pmatrix} dQ' = \\ = \begin{pmatrix} \Phi_1(Q, w(Q'), \omega(Q'), c_1^{(0)}, \beta, \mu) \\ \Phi_2(Q, w(Q'), \omega(Q'), c_1^{(0)}, \beta, \mu) \end{pmatrix}. \quad (46)\end{aligned}$$

Якщо $(c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)})$ не є власним значенням лінійного однорідного рівняння (46), то існує резольвента Фредгольма матричного ядра і розв'язок системи можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} w(Q) \\ \omega(Q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1(Q, w, \omega, c_1^{(0)}, \beta, \mu) \\ \Phi_2(Q, w, \omega, c_1^{(0)}, \beta, \mu) \end{pmatrix} + \\ + \iint_{\bar{G}} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{11}(Q, Z, c_1^{(0)}, \beta) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{22}(Q, Z, c_1^{(0)}, \beta) \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \Phi_1(Z, w, \omega, c_1^{(0)}, \beta, \mu) \\ \Phi_2(Z, w, \omega, c_1^{(0)}, \beta, \mu) \end{pmatrix} dZ, \quad (47)\end{aligned}$$

де $Z(Q) = [w(Q), \omega(Q)]^T$ – шукана вектор-функція. У цьому легко перекона- тись, підсумовуючи ряд Неймана при визначенні резольвенти Фредгольма (див. [2, с. 43]).

Таким чином, виконуючи в підінтегральному виразі (47) множення матриці на вектор, з'ясуємо, що запис розв'язків у системі рівнянь (46) через резольвенту Фредгольма можна здійснювати, виконуючи відповідні перетворення кожного рівняння цієї системи окремо. В результаті одержимо

$$w(Q) = \Phi_1(Q, w, \omega, c_1^{(0)}, \beta, \mu) + \iint_{\bar{G}} \mathcal{R}_{11}(Q, Z, c_1^{(0)}, \beta) \Phi_1(Z, w, \omega, c_1^{(0)}, \beta, \mu) dZ, \quad (48)$$

$$\omega(Q) = \Phi_2(Q, w, \omega, c_1^{(0)}, \beta, \mu) + \iint_{\bar{G}} \mathcal{R}_{11}(Q, Z, c_1^{(0)}, \beta) \Phi_2(Z, w, \omega, c_1^{(0)}, \beta, \mu) dZ. \quad (49)$$

Використовуючи запис розв'язків системи рівнянь (44), (45) через резольвенту Фредгольма (48), (49), повернемося до системи рівнянь (40), (41), яка відрізняється від загального запису системи (44), (45) своїми ядрами та правою частиною.

Оскільки $(c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)})$ є однократним власним значенням лінійного інтегрального рівняння в (44), (45), то для існування резольвенти Фредгольма, необхідно виключити з ядра власні функції, відповідні власному значенню $(c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)})$. З цією метою, додавши до ядра лінійного інтегрального оператора в (44), (45) вираз $\psi_1(Q)\phi_1(Q')$ і віднявши його, одержимо

$$w(Q) - \frac{2}{\alpha} \iint_{\bar{G}} N_0(Q') \tilde{\mathcal{K}}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) w(Q') dQ' = \zeta_1 \psi_1(Q) - \frac{2}{\alpha} \sum_{m+n+p \geq 2} \mu^p \iint_{\bar{G}} A_{mnpq}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) w^m(Q') \omega^n(Q') dQ', \quad (50)$$

$$\omega(Q) - \frac{2}{\alpha} \iint_{\bar{G}} N_0(Q') \tilde{\mathcal{K}}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) \omega(Q') dQ' = \zeta_2 \psi_1(Q) - \frac{2}{\alpha} \sum_{m+n+p \geq 2} \mu^p \iint_{\bar{G}} B_{mnpq}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) w^m(Q') \omega^n(Q') dQ', \quad (51)$$

де

$$\tilde{\mathcal{K}}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) = \mathcal{K}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) - \psi_1(Q)\phi_1(Q'),$$

$$\zeta_1 = \iint_{\bar{G}} \phi_1(Q) w(Q) dQ, \quad \zeta_2 = \iint_{\bar{G}} \phi_1(Q) \omega(Q) dQ. \quad (52)$$

В результаті такого виключення, згідно з лемою Шмідта (див. [1, с. 132]), одиниця вже не буде власним значенням лінійного інтегрального оператора з ядром $\tilde{\mathcal{K}}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)})$. Отже, існує резольвента Фредгольма $\mathcal{R}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)})$ цього ядра. Розглядаючи систему рівнянь (50), (51) при фіксованих правих частинах як систему рівнянь Фредгольма II-го роду та записуючи формально її розв'язок через резольвенту $\mathcal{R}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)})$, отримаємо систему двох найпростіших рівнянь типу Ляпунова – Шмідта:

$$w(Q) = \zeta_1 \phi_1(Q) + \sum_{m+n+p \geq 2} \mu^p \iint_{\bar{G}} g_{mnp}^{(1)}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) w^m(Q') \omega^n(Q') dQ', \quad (53)$$

$$\omega(Q) = \zeta_2 \varphi_1(Q) + \sum_{m+n+p \geq 2} \mu^p \iint_{\bar{G}} g_{mnp}^{(2)}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) w^m(Q') \omega^n(Q') dQ', \quad (54)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi_1(Q) &= \psi_1(Q) + \iint_{\bar{G}} \mathcal{R}(Q, Z, c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) \psi_1(Z) dZ, \\ g_{mnp}^{(1)}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) &= A_{mnp}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) + \\ &+ \iint_{\bar{G}} \mathcal{R}(Q, Z, c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) A_{mnp}(Z, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) dZ, \\ g_{mnp}^{(2)}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) &= B_{mnp}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) + \\ &+ \iint_{\bar{G}} \mathcal{R}(Q, Z, c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) B_{mnp}(Z, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) dZ. \end{aligned}$$

Таким чином, для знаходження відгалужених від нульового розв'язків у точці $(c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)})$ отримано систему (53), (54) двох найпростіших рівнянь типу Ляпунова – Шмідта. Згідно з [1], ця система при достатньо малих μ , $|\zeta_1|$, $|\zeta_2|$ має єдиний неперервний розв'язок, який можна записати у вигляді рівномірно збіжних рядів:

$$w(s) = \zeta_1 \varphi_1(Q) + \sum_{i+j+l \geq 2} \alpha_{ijl}(Q) \zeta_1^i \zeta_2^j \mu^l, \quad (55)$$

$$\omega(s) = \zeta_2 \varphi_1(Q) + \sum_{i+j+l \geq 2} \beta_{ijl}(Q) \zeta_1^i \zeta_2^j \mu^l. \quad (56)$$

Підставляючи вирази (55), (56) у рівняння (53), (54) й прирівнюючи коефіцієнти при однакових одночленах, одержуємо рекурентну систему для визначення коефіцієнтів $\alpha_{ijl}(s)$, $\beta_{ijl}(s)$. Наведемо перші з них ($i + j + l \leq 3$), які необхідні для знаходження малих розв'язків у першому наближенні:

$$\begin{aligned} \alpha_{200}(Q) &= \alpha_{020}(Q) = \alpha_{002}(Q) = \alpha_{110}(Q) = \alpha_{012}(Q) = \\ &= \alpha_{011}(Q) = \alpha_{030}(Q) = \alpha_{003}(Q) = \alpha_{111}(Q) \equiv 0, \\ \alpha_{101}(Q) &= \iint_{\bar{G}} g_{101}^{(1)}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) \varphi_1(Q') dQ', \\ \alpha_{120}(Q) &= \iint_{\bar{G}} [g_{102}^{(1)}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) \varphi_1(Q') + \\ &+ g_{101}^{(1)}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) \alpha_{101}(Q')] dQ', \\ \alpha_{210}(Q) &= \iint_{\bar{G}} g_{210}^{(1)}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) \varphi_1^3(Q') dQ', \\ \alpha_{300}(Q) &= \iint_{\bar{G}} g_{300}^{(1)}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) \varphi_1^3(Q') dQ', \quad (57) \\ \beta_{200}(Q) &= \beta_{020}(Q) = \beta_{002}(Q) = \beta_{110}(Q) = \beta_{101}(Q) = \\ &= \beta_{300}(Q) = \beta_{003}(Q) = \beta_{102}(Q) = \beta_{111}(Q) \equiv 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{011}(Q) &= \iint_{\bar{G}} g_{011}^{(2)}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) \varphi_1(Q') dQ', \\
\beta_{012}(Q) &= \iint_{\bar{G}} [g_{012}^{(2)}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) \varphi_1(Q') + \\
&\quad + g_{011}^{(2)}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) \beta_{011}(Q')] dQ', \\
\beta_{120}(Q) &= \iint_{\bar{G}} g_{120}^{(2)}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) \varphi_1^3(Q') dQ', \\
\beta_{030}(Q) &= \iint_{\bar{G}} g_{030}^{(2)}(Q, Q', c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)}) \varphi_1^3(Q') dQ'. \tag{58}
\end{aligned}$$

Для визначення значень параметрів ζ_1, ζ_2 (що входять у розв'язки) як функцій від змінної μ підставимо вирази (55), (56) у формули (52). В результаті одержимо систему рівнянь розгалуження¹

$$L_{101}^{(1)} \zeta_1 \mu + L_{300}^{(1)} \zeta_1^3 + L_{210}^{(1)} \zeta_1^2 \zeta_2 + L_{102}^{(1)} \zeta_1 \mu^2 + \sum_{i+j+\ell \geq 4} L_{ij\ell}^{(1)} \zeta_1^i \zeta_2^j \mu^\ell = 0, \tag{59}$$

$$L_{011}^{(2)} \zeta_2 \mu + L_{030}^{(2)} \zeta_2^3 + L_{120}^{(2)} \zeta_1 \zeta_2^2 + L_{012}^{(2)} \zeta_2 \mu^2 + \sum_{i+j+\ell \geq 4} L_{ij\ell}^{(2)} \zeta_1^i \zeta_2^j \mu^\ell = 0, \tag{60}$$

де

$$L_{ij\ell}^{(1)} = \iint_{\bar{G}} \alpha_{ij\ell}(Q) \varphi_1(Q) dQ, \quad L_{ij\ell}^{(2)} = \iint_{\bar{G}} \beta_{ij\ell}(Q) \varphi_1(Q) dQ, \tag{61}$$

– коефіцієнти системи рівнянь розгалуження².

Знаходження малих розв'язків системи рівнянь розгалуження (59), (60) пов'язано з побудовою спадаючої ділянки діаграми Ньютонa [1]. У загальному випадку побудова діаграми Ньютонa для системи двох рівнянь галуження вимагає досить складних перетворень, які подаються в [1]. Проте інколи достатньо знати вершини $(0, n_0)$ і $(m_0, 0)$ цієї діаграми, які дозволяють зробити висновки про всі можливі розміщення спадаючої ділянки діаграми.

¹ **Примітка 1.** Наведемо одну з важливих властивостей рівняння розгалуження. Для цього нелінійне інтегральне рівняння запишемо в операторній формі

$$(i) \quad (I - U)x = \Phi_{01}\mu + \sum_{i+k \geq 2} \Phi_{ik} x^i \mu^k,$$

де U – лінійний інтегральний оператор, I – одиничний оператор, Φ_{ik} – однорідні оператори степеня i за x та степеня k за числовим параметром μ . У монографії [1] доведено, що між малими розв'язками рівняння (i) й малими розв'язками відповідного йому рівняння розгалуження

$$\begin{aligned}
\sum_{n_1+n_2+\dots+n_r \geq 2} L_{n_1 \dots n_r}^{(i)} \zeta_1^{n_1} \dots \zeta_r^{n_r} + \sum_{n_1+n_2+\dots+n_r \geq 2} \zeta_1^{n_1} \dots \zeta_r^{n_r} \sum_{k \geq 1} L_{n_1 \dots n_r}^{(i)} \mu^k = 0, \\
i = 1, 2, \dots, r,
\end{aligned}$$

існує взаємно однозначна відповідність. Це твердження є справедливим також для випадку систем рівнянь (15), (16) і (59), (60).

² **Примітка 2.** Зауважимо, що при обчисленні коефіцієнтів у рівняннях (59), (60) застосовуються рівності

$$\begin{aligned}
\iint_{\bar{G}} \alpha_{ij\ell}(Q, Q') \varphi_1(Q) dQ &= \iint_{\bar{G}} A_{ij\ell}(Q, Q') \psi_1(Q) dQ, \\
\iint_{\bar{G}} \beta_{ij\ell}(Q, Q') \varphi_1(Q) dQ &= \iint_{\bar{G}} B_{ij\ell}(Q, Q') \psi_1(Q) dQ. \tag{62}
\end{aligned}$$

Використовуючи методику [1, с. 80–89], знаходимо, що $n_0 = 2$, а $m_0 = 4$. Отже, можливі такі положення діаграми Ньютона, які зображено на рис. 1а і рис. 1б.

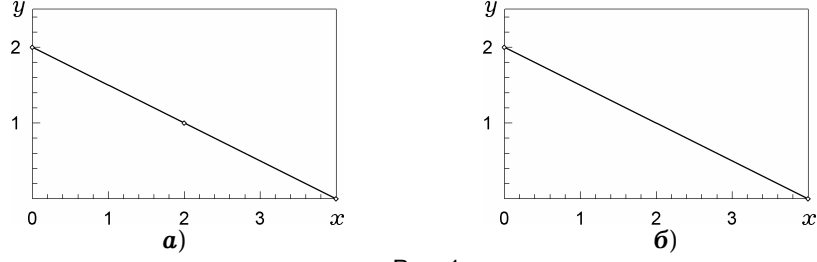


Рис. 1

Розв'язки системи рівнянь розгалуження будемо знаходити у вигляді

$$\begin{aligned}\zeta_1(\mu) &= d_1^{(1)}\mu^\varepsilon + d_1^{(2)}\mu^{\varepsilon'} + d_1^{(3)}\mu^{\varepsilon''} + \dots, \\ \zeta_2(\mu) &= d_2^{(1)}\mu^\varepsilon + d_2^{(2)}\mu^{\varepsilon'} + d_2^{(3)}\mu^{\varepsilon''} + \dots,\end{aligned}\quad (63)$$

де показники степенів ε , ε' , ε'' , ... є дробами зі скінченним спільним знаменником.

Із наведених на рис. 1 спадаючих ділянок діаграми Ньютона випливає, що система рівнянь (59), (60) має чотири малі розв'язки з показником степеня $\varepsilon = 1/2$. На підставі цього покладемо

$$\begin{aligned}\zeta_1(\mu) &= d_1\mu^{1/2} + o(\mu^{1/2}), \\ \zeta_2(\mu) &= d_2\mu^{1/2} + o(\mu^{1/2}).\end{aligned}\quad (64)$$

Підставляючи (64) в систему (59), (60), одержуємо

$$L_{101}^{(1)}d_1\mu^{3/2} + L_{300}^{(1)}d_1^3\mu^{3/2} + L_{210}^{(1)}d_1^2d_2\mu^{3/2} + L_{102}^{(1)}d_1\mu^{5/2} + O(\mu^{5/2}), \quad (65)$$

$$L_{011}^{(2)}d_2\mu^{3/2} + L_{030}^{(2)}d_2^3\mu^{3/2} + L_{120}^{(1)}d_1d_2^2\mu^{3/2} + L_{012}^{(2)}d_2\mu^{5/2} + O(\mu^{5/2}). \quad (66)$$

Збираючи подібні члени при $\mu^{3/2}$ в системі рівнянь (65), (66), одержуємо систему рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів d_1 , d_2 :

$$L_{101}^{(1)}d_1 + L_{300}^{(1)}d_1^3 + L_{210}^{(1)}d_1^2d_2 = 0, \quad (67)$$

$$L_{011}^{(2)}d_2 + L_{030}^{(2)}d_2^3 + L_{120}^{(1)}d_1d_2^2 = 0. \quad (68)$$

Легко переконатись, що одним із розв'язків цієї системи є $d_1 = 0$, $d_2 = 0$. Значенням цих параметрів можна поставити у відповідність один із розв'язків системи рівнянь розгалуження у вигляді

$$\begin{aligned}\zeta_1(\mu) &\equiv 0, \\ \zeta_2(\mu) &\equiv 0,\end{aligned}\quad (69)$$

який відповідає за продовження нульового розв'язку за параметром μ .

Після скорочення рівняння (67) на d_1 , а рівняння (68) – на d_2 знаходимо інші корені, розв'язуючи спочатку квадратне рівняння

$$L_{300}^{(1)}d_1^2 + L_{210}^{(1)}d_1d_2 + L_{101}^{(1)} = 0 \quad (70)$$

й одержуючи при цьому

$$d_{1,*}^{(1,2)} = \frac{-L_{210}^{(1)}d_2 \pm \sqrt{(L_{210}^{(1)}d_2)^2 - 4L_{300}^{(1)}L_{101}^{(1)}}}{2L_{300}^{(1)}}. \quad (71)$$

Підставляючи знайдені вирази для коренів першого рівняння через d_2 у рівняння (68), одержимо два незалежні рівняння другого порядку відносно d_2 :

$$L_{011}^{(2)} + L_{030}^{(2)}d_2^2 + L_{120}^{(2)}d_{1,*}^{(1)}d_2 = 0, \quad (72)$$

$$L_{011}^{(2)} + L_{030}^{(2)}d_2^2 + L_{120}^{(2)}d_{1,*}^{(2)}d_2 = 0, \quad (73)$$

кожне з яких може мати по два дійсні корені.

Таким чином, у загальному випадку система рівнянь (67), (68), крім нульового розв'язку (69), має 4 корені, тобто у точці $(c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)})$ система рівнянь розгалуження (65), (68) має чотири малі розв'язки. Цей висновок підтверджують, зокрема, результати, одержані на підставі побудови діаграми Ньютона (рис. 1).

Враховуючи примітку 1, приходимо до висновку, що у точці $(c_1^{(0)}, \beta c_1^{(0)})$ можуть відгалужуватися чотири відмінних від нульового малі розв'язки системи рівнянь (15), (16). Для знаходження цих розв'язків у першому наближенні визначені корені спочатку підставляємо у формули (64), а потім (64) підставляємо у вирази

$$w(Q) = \zeta_1 \varphi_1(Q) + \sum_{i+j+\ell \geq 2}^{\infty} \alpha_{ij\ell}(Q) \zeta_1^i \zeta_2^j \mu^\ell, \quad (74)$$

$$\omega(Q) = \zeta_2 \varphi_1(Q) + \sum_{i+j+\ell \geq 2}^{\infty} \beta_{ij\ell}(Q) \zeta_1^i \zeta_2^j \mu^\ell. \quad (75)$$

Збираючи у (74), (75) члени при $\mu^{1/2}$, знаходимо у першому наближенні вигляд малих відгалужених розв'язків системи рівнянь (15), (16).

Із аналізу формул (57), (58) та (74), (75) випливає, що властивості відгалужених у точках біфуркації ненульових розв'язків залежать від властивостей симетрії (парності) заданої ДН за потужністю $N_0(s_1, s_2)$ і властивостей власних функцій. Зокрема, для парної за обома аргументами функції $N_0(s_1, s_2) \equiv 1$ перший розв'язок, що відгалужився у першій точці $c_1 = 0.3927$, $c_2 = 0.3142$ (див. рис. 2 у [8]), має парні за двома аргументами дійсну й уявну частини, а відповідний йому амплітудно-фазовий розподіл поля у розкриві, обчислений за формулою (14), є симетричним відносно двох координатних осей. Властивості парності уявної й дійсної частин розв'язків (74), (75) (у першому наближенні) використовуються при виборі початкового наближення для знаходження повних розв'язків чисельними методами.

Чисельне знаходження оптимальних розв'язків. Чисельне знаходження розв'язків задачі синтезу здійснюємо на підставі системи рівнянь (15), (16), яку для скорочення записів подамо в операторній формі

$$\begin{aligned} u &= B_1(u, v) \equiv \frac{2}{\alpha} AA^*(N_0 \cdot u) - \frac{2}{\alpha} AA^*((u^2 + v^2)u), \\ v &= B_2(u, v) \equiv \frac{2}{\alpha} AA^*(N_0 \cdot v) - \frac{2}{\alpha} AA^*((u^2 + v^2)v), \end{aligned} \quad (76)$$

де $\mathbf{B} = (B_1, B_2)^\top$ – оператор основного рівняння синтезу (7), а $(u, v)^\top = f$. Ітераційний процес для знаходження розв'язків системи (76) побудуємо за формулою

$$f_{n+1} = \theta f_n + (1 - \theta)\mathbf{B}(f_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (77)$$

де $\theta \in (0, 1)$ – дійсний числовий параметр. Оскільки простір $H_f = L_2(\bar{G})$ є строго опуклим банаховим простором [3, 4], то збіжність ітераційного про-

цесу (77) до одного із розв'язків системи рівнянь (15), (16) впливає з теореми [4, с. 120], в якій покладається, що існує деяка замкнена опукла множина $\Omega \subset H_f$, яку нерозтягуючий оператор $\mathbf{B}(f)$ перетворює у свою компактну частину. Властивість оператора $\mathbf{B}(f)$ залежить від величини параметра α , а лема 4.4.1 із [7] визначає множину $\Omega \subset H_f$, на якій оператор $\mathbf{B}(f)$ є нерозтягуючим.

При розв'язуванні системи рівнянь (76) постає питання про вибір початкового наближення $(u_0, v_0)^\top = f_0$. Зауважимо, що відмінні від тривіального розв'язки, що відгалужуються від нульового, описуються у першому наближенні формулами (74), (75) і мають характерні властивості парності за своїми аргументами, подібні до властивостей парності власних функцій, що відповідають відповідним точкам біфуркації $(c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$.

Безпосередньою перевіркою можна переконатись, що у випадку парної за обома аргументами заданої ДН $N_0(s_1, s_2)$ та симетричних областей \bar{S} і \bar{G} інтегральні оператори, що знаходяться у правих частинах системи рівнянь (15), (16), мають властивість збереження типу парності для функцій $u(s_1, s_2)$, $v(s_1, s_2)$, тобто існують відповідні інваріантні множини у просторі $\mathbf{C}(\bar{G})$, до яких належать розв'язки цієї системи. На цій підставі при виборі початкового наближення доцільно використовувати властивість інваріантності інтегральних операторів $B_1(u, v)$, $B_2(u, v)$, тобто задавати відповідне початкове наближення для функцій $u(s_1, s_2)$, $v(s_1, s_2)$. Функції u , v , які мають певний тип парності за відповідним аргументом, належать до відповідних інваріантних множин U_{ij} , V_{kl} простору $\mathbf{C}(\bar{G})$, де індекси i, j, k, l набувають значень 0 або 1. Зокрема, якщо $u(s_1, s_2) \in U_{01}$, то $u(-s_1, s_2) = u(s_1, s_2)$, а $u(s_1, -s_2) = -u(s_1, s_2)$. Легко пересвідчитися, що виконуються такі включення:

$$B_1(U_{ij} \cup V_{kl}) \subset U_{ij}, \quad B_2(U_{ij} \cup V_{kl}) \subset V_{kl}, \quad \mathbf{B}(U_{ij} \cup V_{kl}) \subset U_{ij} \cup V_{kl}.$$

Із цих співвідношень випливає можливість існування нерухомих точок оператора \mathbf{B} , які належать до відповідної інваріантної множини, тобто розв'язків системи (15), (16) і, відповідно, рівняння (9).

Числові приклади. Спочатку розглянемо числові результати синтезу заданої рівномірної ДН за потужністю $N_0(s_1, s_1) \equiv 1$, одержані за ітераційним процесом (77) при $c_1 = 8$, $c_2 = 4.8$. Початкове наближення вибирали з такими властивостями:

$$\begin{aligned} u_0(-s_1, s_2) &= u_0(s_1, s_2), & u_0(s_1, -s_2) &= u_0(s_1, s_2), \\ v_0(-s_1, s_2) &= v_0(s_1, s_2), & v_0(s_1, -s_2) &= -v_0(s_1, s_2). \end{aligned}$$

На рис. 2 наведено задану ДН (рис. 2а) й синтезовану ДН за потужністю (рис. 2б) та відповідну їй фазову ДН (рис. 2в). Із аналізу цього рисунка бачимо, що фазова ДН парна за аргументом s_1 й непарна за s_2 . Отже, фазова ДН за своїми властивостями парності корелює з властивостями парності власної функції, наведеної на рис. 3б із [8], що відповідає другій точці біфуркації. На підставі формули (14) переконуємось, що оптимальний АФР поля у розкриві (рис. 3), що відповідає розв'язку цього типу, є несиметричним відносно осі OY . Отже, симетрична ДН за потужністю може бути створена несиметричним розподілом поля в розкриві.

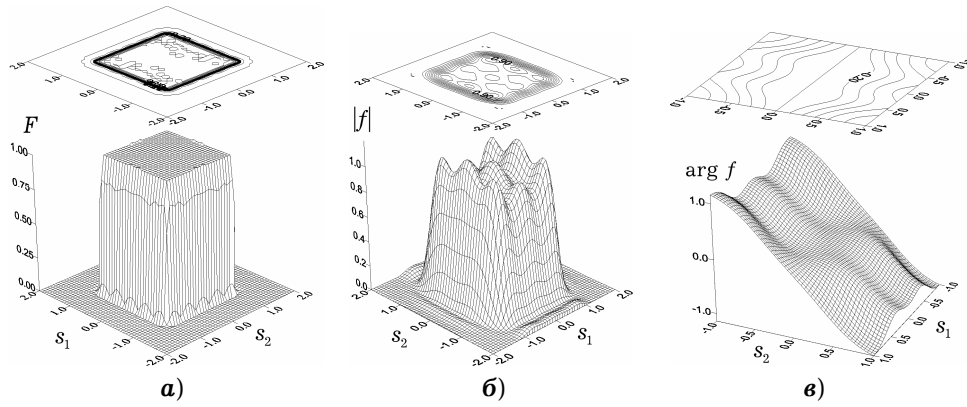


Рис. 2. ДН: **а)** – задана; **б)** – синтезована за потужністю; **в)** – фазова.

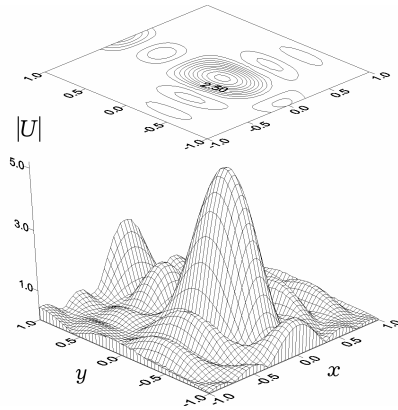


Рис. 3. Оптимальний АФР, що відповідає синтезованій ДН, наведеній на рис. 2б.

Розглянемо другий приклад синтезу плоского розкриву, що має еліптичну форму. Необхідна воронкоподібна ДН за потужністю задана формулою

$$N_0(s_1, s_2) = \begin{cases} 2\sqrt{(s_1^2 + s_2^2)} \sqrt{(1 - (s_1^2 + s_2^2))}, & (s_1^2 + s_2^2) \leq 1, \\ 0, & (s_1^2 + s_2^2) > 1, \end{cases}$$

i є парною за обома аргументами. Наведемо результати синтезу, що відповідають різним типам біфуркуючих розв'язків при $c_1 = c_2 = 8$. На рис. 4 наведено задану та синтезовану ДН, що відповідає розв'язку системи рівнянь (76) з непарною за обома аргументами функцією $\arg f(s_1, s_2)$.

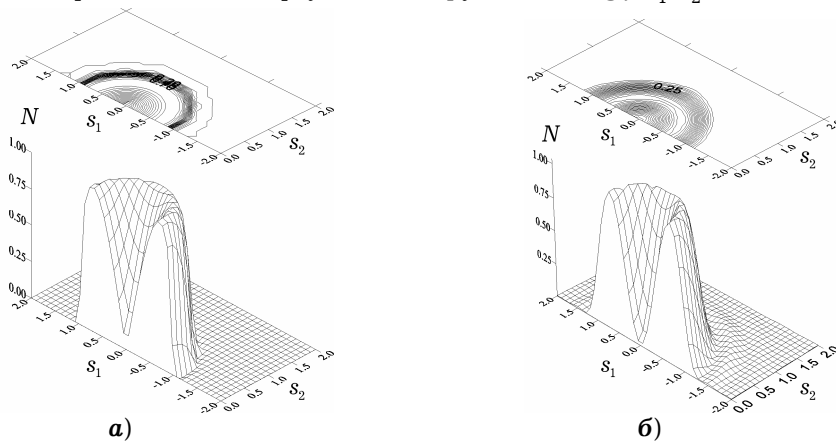


Рис. 4. Воронкоподібні ДН: **а)** – задана; **б)** – синтезована.

На рис 5 наведено різні розподіли АФР поля у розкритті, що відповідають різним типам розв'язків.

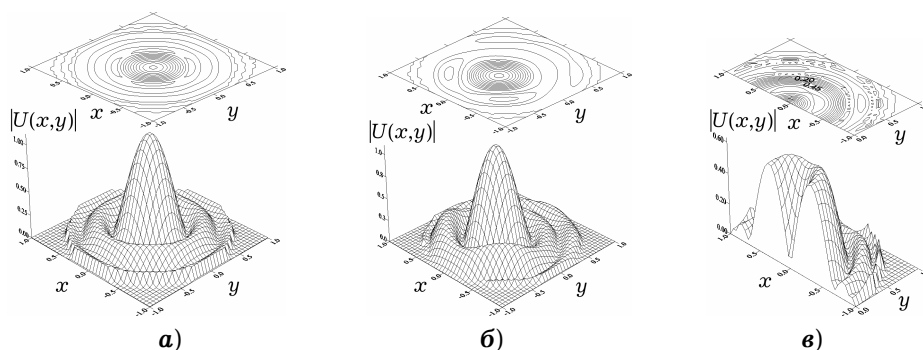


Рис. 5. АФР поля у розкритті, що відповідає різним типам розв'язків системи рівнянь (76).

Відмітимо, що наведеному на рис. 5а амплітудному розподілу поля у розкритті відповідає парна за обома аргументами фазова ДН $\arg f(s_1, s_2)$. В результаті амплітудний розподіл поля є симетричним відносно двох координатних осей. Наведеному на рис. 5б амплітудному розподілу поля відповідає непарна за аргументом s_2 функція $\arg f(s_1, s_2)$ і несиметричний відносно осі OY амплітудний розподіл поля у розкритті. На рис. 5в наведено амплітудний розподіл поля у розкритті, що відповідає непарній за обома аргументами фазовій ДН $\arg f(s_1, s_2)$, який суттєво відрізняється від розподілів, наведених на рис. 5а і 5б. Цьому розподілу власне й відповідає наведена на рис. 4б синтезована ДН.

Для оцінки ефективності наведених розподілів розглянемо відповідні їм синтезовані ДН, зображені на рис. 6 у перетині площиною $s_1 = 0$, де крива 1 відповідає заданій ДН, крива 2 – амплітудному розподілу поля, наведеному на рис. 5в, крива 3 – амплітудному розподілу поля, наведеному на рис. 5а, крива 4 – амплітудному розподілу поля, наведеному на рис. 5б. Із аналізу рисунка бачимо, що найбільш ефективним розв'язком є амплітудний розподіл поля, наведений на рис. 5в, оскільки відповідна йому синтезована ДН найкраще наближає задану ДН, особливо це видно в околі нульової точки.

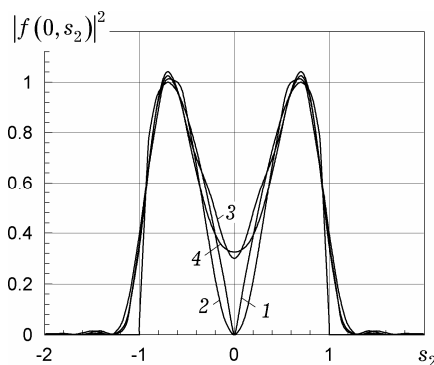


Рис. 6. Синтезовані ДН у перетині площиною $s_1 = 0$.

Висновки. У роботі показано, що для задач синтезу антен з плоским випромінюючим розкритвом є характерними неєдиність і біфуркація розв'язків, які залежать від двох фізичних параметрів, що характеризують розміри (в довжинах хвиль) розкритву та тілесний кут, де задано відмінну від тотожного нуля ДН за потужністю.

Запропоновано й обґрунтовано методики знаходження множини точок біфуркації та біфуркуючих розв'язків.

Запропоновано ітераційний процес для знаходження оптимальних розв'язків. Наведено числові приклади й проведено аналіз ефективності існуючих розв'язків.

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 527 с.
2. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др. Интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1968. – 448 с.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1977. – 742 с.
4. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 456 с.
5. Процак Л. П., Савенко П. О., Ткач М. Д. Метод неявної функції розв'язування задачі на власні значення з нелінійним двовимірним спектральним параметром // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 3. – С. 41–46.
6. Савенко П. А., Процак Л. П. Метод неявной функции в решении двумерной нелинейной спектральной проблемы // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 11 (546). – С. 41–44.
7. Савенко П. О. Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем (теорія і методи розв'язування). – Львів: ІППММ НАН України, 2002. – 320 с.
8. Савенко П. О. Синтез випромінюючих систем з плоским розкритом за заданою діаграмою напрямленості за потужністю. I. Знаходження множини точок біфуркації розв'язків // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 4. – С. 83–95.
9. Савенко П. О. Чисельний алгоритм розв'язування узагальненої задачі на власні значення для цілком неперервних самоспряжених операторів з нелінійним спектральним параметром // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 1. – С. 146–150.
10. Савенко П. О., Процак Л. П. Варіаційний підхід до розв'язання нелінійної векторної спектральної задачі для випадку самоспряжених додатно напіввизначених операторів // Доп. НАН України. – 2004. – № 6. – С. 26–31.

**СИНТЕЗ ИЗЛУЧАЮЩИХ СИСТЕМ С ПЛОСКИМ РАСКРЫВОМ
ПО ЗАДАННОЙ ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ ПО МОЩНОСТИ.
II. НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЙ В ТОЧКАХ БИФУРКАЦИИ**

Продолжается начатое в [8] исследование задачи синтеза излучающей системы с плоским раскрывом по заданной диаграмме направленности по мощности. Характерной особенностью задач этого класса является неединственность и бифуркация решений. На основе теории ветвления излагается методика нахождения (в первом приближении) отличных от нулевого решений, дающая возможность определить основные свойства решений, что в значительной степени упрощает нахождение оптимальных решений задачи синтеза численными методами.

**SYNTHESIS OF RADIATING SYSTEMS WITH A FLAT APERTURE
BY THE GIVEN POWER PATTERN DIRECTIVITY.
II. FINDING THE SOLUTIONS AT BIFURCATION POINTS**

The investigation of the synthesis problem of radiating system with a flat aperture according to the prescribed directivity pattern by power started in [8] is continued. The nonuniqueness and bifurcation of solutions are characteristic feature of this class of problems. On the base of branching theory the technique of finding (in the first approximation) the nonzero solutions is presented. This technique gives the possibility to determine the basic properties of solutions, what greatly simplifies finding the optimal solutions of synthesis problems by numerical methods.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
17.12.12