

**ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА**

Исследуется трехмерная задача теории упругости для прямоугольного параллелепипеда в случае установившихся вынужденных колебаний. С использованием метода суперпозиции проблема сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов двойных рядов Фурье. Для этой бесконечной системы доказывается выполнение условий квазирегулярности и существование ограниченного решения. Строится асимптотика, описывающая поведение неизвестных в бесконечной системе. Приводятся численные примеры.

Трехмерная задача для прямоугольного параллелепипеда относится к старейшим задачам теории упругости. Первую попытку решения этой задачи можно найти в классической работе *Lamé* [11]. Для решения задачи *Lamé* использовал метод, позже названный «*method of crosswise superposition*». Общее решение задачи строилось в виде набора частных решений уравнений равновесия в форме двойных рядов Фурье с неопределенными коэффициентами, однако сложность определения этих коэффициентов не позволила получить решение задачи. Непосредственно под влиянием *Lamé* в 1846 г. Академией наук в Париже для решения этой задачи был назначен *Grand Prix de Mathématiques*, который был пролонгирован до 1857 г. и отменен за отсутствием представленных решений.

В случае двумерной задачи, которая соответствует плоской деформации бесконечного в одном из направлений параллелепипеда или плоскому напряженному состоянию прямоугольной пластины, подход *Lamé* был развит как в статике, так и для вынужденных колебаний [1]. Для плоских статических задач история развития метода суперпозиции представлена в статьях [4, 12, 13].

К. Т. Sundara Raja Iyengar и М. К. Prabhakara [16] свели трехмерную статическую задачу теории упругости для прямоугольного параллелепипеда к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, которую решали методом простой редукции. Авторы провели проверку выполнения граничных условий, показывая, что увеличение порядка редуцируемой системы позволяет сделать выполнение граничных условий удовлетворительным. В работе J. A. Fromme, A. W. Leissa [9] исследован спектр собственных частот параллелепипеда, представлены численные результаты для двумерного случая. Собственные частоты получены как нули определителя редуцированной бесконечной матрицы. Для трехмерного случая подобный подход к решению задачи о свободных колебаниях представлен в статье J. R. Hutchinson, S. D. Zilmer [10].

Целью данной статьи является построение решения трехмерной задачи об установившихся вынужденных колебаниях прямоугольного параллелепипеда под действием граничных напряжений, исследование разрешимости и асимптотики решения соответствующей бесконечной системы.

Постановка задачи и общее решение. Рассмотрим установившиеся вынужденные колебания трехмерной призмы $(X, Y, Z) \in \{-h_1, h_1\} \times \{-h_2, h_2\} \times \{-h_3, h_3\}$ под действием приложенных к ее граням нагрузок. Вектор смещений $\mathbf{u} e^{-i\omega t}$ должен удовлетворять уравнению равновесия *Lamé* [1, 7]

$$(1 - 2\nu)\Delta \mathbf{u} + \text{grad div } \mathbf{u} + \frac{(1 - 2\nu)\rho\omega^2}{G} \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

где ν – коэффициент Пуассона материала, ρ – его плотность и G – модуль сдвига.

Выбрав в качестве характерного размера h_1 , введем безразмерные координаты и величины: $x = X/h_1$, $y = Y/h_1$, $z = Z/h_1$, $b = h_2/h_1$, $c = h_3/h_1$, и сформулируем следующую краевую задачу относительно безразмерного вектора смещений $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/h_1$:

$$\begin{aligned} \text{при } x = \pm 1: & \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xx} = F_1(y, z), \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xy} = 0, \quad \frac{1}{2G} \sigma_{xz} = 0, \\ \text{при } y = \pm b: & \quad \frac{1}{2G} \sigma_{yy} = F_2(x, z), \quad \frac{1}{2G} \sigma_{yx} = 0, \quad \frac{1}{2G} \sigma_{yz} = 0, \\ \text{при } z = \pm c: & \quad \frac{1}{2G} \sigma_{zz} = F_3(x, y), \quad \frac{1}{2G} \sigma_{zx} = 0, \quad \frac{1}{2G} \sigma_{zy} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Равенство нулю касательных напряжений позволяет несколько уменьшить объем формул, не меняя общности изложения. Функции F_j , задающие нормальные напряжения на границе, из этих же соображений выбираются четными.

Используем для вектора смещений разложение *Green – Lamé* через скалярный ϕ и векторный \mathbf{a} потенциалы:

$$\bar{\mathbf{u}} = \text{grad } \phi + \text{rot } \mathbf{a}, \quad (3)$$

которые удовлетворяют уравнениям Гельмгольца для продольной и поперечной составляющих поля:

$$\Delta \phi + \Omega_j^2 \phi = 0, \quad \Delta \mathbf{a} + \Omega_j^2 \mathbf{a} = 0, \quad (4)$$

где $\Omega_j = \frac{\omega h_1}{c_j}$, $j = 1, 2$, – безразмерные частоты; $c_1 = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}$ – скорость продольной волны; $c_2 = \sqrt{G/\rho}$ – скорость поперечной волны. Для полноты представления (3) используем дополнительное условие [1]:

$$\text{div } \mathbf{a} = 0. \quad (5)$$

В формулах потенциалов константы разделения α , β , γ могут быть выбраны произвольно, однако, следуя идее метода суперпозиции, эти величины выбираем как

$$\alpha_n = \pi n, \quad \beta_n = \frac{\pi n}{b}, \quad \gamma_n = \frac{\pi n}{c},$$

что позволяет получить выражения для смещений и напряжений в форме двойных рядов Фурье. Обозначив радикалы через

$$\begin{aligned} p_{nm,j} &= \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2 - \Omega_j^2}, \quad q_{nm,j} = \sqrt{\alpha_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_j^2}, \\ g_{nm,j} &= \sqrt{\beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_j^2}, \end{aligned}$$

по формулам (3) можно найти компоненты вектора смещений:

$$\begin{aligned} \bar{u}_x &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(-\alpha_n A_{nm}^1 \text{ch } p_{nm,1} z + \frac{\alpha_n \beta_m A_{nm}^2 - (\alpha_n^2 - \Omega_2^2) A_{nm}^3}{p_{nm,2}} \text{ch } p_{nm,2} z \right) \times \\ &\quad \times \sin \alpha_n x \cos \beta_m y + \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(-\alpha_n A_{nm}^5 \text{ch } q_{nm,1} y + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\alpha_n^2 - \Omega_2^2) A_{nm}^8 - \alpha_n \gamma_m A_{nm}^6}{q_{nm,2}} \text{ch } q_{nm,2} y \right) \sin \alpha_n x \cos \gamma_m z + \\ &\quad + \sum_{n,m=0}^{\infty} (g_{nm,1} A_{nm}^9 \text{sh } g_{nm,1} x + (\beta_n A_{nm}^{12} - \\ &\quad - \gamma_m A_{nm}^{11}) \text{sh } g_{nm,2} x) \cos \beta_n y \cos \gamma_m z, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_y = \sum_{n,m=0}^{\infty} & \left(-\beta_m A_{nm}^1 \operatorname{ch} p_{nm,1} z + \frac{(\beta_m^2 - \Omega_2^2) A_{nm}^2 - \alpha_n \beta_m A_{nm}^3}{p_{nm,2}} \operatorname{ch} p_{nm,2} z \right) \times \\ & \times \cos \alpha_n x \sin \beta_m y + \sum_{n,m=0}^{\infty} (q_{nm,1} A_{nm}^5 \operatorname{sh} q_{nm,1} y + \\ & + (\gamma_m A_{nm}^6 - \alpha_n A_{nm}^8) \operatorname{sh} q_{nm,2} y) \cos \alpha_n x \cos \gamma_m z + \\ & + \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(-\beta_n A_{nm}^9 \operatorname{ch} g_{nm,1} x + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma_m \beta_n A_{nm}^{11} - (\beta_n^2 - \Omega_2^2) A_{nm}^{12}}{g_{nm,2}} \operatorname{ch} g_{nm,2} x \right) \sin \beta_n y \cos \gamma_m z, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_z = \sum_{n,m=0}^{\infty} & (p_{nm,1} A_{nm}^1 \operatorname{sh} p_{nm,1} z + (\alpha_n A_{nm}^3 - \beta_m A_{nm}^2) \operatorname{sh} p_{nm,2} z) \times \\ & \times \cos \alpha_n x \cos \beta_m y + \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(-\gamma_m A_{nm}^5 \operatorname{ch} q_{nm,1} y + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_n \gamma_m A_{nm}^8 - (\gamma_m^2 - \Omega_2^2) A_{nm}^6}{q_{nm,2}} \operatorname{ch} q_{nm,2} y \right) \cos \alpha_n x \sin \gamma_m z + \\ & + \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(-\gamma_m A_{nm}^9 \operatorname{ch} g_{nm,1} x + \right. \\ & \left. + \frac{(\gamma_m^2 - \Omega_2^2) A_{nm}^{11} - \gamma_m \beta_n A_{nm}^{12}}{g_{nm,2}} \operatorname{ch} g_{nm,2} x \right) \cos \beta_n y \sin \gamma_m z. \quad (8) \end{aligned}$$

Компоненты вектора смещений, в свою очередь, позволяют найти компоненты тензора напряжений согласно известным формулам

$$\frac{\sigma_{\tau s}}{2G} = \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{\tau s} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_\tau}{\partial s} + \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial \tau} \right), \quad (9)$$

где $\delta_{\tau s}$ – символ Кронекера.

Выражения для компонентов смещений (6)–(8) удовлетворяют уравнению (1) при любых значениях неопределенных коэффициентов A_{nm}^j и обладают достаточным произволом для удовлетворения граничных условий (2). При этом качество полученного решения, аналогично двумерным задачам для прямоугольника, определяется точностью выполнения заданных граничных условий (2).

Сведение граничной задачи к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Выбор общего решения (6)–(8) позволяет точно выполнить граничные условия на касательные напряжения на всех гранях параллелепипеда. Действительно, рассмотрим совместно условия на гранях $x = \pm 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xy}}{2G} = \sum_{m,n=0}^{\infty} & \left(\beta_n g_{nm,1} A_{nm}^9 \operatorname{sh} g_{nm,1} + \left(\left(\beta_n^2 - \frac{1}{2} \Omega_2^2 \right) A_{nm}^{12} - \beta_n \gamma_m A_{nm}^{11} \right) \times \right. \\ & \left. \times \operatorname{sh} g_{nm,2} \right) \sin \beta_n y \cos \gamma_n z = 0, \\ \frac{\sigma_{xz}}{2G} = \sum_{m,n=0}^{\infty} & \left(\gamma_m g_{nm,1} A_{nm}^9 \operatorname{sh} g_{nm,1} + \left(\beta_n \gamma_m A_{nm}^{12} - \left(\gamma_m^2 - \frac{1}{2} \Omega_2^2 \right) A_{nm}^{11} \right) \times \right. \\ & \left. \times \operatorname{sh} g_{mn,2} \right) \cos \beta_n y \sin \gamma_m z = 0. \end{aligned}$$

Из полноты представления по двойному тригонометрическому ряду следует, что коэффициенты при каждом члене ряда должны быть равными нулю, откуда

$$A_{nm}^{11} = \frac{\gamma_m g_{nm,1}}{(\beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2/2)} \frac{\text{sh } g_{nm,1}}{\text{sh } g_{nm,2}} A_{nm}^9, \quad n = 0, 1, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

$$A_{nm}^{12} = -\frac{\beta_n g_{nm,1}}{(\beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2/2)} \frac{\text{sh } g_{nm,1}}{\text{sh } g_{nm,2}} A_{nm}^9, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Рассматривая выражения касательных напряжений на других гранях параллелепипеда, из условий на гранях $y = \pm b$ получаем соотношения

$$A_{nm}^6 = -\frac{\gamma_m q_{nm,1}}{(\alpha_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2/2)} \frac{\text{sh } q_{nm,1} b}{\text{sh } q_{nm,2} b} A_{nm}^5, \quad n = 0, 1, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

$$A_{nm}^8 = \frac{\alpha_n q_{nm,1}}{(\alpha_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2/2)} \frac{\text{sh } q_{nm,1} b}{\text{sh } q_{nm,2} b} A_{nm}^5, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (13)$$

а из условий на гранях $z = \pm c$ – соотношения

$$A_{nm}^2 = \frac{\beta_m p_{nm,1}}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2 - \Omega_2^2/2)} \frac{\text{sh } p_{nm,1} c}{\text{sh } p_{nm,2} c} A_{nm}^1, \quad n = 0, 1, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

$$A_{nm}^3 = -\frac{\alpha_n p_{nm,1}}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2 - \Omega_2^2/2)} \frac{\text{sh } p_{nm,1} c}{\text{sh } p_{nm,2} c} A_{nm}^1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots \quad (15)$$

Таким образом, компоненты вектора смещений и тензора напряжений можно выразить на основе (10)–(15) через три бесконечные матрицы A_{nm}^1 , A_{nm}^5 , A_{nm}^9 . Для определения этих величин используем условия на нормальные напряжения. Пусть заданные (2) граничные напряжения допускают разложение в ряды Фурье:

$$F_1(y, z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{nm,1} \cos \beta_n y \cos \gamma_m z,$$

$$F_2(x, z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{nm,2} \cos \alpha_n x \cos \gamma_m z,$$

$$F_3(x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{nm,3} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y.$$

Тогда граничные условия на нормальные напряжения дают на гранях параллелепипеда три функциональных уравнения. Раскладывая входящие в уравнения гиперболические функции в ряды Фурье и меняя порядок суммирования, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, связывающую искомые величины:

$$(1 - \nu)\Omega_1 \text{ctg } \Omega_1 x_{00} + \nu y_{00} + \nu z_{00} + \nu \Omega_1^2 \Omega_2^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_{j0} + y_{j0}}{\alpha_j (\alpha_j^2 - \Omega_1^2)} = (1 - 2\nu) f_{00,1},$$

$$\nu x_{00} + (1 - \nu) b \Omega_1 \text{ctg } \Omega_1 b y_{00} + \nu z_{00} + \nu \Omega_1^2 \Omega_2^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{j0} + z_{0j}}{\beta_j (\beta_j^2 - \Omega_1^2)} = (1 - 2\nu) f_{00,2},$$

$$\nu x_{00} + \nu y_{00} + (1 - \nu) c \Omega_1 \text{ctg } \Omega_1 c z_{00} + \nu \Omega_1^2 \Omega_2^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{0j} + y_{0j}}{\gamma_j (\gamma_j^2 - \Omega_1^2)} = (1 - 2\nu) f_{00,3},$$

$$\begin{aligned}
x_{nm} = & \frac{\Omega_1^2}{1-2\nu} \frac{\beta_n + \gamma_m}{\Delta_{nm,1}(2\beta_n^2 + 2\gamma_m^2 - \Omega_2^2)} \left(\frac{2\nu\delta_{m0}y_{00}}{\beta_n^2 - \Omega_1^2} + \frac{2\nu\delta_{n0}z_{00}}{\gamma_m^2 - \Omega_1^2} + \right. \\
& + \frac{\nu(1-\delta_{n0})(2-\delta_{m0})(2\beta_n^2 - \Omega_2^2)z_{0n}}{(\beta_n + \delta_{n0})(\beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_1^2)} + \\
& + \frac{\nu(1-\delta_{m0})(2-\delta_{n0})(2\gamma_m^2 - \Omega_2^2)y_{0m}}{(\gamma_m + \delta_{m0})(\beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_1^2)} + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2-\delta_{m0})\alpha_j^2 z_{jn}}{(\alpha_j + \beta_n)(\alpha_j^2 + \beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_1^2)} \left(\frac{2\gamma_m^2}{\alpha_j^2 + \beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2} + \right. \\
& + \left. \frac{\nu(2\beta_n^2 - \Omega_2^2)}{\alpha_j^2} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2-\delta_{n0})\alpha_j^2 y_{jm}}{(\alpha_j + \gamma_m)(\alpha_j^2 + \beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_1^2)} \times \\
& \times \left(\frac{2\beta_n^2}{\alpha_j^2 + \beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2} + \frac{\nu(2\gamma_m^2 - \Omega_2^2)}{\alpha_j^2} \right) + \\
& \left. + \frac{(-1)^{n+m}(1-2\nu)}{\Omega_1^2} f_{nm,1} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{nm} = & \frac{\Omega_1^2}{1-2\nu} \frac{\alpha_n + \gamma_m}{\Delta_{nm,2}(2\alpha_n^2 + 2\gamma_m^2 - \Omega_2^2)} \left(\frac{2\nu\delta_{m0}x_{00}}{\alpha_n^2 - \Omega_1^2} + \frac{2\nu\delta_{n0}z_{00}}{\gamma_m^2 - \Omega_1^2} + \right. \\
& + \frac{\nu(1-\delta_{n0})(2-\delta_{m0})(2\alpha_n^2 - \Omega_2^2)z_{0n}}{(\alpha_n + \delta_{n0})(\alpha_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_1^2)} + \\
& + \frac{\nu(1-\delta_{m0})(2-\delta_{n0})(2\gamma_m^2 - \Omega_2^2)x_{0m}}{(\gamma_m + \delta_{m0})(\alpha_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_1^2)} + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2-\delta_{m0})\beta_j^2 z_{nj}}{(\alpha_n + \beta_j)(\alpha_n^2 + \beta_j^2 + \gamma_m^2 - \Omega_1^2)} \left(\frac{2\gamma_m^2}{\alpha_n^2 + \beta_j^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2} + \right. \\
& + \left. \frac{\nu(2\alpha_n^2 - \Omega_2^2)}{\beta_j^2} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2-\delta_{n0})\beta_j^2 x_{jm}}{(\beta_j + \gamma_m)(\alpha_n^2 + \beta_j^2 + \gamma_m^2 - \Omega_1^2)} \times \\
& \times \left(\frac{2\alpha_n^2}{\alpha_n^2 + \beta_j^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2} + \frac{\nu(2\gamma_m^2 - \Omega_2^2)}{\beta_j^2} \right) + \\
& \left. + \frac{(-1)^{n+m}(1-2\nu)}{\Omega_1^2} f_{nm,2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{nm} = & \frac{\Omega_1^2}{1-2\nu} \frac{\alpha_n + \beta_m}{\Delta_{nm,3}(2\alpha_n^2 + 2\beta_m^2 - \Omega_2^2)} \left(\frac{2\nu\delta_{m0}x_{00}}{\alpha_n^2 - \Omega_1^2} + \frac{2\nu\delta_{n0}y_{00}}{\beta_m^2 - \Omega_1^2} + \right. \\
& + \frac{\nu(1-\delta_{n0})(2-\delta_{m0})(2\alpha_n^2 - \Omega_2^2)y_{n0}}{(\alpha_n + \delta_{n0})(\alpha_n^2 + \beta_m^2 - \Omega_1^2)} + \\
& + \frac{\nu(1-\delta_{m0})(2-\delta_{n0})(2\beta_m^2 - \Omega_2^2)x_{m0}}{(\beta_m + \delta_{m0})(\alpha_n^2 + \beta_m^2 - \Omega_1^2)} + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2-\delta_{m0})\gamma_j^2 y_{nj}}{(\alpha_n + \gamma_j)(\alpha_n^2 + \beta_m^2 + \gamma_j^2 - \Omega_1^2)} \left(\frac{2\beta_m^2}{\alpha_n^2 + \beta_m^2 + \gamma_j^2 - \Omega_2^2} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{v(2\alpha_n^2 - \Omega_2^2)}{\gamma_j^2} \Big) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{n0})\gamma_j^2 x_{mj}}{(\beta_m + \gamma_j)(\alpha_n^2 + \beta_m^2 + \gamma_j^2 - \Omega_1^2)} \times \\
& \times \left(\frac{2\alpha_n^2}{\alpha_n^2 + \beta_m^2 + \gamma_j^2 - \Omega_2^2} + \frac{v(2\beta_m^2 - \Omega_2^2)}{\gamma_j^2} \right) + \\
& + \frac{(-1)^{n+m}(1-2v)}{\Omega_1^2} f_{nm,3} \Big). \tag{16}
\end{aligned}$$

Первые три уравнения системы соответствуют равенствам при постоянных составляющих нормальных нагрузок $m = n = 0$. Другие уравнения (16) соответствуют значениям индексов $m + n \neq 0$. При записи бесконечной системы приняты обозначения

$$\Delta_{nm,1} = \frac{\beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2/2}{g_{nm,1}} \operatorname{cth} g_{nm,1} - \frac{(\beta_n^2 + \gamma_m^2)g_{nm,2}}{\beta_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2/2} \operatorname{cth} g_{nm,2}, \tag{17}$$

$$\Delta_{nm,2} = b \left(\frac{\alpha_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2/2}{q_{nm,1}} \operatorname{cth} q_{nm,1} b - \frac{(\alpha_n^2 + \gamma_m^2)q_{nm,2}}{\alpha_n^2 + \gamma_m^2 - \Omega_2^2/2} \operatorname{cth} q_{nm,2} b \right), \tag{18}$$

$$\Delta_{nm,3} = c \left(\frac{\alpha_n^2 + \beta_m^2 - \Omega_2^2/2}{p_{nm,1}} \operatorname{cth} p_{nm,1} c - \frac{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)p_{nm,2}}{\alpha_n^2 + \beta_m^2 - \Omega_2^2/2} \operatorname{cth} p_{nm,2} c \right). \tag{19}$$

Введенные неизвестные x_{nm} , y_{nm} , z_{nm} позволяют выразить A_{nm}^1 , A_{nm}^5 , A_{nm}^9 согласно формул

$$A_{nm}^1 = \frac{(-1)^{n+m}(2\alpha_n^2 + 2\beta_m^2 - \Omega_2^2)c}{(\alpha_n + \beta_m)p_{nm,1} \operatorname{sh} p_{nm,1} c} z_{nm}, \quad n + m \neq 0,$$

$$A_{00}^1 = -\frac{cz_{00}}{\Omega_1 \sin \Omega_1 c}, \tag{20}$$

$$A_{nm}^5 = \frac{(-1)^{n+m}(2\alpha_n^2 + 2\gamma_m^2 - \Omega_2^2)b}{(\alpha_n + \gamma_m)q_{nm,1} \operatorname{sh} q_{nm,1} b} y_{nm}, \quad n + m \neq 0,$$

$$A_{00}^5 = -\frac{by_{00}}{\Omega_1 \sin \Omega_1 b}, \tag{21}$$

$$A_{nm}^9 = \frac{(-1)^{n+m}(2\beta_n^2 + 2\gamma_m^2 - \Omega_2^2)}{(\beta_n + \gamma_m)g_{nm,1} \operatorname{sh} g_{nm,1}} x_{nm}, \quad n + m \neq 0,$$

$$A_{00}^9 = -\frac{x_{00}}{\Omega_1 \sin \Omega_1}. \tag{22}$$

Регулярность и разрешимость бесконечной системы. Бесконечная система

$$Z_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} Z_n + F_m, \quad m = 1, 2, \dots, \tag{23}$$

удовлетворяет условиям регулярности, если выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}| = 1 - \rho_m < 1, \quad m = 1, 2, \dots \tag{24}$$

В этом случае в пространстве ограниченных последовательностей l_{∞} бесконечная матрица системы (23) представляет собой сжимающий оператор и при некоторых условиях на свободные члены системы можно гарантировать сходимость процесса последовательных приближений к ограниченному решению системы, которое называют главным решением. В ка-

честве условия на свободные члены выступает [2, 3] условие

$$|F_m| \leq B\rho_m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (25)$$

где B – некоторая положительная константа.

Выполнение условий (23)–(25) дает возможность также гарантировать сходимость к главному решению системы метода простой редукции, который заключается в отбрасывании из системы всех уравнений с номерами, большими некоторого выбранного N , при этом все неизвестные с номерами, большими чем N , полагаются нулями, то есть приближенно полагают $Z_m \approx Z_m^R$, где

$$Z_m^R = \sum_{n=1}^N M_{mn} Z_n^R + F_m, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad Z_m^R = 0, \quad m > N. \quad (26)$$

Этот метод наиболее часто используется при решении бесконечных систем, в том числе и нерегулярных, для статической трехмерной задачи он используется в [16].

Если условие (24) выполняется с некоторого номера $m > N_R$, то бесконечная система называется квазирегулярной и ее исследование [2] можно свести к исследованию конечной системы порядка N_R . В задачах динамики упругого тела, в частности в задачах о вынужденных установившихся колебаниях, бесконечные системы в принципе не могут быть регулярными, так как в окрестности собственных частот колебаний все компоненты тензора напряжений неограниченно возрастают вместе с решением соответствующей бесконечной системы.

В статье [5] были доказаны достаточные условия существования ограниченного решения для квазирегулярной бесконечной системы:

Теорема. *Бесконечная система вида (23) имеет ограниченное решение, если ее коэффициенты и свободные члены при заданном значении N удовлетворяют условиям*

$$(i) \quad \det[\delta_{kn} - M_{kn}]_{k,n=1}^N \neq 0;$$

$$(ii) \quad \max_{j=1,\dots,N} \sum_{i=1}^N |c_{ji}| \sum_{n=N+1}^{\infty} |M_{in}| < 1 + \inf_{k>N} \left(\rho_k \frac{1}{\sum_{n=1}^N |M_{kn}|} \right);$$

$$(iii) \quad |F_k| < B_N \sum_{n=1}^N |M_{kn}|, \quad k = N+1, N+2, \dots,$$

где $\{c_{kn}\}_{k,n=1}^N$ – матрица, обратная к матрице $\{\delta_{kn} - M_{kn}\}_{k,n=1}^N$.

Представленные в теореме условия позволяют сделать вывод о разрешимости системы на основе обращения конечной матрицы и аналитического суммирования рядов в условиях регулярности (24).

Отдельно следует выделить вопрос о единственности решения бесконечной системы и, как следствие, о правомерности такого подхода к решению краевой задачи. Во многих работах проблема единственности ограниченного решения вообще не поднимается или же вызывает дискуссию (например, в задаче об изгибе прямоугольной пластины V. V. Meleshko, A. M. Gornilko [13, 14] и A. M. Y. Devis [8]). В теории бесконечных систем [2, 3] доказывается существование единственного ограниченного решения системы при выполнении более строгого, чем (24), условия вполне регулярности

$$\sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}| = 1 - \rho_m \leq \theta < 1, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

где θ – некоторая положительная константа.

Если условия вполне регулярности (27) выполняются с некоторого номера $m > N_R$ и квазирегулярная бесконечная система удовлетворяет условиям приведенной теоремы, то ее ограниченное решение также единственно (этот факт является следствием того, что после явного исключения первых N неизвестных бесконечная система является вполне регулярной [15]).

Запишем бесконечную систему (16) в виде (23). Для этого, вводя обозначения для соответствующих коэффициентов при неизвестных и для свободных членов, представим ее в виде

$$\begin{aligned} x_{nm} &= \sum_{j=0}^{\infty} (a_{nmj}^x z_{jn} + b_{nmj}^x y_{jm}) + F_{nm}^x, \\ y_{nm} &= \sum_{j=0}^{\infty} (a_{nmj}^y z_{nj} + b_{nmj}^y x_{jm}) + F_{nm}^y, \\ z_{nm} &= \sum_{j=0}^{\infty} (a_{nmj}^z y_{nj} + b_{nmj}^z x_{mj}) + F_{nm}^z, \quad n, m = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (28)$$

Оценим регулярность исследуемой бесконечной системы на основе значения известного ряда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+\alpha)(j^2+p^2)} &= \\ &= \frac{\psi(1+ip)(1-i\alpha/p) + \psi(1-ip)(1+i\alpha/p) - 2\psi(1+\alpha)}{2(\alpha^2+p^2)}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\psi(z)$ – дигамма-функция.

Тогда в условиях регулярности (24) значения рядов можно вычислить точно для любых n, m . Нас интересует оценка регулярности, когда хотя бы один из этих индексов неограниченно возрастает, например n . Тогда предположим, что второй индекс m связан с n линейно, то есть переходя к пределу в значениях этих рядов, полагаем

$$\gamma_m = \alpha_x \beta_n, \quad \gamma_m = \alpha_y \alpha_n, \quad \beta_m = \alpha_z \alpha_n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Такой подход позволяет найти, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} (|a_{nmj}^{\mu}| + |b_{nmj}^{\mu}|) = R(\alpha_{\mu}), \quad \mu \in \{x, y, z\}. \quad (30)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{2(1+x)}{\sqrt{1+x^2}} \left(\frac{(1+v)x^2 + 2v}{\pi(2+x^2)^2} \left(\ln(1+x^2) + \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}} \right) + \right. \\ &\quad + \frac{(1+v+2vx^2)x^2}{\pi(1+2x^2)^2} \left(\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\pi x}{\sqrt{1+x^2}} \right) + \frac{x^2}{\pi(2+x^2)} - \\ &\quad \left. - \frac{x^2}{2(2+x^2)\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\pi(1+2x^2)} - \frac{x}{2(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}} \right). \end{aligned}$$

Функция $R(x)$ не зависит от отношения сторон призмы, а только от коэффициента Пуассона v . В частности, для $v = 0.25$ ее максимальное значение достигается при $x = 1$ и равно $R_{\max} = 0.954$, что говорит о квазирегулярности системы. Более того, так как для любых соотношений n и m предельное значение удовлетворяет условию (27), то из выполнения условий предложенной выше теоремы следует существование и единственность ограниченного решения. Аналогичная ситуация наблюдается и для других значений коэффициента Пуассона.

При проверке условий теоремы наиболее существенным является проверка условия (ii), так как его выполнение, по сути, эквивалентно регулярности бесконечной системы после явного исключения первых неизвестных.

На рис. 1 для куба с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.25$ показана разность между правой и левой частью неравенства (ii):

$$T(\Omega) = 1 + \inf_{k > N} \left(\rho_k \frac{1}{\sum_{n=1}^N |M_{kn}|} \right) - \max_{j=1, \dots, N} \sum_{i=1}^N |c_{ji}| \sum_{n=N+1}^{\infty} |M_{in}| \quad (31)$$

при изменении безразмерной частоты колебаний $\Omega = \frac{2\omega h_1}{\pi c_2}$. Номер N выбирали как номер N_R , начиная с которого выполняются условия регулярности.

Можно увидеть, что на достаточно большом диапазоне частот выполняется условие теоремы $T(\Omega) > 0$, что при непрерывной нормальной нагрузке приведет к выполнению условия (ii) и существованию для системы единственного ограниченного решения. На рис. 1 три интервала $T(\Omega) < 0$ соответствуют собственным частотам параллелепипеда.

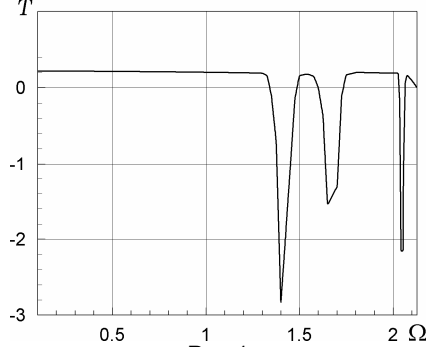


Рис.1

Асимптотика решения бесконечной системы. Чтобы сделать более эффективной численную процедуру нахождения решения (16), найдем аналитически его асимптотику. Для этого используем тот факт, что если четная по обеим координатам функция двух переменных $U(x, y)$ ($(x, y) \in [-1, 1] \times [-b, b]$) достаточно гладкая, то для ее коэффициентов Фурье U_{nm} при больших значениях одного или обоих индексов справедлива следующая асимптотическая формула [6]:

$$U_{nm} = (-1)^{n+m+1} \alpha_n^{-2} \beta_m^{-2} G_{nm}, \quad (32)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_{nm} = G_m^c, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} G_{nm} = G_n^r, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G_n^r = \lim_{m \rightarrow \infty} G_m^c = G. \quad (33)$$

В таком случае бесконечную матрицу коэффициентов двойного ряда Фурье можно приближенно описать конечной матрицей, полагая для индексов, больших N :

$$G_{nm} = \begin{cases} G_m^c, & n > N, \quad m = 0, 1, \dots, N, \\ G_n^r, & m > N, \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ G, & n > N, \quad m > N. \end{cases} \quad (34)$$

Решение бесконечной системы x_{nm} , y_{nm} , z_{nm} позволяет найти все компоненты вектора смещений и тензора напряжений согласно формулам (6)–(8) и (10)–(15). В частности, для нормальных смещений на гранях параллелепипеда получаем

$$\bar{u}_x(\pm 1, y, z) = x_{00} + \sum_{n+m \neq 0} \frac{(-1)^{n+m+1} x_{nm} \Omega_2^2}{\beta_n + \gamma_m} \cos \beta_n y \cos \gamma_m z,$$

откуда следует асимптотика для неизвестных

$$x_{nm} = \begin{cases} \frac{G_m^{1c} (\beta_n + \gamma_m)}{\beta_n^2 (\gamma_m^2 + \delta_{m0})}, & n > N, \quad m = 0, 1, \dots, N, \\ \frac{G_n^{1r} (\beta_n + \gamma_m)}{(\beta_n^2 + \delta_{n0}) \gamma_m^2}, & m > N, \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ \frac{G_1 (\beta_n + \gamma_m)}{\beta_n^2 \gamma_m^2}, & n > N, \quad m > N. \end{cases}$$

Аналогично, рассматривая другие нормальные смещения, находим

$$y_{nm} = \begin{cases} \frac{G_m^{2c}(\alpha_n + \gamma_m)}{\alpha_n^2(\gamma_m^2 + \delta_{m0})}, & n > N, \quad m = 0, 1, \dots, N, \\ \frac{G_n^{2r}(\alpha_n + \gamma_m)}{(\alpha_n^2 + \delta_{n0})\gamma_m^2}, & m > N, \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ \frac{G_2(\alpha_n + \gamma_m)}{\alpha_n^2\gamma_m^2}, & n > N, \quad m > N, \end{cases}$$

$$z_{nm} = \begin{cases} \frac{G_m^{3c}(\alpha_n + \beta_m)}{\alpha_n^2(\beta_m^2 + \delta_{m0})}, & n > N, \quad m = 0, 1, \dots, N, \\ \frac{G_n^{3r}(\alpha_n + \beta_m)}{(\alpha_n^2 + \delta_{n0})\beta_m^2}, & m > N, \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ \frac{G_3(\alpha_n + \beta_m)}{\alpha_n^2\beta_m^2}, & n > N, \quad m > N. \end{cases} \quad (35)$$

Формулы (35) позволяют аналитически свернуть остатки рядов в выражениях напряжений и исследовать их поведение на границе. Рассмотрим более подробно выражение $\sigma_x(\pm 1, y, z)$, которое после использования асимптотик (35) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}}{2G} \Big|_{x=\pm 1} &= -\frac{1-\nu}{1-2\nu} x_{00} \operatorname{ctg} \Omega_1 - \frac{\nu b y_{00} \cos \Omega_1 y}{(1-2\nu) \sin \Omega_1 b} - \frac{\nu c z_{00} \cos \Omega_1 z}{(1-2\nu) \sin \Omega_1 c} + \\ &+ \sum_{n+m \neq 0}^N \frac{(-1)^{n+m} x_{nm}}{\beta_n + \gamma_m} \left(\frac{(2\beta_n^2 + 2\gamma_m^2 - \Omega_2^2)^2}{2g_{nm,1}} \operatorname{cth} g_{nm,1} - \right. \\ &\left. - 2(\beta_n^2 + \gamma_m^2) g_{nm,2} \operatorname{cthg}_{nm,2} \right) \cos \beta_n y \cos \gamma_m z + \\ &+ b \sum_{n+m \neq 0}^N \frac{(-1)^m y_{nm}}{\alpha_n + \gamma_m} \left(2q_{nm,2} \alpha_n^2 \frac{\operatorname{ch} q_{nm,2} y}{\operatorname{sh} q_{nm,2} b} - (2\alpha_n^2 + \right. \\ &\left. + 2\gamma_m^2 - \Omega_2^2) \left(\alpha_n^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu} \right) \frac{\operatorname{ch} q_{nm,1} y}{q_{nm,1} \operatorname{sh} q_{nm,1} b} \right) \cos \gamma_m z + \\ &+ c \sum_{n+m \neq 0}^N \frac{(-1)^m z_{nm}}{\alpha_n + \beta_m} \left(2p_{nm,2} \alpha_n^2 \frac{\operatorname{ch} p_{nm,2} z}{\operatorname{sh} p_{nm,2} c} - (2\alpha_n^2 + \right. \\ &\left. + 2\beta_m^2 - \Omega_2^2) \left(\alpha_n^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu} \right) \frac{\operatorname{ch} p_{nm,1} z}{p_{nm,1} \operatorname{sh} p_{nm,1} c} \right) \cos \beta_m y + \\ &+ S_1(y, z) + bS_2(y, z) + cS_3(y, z), \end{aligned}$$

где S_i , $i = 1, 2, 3$, – остатки соответственно первого, второго и третьего рядов. Используя значение ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx} \cos ny}{n} = \frac{x - \ln 2(\cosh x + \cos y)}{2}, \quad \operatorname{Re} x > 0, \quad (36)$$

а также приближенные равенства при $z > 0$, $m + n > N$:

$$\begin{aligned} 2p_{nm,2} \alpha_n^2 \frac{\operatorname{ch} p_{nm,2} z}{\operatorname{sh} p_{nm,2} c} - (2\alpha_n^2 + 2\beta_m^2 - \Omega_2^2) \left(\alpha_n^2 + \frac{\nu \Omega_1^2}{1-2\nu} \right) \frac{\operatorname{ch} p_{nm,1} z}{p_{nm,1} \operatorname{sh} p_{nm,1} c} \approx \\ \approx \frac{\Omega_1^2}{1-2\nu} e^{-\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2} (c-z)} \alpha_n^2 \times \\ \times \left(\frac{(\alpha_n^2 - \nu)(c-z) - 2\nu \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2}}{\alpha_n^2} - \frac{1-2\nu}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(2\beta_n^2 + 2\gamma_m^2 - \Omega_2^2)^2}{2g_{nm,1}} \operatorname{cth} g_{nm,1} - 2(\beta_n^2 + \gamma_m^2)g_{nm,2} \operatorname{cth} g_{nm,2} \approx \\ & \approx -\frac{\Omega_1^2}{1-2\nu} \sqrt{\beta_n^2 + \gamma_m^2} \left(1 - \frac{\Omega_1^2}{2(1-2\nu)(\beta_n^2 + \gamma_m^2)} \right), \end{aligned}$$

можно убедиться, что при приближении к ребру параллелепипеда $z \rightarrow c$ ряды S_1 и S_3 содержат особенности логарифмического типа:

$$S_1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n G_n^{1r}}{\beta_n^2 + \delta_{n0}} \cos \beta_n y \right) \frac{\Omega_1^2 c}{(1-2\nu)2\pi} \ln(\cos(\pi z/c) + 1) + O(1), \quad (37)$$

$$S_3 = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m G_m^{3c}}{\beta_m^2 + \delta_{m0}} \cos \beta_m y \right) \frac{\Omega_1^2}{(1-2\nu)2\pi} \ln(\operatorname{ch} \pi(c-z) - 1) + O(1). \quad (38)$$

Тогда выражение для напряжений вблизи ребра $x = \pm 1$, $z \rightarrow c$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}}{2G} &= S_1 + cS_3 + O(1) = \\ &= \frac{\Omega_1^2 c}{(1-2\nu)2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (G_n^{1r} + G_n^{3c})}{\beta_n^2 + \delta_{n0}} \cos \beta_n y \right) \ln(\operatorname{ch} \pi(c-z) - 1) + \\ &+ \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n G_n^{1r}}{\beta_n^2 + \delta_{n0}} \cos \beta_n y \right) \ln \frac{\cos(\pi z/c) + 1}{\operatorname{ch} \pi(c-z) - 1} + O(1). \end{aligned}$$

Но, учитывая конечное значение предела

$$\lim_{z \rightarrow c} \ln \frac{\cos(\pi z/c) + 1}{\operatorname{ch} \pi(c-z) - 1} = 2 \ln c \quad (39)$$

и тот факт, что напряжения не имеют особенностей, получаем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (G_n^{1r} + G_n^{3c})}{\beta_n^2 + \delta_{n0}} \cos \beta_n y \equiv 0.$$

В силу полноты тригонометрической системы функций следует соотношение

$$G_m^{1r} = -G_m^{3c}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (40)$$

Рассматривая $\sigma_x(\pm 1, y, z)$ при $y \rightarrow b$, аналогичным образом можно найти

$$G_m^{1c} = -G_m^{2c}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (41)$$

Поведение напряжений $\sigma_y(x, \pm b, z)$ и $\sigma_z(x, y, \pm c)$ вблизи ребер дает подобные соотношения при $m = 0, 1, \dots$:

$$G_m^{2c} = -G_m^{1c}, \quad G_m^{3r} = -G_m^{2r}, \quad (42)$$

$$G_m^{3c} = -G_m^{1r}, \quad G_m^{2r} = -G_m^{3r}. \quad (43)$$

Заметим, что если в одном из направлений размер параллелепипеда достаточно велик, то известно, что напряженно-деформированное состояние адекватно описывается моделью плоской деформации. В этом случае из формул для напряжений можно получить решение для двумерного прямоугольника. В частности, для бесконечного вдоль оси Oz параллелепипеда получаем компоненты тензора напряжений в форме

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}^P}{2G} &= -\frac{1-\nu}{1-2\nu} x_{00} \frac{\cos \Omega_1 x}{\sin \Omega_1} - \frac{\nu b y_{00} \cos \Omega_1 y}{(1-2\nu) \sin \Omega_1 b} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2\beta_n x_{n0} \times \\ &\times \left(g_{n0,2} \frac{\operatorname{ch} g_{n0,2} x}{\operatorname{sh} g_{n0,2}} - \frac{(2\beta_n^2 - \Omega_2^2)^2}{4\beta_n^2 g_{n0,1}} \frac{\operatorname{ch} g_{n0,1} x}{\operatorname{sh} g_{n0,1}} \right) \cos \beta_n y + \end{aligned}$$

$$+ b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2\alpha_n y_{n0} \left(q_{n0,2} \frac{\operatorname{ch} q_{n0,2} y}{\operatorname{sh} q_{n0,2} b} - \left(\alpha_n^2 + \frac{v\Omega_1^2}{1-2v} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{2\alpha_n^2 - \Omega_2^2}{2\alpha_n^2 q_{n0,1}} \frac{\operatorname{ch} q_{n0,1} y}{\operatorname{sh} q_{n0,1} b} \right) \cos \alpha_n x, \quad (44)$$

$$\frac{\sigma_{yy}^P}{2G} = -\frac{v}{1-2v} x_{00} \frac{\cos \Omega_1 x}{\sin \Omega_1} - \frac{(1-v)by_{00} \cos \Omega_1 y}{(1-2v) \sin \Omega_1 b} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2\beta_n x_{n0} \times \\ \times \left(g_{n0,2} \frac{\operatorname{ch} g_{n0,2} x}{\operatorname{sh} g_{n0,2}} - \left(\beta_n^2 + \frac{v\Omega_1^2}{1-2v} \right) \frac{2\beta_n^2 - \Omega_2^2}{2\beta_n^2 g_{n0,1}} \frac{\operatorname{ch} g_{n0,1} x}{\operatorname{sh} g_{n0,1}} \right) \cos \beta_n y - \\ - b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2\alpha_n y_{n0} \left(q_{n0,2} \frac{\operatorname{ch} q_{n0,2} y}{\operatorname{sh} q_{n0,2} b} - \right. \\ \left. - \frac{(2\alpha_n^2 - \Omega_2^2)^2}{4\alpha_n^2 q_{n0,1}} \frac{\operatorname{ch} q_{n0,1} y}{\operatorname{sh} q_{n0,1} b} \right) \cos \alpha_n x, \quad (45)$$

$$\frac{\sigma_{xy}^P}{2G} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_{n0} (2\beta_n^2 - \Omega_2^2) \left(\frac{\operatorname{sh} g_{n0,1} x}{\operatorname{sh} g_{n0,1}} - \frac{\operatorname{sh} g_{n0,2} x}{\operatorname{sh} g_{n0,2}} \right) \sin \beta_n y - \\ - b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_{n0} (2\alpha_n^2 - \Omega_2^2) \left(\frac{\operatorname{sh} q_{n0,1} y}{\operatorname{sh} q_{n0,1} b} - \frac{\operatorname{sh} q_{n0,2} y}{\operatorname{sh} q_{n0,2} b} \right) \sin \alpha_n x. \quad (46)$$

Эта задача была изучена в работе [1] на основе метода суперпозиции. Сверяя коэффициенты рядов в формулах (44)–(46) с упомянутым решением для плоской задачи, можно найти, что эти решения идентичны, если положить коэффициенты z_m , x_m из [1] равными соответственно $2\beta_m x_{m0}$ и $2\alpha_m y_{m0}$. Заметим, что бесконечная система (16) в случае плоской деформации (отличны от нуля только x_{m0} и y_{m0}) также оказывается совпадающей с бесконечной системой из [1]. С использованием теории лимитант Кояловича [3] для решения бесконечной системы относительно z_m , x_m доказываем существование общего предела

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = -\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = a_0, \quad (47)$$

зависящего от частоты и вида нагрузки. Там же с использованием предельного соотношения (47) для решения соответствующей бесконечной системы предлагается эффективный численный алгоритм, названный методом улучшенной редукции.

Если воспользоваться асимптотикой (35), можно увидеть, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n x_{n0} = G_0^{1c} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n y_{n0} = G_0^{2c}.$$

Но из равенств (35) следует $G_0^{1c} = -G_0^{2c}$, то есть полученная асимптотика полностью совпадает с асимптотикой (47) в случае плоской деформации.

Аналогично плоской задаче, на основе полученной асимптотики строится алгоритм улучшенной редукции для решения бесконечной системы (16).

Численные результаты. В качестве первого примера рассмотрим куб $b = c = 1$, нагруженный по граням равными постоянными нормальными нагрузками:

$$\frac{1}{2G} \sigma_{xx} \Big|_{x=\pm 1} = \frac{1}{2G} \sigma_{yy} \Big|_{y=\pm 1} = \frac{1}{2G} \sigma_{zz} \Big|_{z=\pm 1} = P, \quad (48)$$

полагая все касательные напряжения в (2) равными нулю.

В силу полной симметрии задачи значения неизвестных в бесконечной системе будут симметричны: $x_{nm} = x_{mn} = y_{nm} = y_{mn} = z_{nm} = z_{mn}$. Значения

предельных констант G_m равны нулю в силу полной симметрии. Таким образом, в рассматриваемом примере метод простой редукции будет давать те же значения неизвестных, что и метод улучшенной редукции.

В табл. 1 для этого примера представлена проверка граничного условия $\sigma_{xx}/2GP = 1$ при $x = 1$ на частоте $\Omega = 0.5$.

Таблица 1

| $y_j \backslash z_i$ | 0.0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0.0 | 1.000311 | 1.000126 | 0.999993 | 1.000268 | 1.000210 | 1.000014 |
| 0.2 | 1.000126 | 0.999937 | 0.999806 | 1.000106 | 1.000089 | 0.999872 |
| 0.4 | 0.999993 | 0.999806 | 0.999676 | 0.999986 | 1.000009 | 0.999756 |
| 0.6 | 1.000268 | 1.000106 | 0.999986 | 1.000224 | 1.000195 | 0.999949 |
| 0.8 | 1.000210 | 1.000089 | 1.000009 | 1.000195 | 1.000140 | 0.999988 |
| 1.0 | 1.000014 | 0.999872 | 0.999756 | 0.999949 | 0.999988 | 0.999951 |

Как видим, удержание в конечной системе всего 9 уравнений и неизвестных дает возможность получить отличное выполнение граничных условий, включая ребра и угол куба. Повышая порядок системы, можно добиться выполнения граничных условий с еще большей точностью. Напряжения в задаче меняются мало, достигая своих наибольших значений в центре куба. Эти значения превосходят граничные напряжения не более чем на 8%. Очевидно, что относительно небольшие значения напряжений и хорошее выполнение граничных условий оказываются возможными в этом примере благодаря полной симметрии и достаточному удалению частоты колебаний $\Omega = 0.5$ от собственной частоты $\Omega_1^L = \sqrt{2} = 1.414\dots$, которая совпадает здесь с частотой моды Ламе.

В качестве второго примера рассмотрим куб $b = c = 1$, нагруженный только по паре противоположных граней равными постоянными нормальными нагрузками:

$$\frac{1}{2G} \sigma_{xx} \Big|_{x=\pm 1} = P, \quad \frac{1}{2G} \sigma_{yy} \Big|_{y=\pm 1} = \frac{1}{2G} \sigma_{zz} \Big|_{z=\pm 1} = 0, \quad (49)$$

на частоте колебаний $\Omega = 1.5$, которая всего на 6% отличается от собственной частоты. Все касательные напряжения в (2) опять полагаем равными нулю.

В этом примере симметрия задачи относительно осей Oy и Oz выражается в равенстве неизвестных $y_{nm} = z_{nm}$ и $x_{nm} = x_{mn}$. При решении системы из-за близости резонанса удерживается 100 уравнений. Значения первых неизвестных, полученные методами улучшенной и простой редукции, отличаются незначительно. Тем не менее, существенным является тот факт, что предельные константы (40)–(43) в этом примере по методу улучшенной редукции оказываются отличными от нуля (табл. 2), в то время, как по методу простой редукции все они полагаются нулями.

Для примера (49) в силу симметрии предельные константы $G_m^{1c} = G_m^{1r} = -G_m^{2c} = -G_m^{3c} \neq 0$, а константы $G_m^{2r} = G_m^{3r} = 0$. Найденные значения неизвестных позволяют проверить выполнение граничных условий $\frac{1}{2GP} \sigma_{xx} \Big|_{x=\pm 1} = 1$ задачи (49) для напряжений без улучшения сходимости (табл. 3) и с улучшением сходимости рядов в выражениях напряжений (табл. 4).

Таблица 2

| m | $G_m^{1c} = G_m^{1r} = -G_m^{2c} = -G_m^{3c}$ |
|-----|---|
| 0 | -2.514003 |
| 1 | -0.525951 |
| 2 | 0.032928 |
| 3 | 0.135512 |
| 4 | 0.164310 |
| 5 | 0.167709 |
| 6 | 0.161514 |
| 7 | 0.152036 |
| 8 | 0.141696 |
| 9 | 0.132449 |

Таблица 3

| $y_j \backslash z_i$ | 0.0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0.0 | 0.768234 | 0.766953 | 0.762454 | 0.750560 | 0.697587 | -1.993493 |
| 0.2 | 0.766953 | 0.765665 | 0.761145 | 0.749197 | 0.696005 | -2.005993 |
| 0.4 | 0.762454 | 0.761145 | 0.756552 | 0.744446 | 0.690641 | -2.041037 |
| 0.6 | 0.750560 | 0.749197 | 0.744446 | 0.732038 | 0.677331 | -2.093939 |
| 0.8 | 0.697587 | 0.696005 | 0.690641 | 0.677331 | 0.621125 | -2.189813 |
| 1.0 | -1.993493 | -2.005993 | -2.041037 | -2.093939 | -2.189813 | -5.020999 |

Из данных табл. 3 следует, что представленное решение нельзя признать удовлетворительным. Заметим, что повышение порядка редуцированной системы (16) вплоть до 2500 уравнений практически не меняет характера выполнения граничных условий. Такая же картина наблюдается и на других гранях параллелепипеда.

В табл. 4 граничные условия выполняются с наибольшей погрешностью в 1.3 % в угловой точке, что по сравнению с данными табл. 3 оправдывает аналитическую работу по устранению особенностей в представлении решения.

Таблица 4

| $y_j \backslash z_i$ | 0.0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1.0 |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0.0 | 1.001161 | 1.001166 | 1.001182 | 1.001230 | 1.001408 | 0.995463 |
| 0.2 | 1.001166 | 1.001170 | 1.001186 | 1.001235 | 1.001413 | 0.995354 |
| 0.4 | 1.001181 | 1.001186 | 1.001202 | 1.001252 | 1.001434 | 0.995034 |
| 0.6 | 1.001230 | 1.001235 | 1.001252 | 1.001306 | 1.001496 | 0.994540 |
| 0.8 | 1.001408 | 1.001413 | 1.001434 | 1.001496 | 1.001718 | 0.994127 |
| 1.0 | 0.995463 | 0.995354 | 0.995034 | 0.994540 | 0.994127 | 0.987569 |

Описанный подход к решению задачи о вынужденных колебаниях параллелепипеда дает также возможность определить собственные частоты колебаний. Эти значения соответствуют нулям определителя конечной системы по методу улучшенной редукции. Так, для симметрично нагруженного куба первые три собственные частоты оказываются равными $\Omega_1^* = 1.414$ (мода Ламе), $\Omega_2^* = 1.675$, $\Omega_3^* = 2.047$. Заметим, что вопрос о спектре собственных частот и собственных формах колебаний трехмерного параллелепипеда представляет особый интерес и является предметом отдельного исследования.

Таким образом, исходя из самых общих предположений относительно поведения коэффициентов рядов Фурье, удастся построить алгоритм улучшенной редукции для определения первых неизвестных в бесконечной системе и коэффициентов в асимптотической формуле, описывающей это решение при неограниченном возрастании номеров. Это позволяет свернуть остатки рядов в выражениях напряжений и устранить логарифмические особенности на гранях параллелепипеда, которые при использовании метода простой редукции (построении приближенного решения краевой задачи в виде конечного отрезка ряда Фурье) не исчезают и не дают возможности выполнить с удовлетворительной точностью заданные граничные условия.

В своей статье [12], посвященной методу суперпозиции для статической двумерной задачи, В. В. Мелешко писал: «But the main problem for the elastic parallelepiped stated by Lamé almost 150 years ago still remains challenging...». Хотелось бы надеяться, что представленная работа является приближением к решению этой проблемы.

1. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
2. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1950. – 697 с.
То же: *Kantorovich L. V., Krylov V. I.* Approximate methods of higher analysis. – New York: Intersci., 1958. – 681 p.
3. *Коялович Б. М.* Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // Изв. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1930. – **3**. – С. 41–167.
4. *Мелешко В. В., Папков С. О.* Изгибные колебания упругих прямоугольных пластин со свободными краями: от Хладни (1809) и Ритца (1909) до наших дней // Акуст. вісн. – 2009. – **12**, № 4. – С. 34–51.
5. *Папков С. О., Чехов В. Н.* О локализации собственных частот прямоугольной призмы посредством исключения неизвестных в квазирегулярной бесконечной системе // Доп. НАН України. – 2004. – № 10. – С. 57–62.
6. *Федорюк М. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. – Москва: Наука, 1987. – 544 с.
7. *Barber J. R.* Elasticity. – New York: Springer, 2010. – 534 p.
8. *Davis A. M. Y.* Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle: discussion of non-uniqueness // Proc. R. Soc. Lond. – 2003. – **A459**. – P. 409–412.
9. *Fromme J. A., Leissa A. W.* Free vibration of the rectangular parallelepiped // J. Acoust. Soc. Am. – 1970. – **48**, No. 1B. – P. 290–298.
10. *Hutchinson J. R., Zillmer S. D.* Vibration of a free rectangular parallelepiped // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1983. – **50**, No. 1. – P. 123–130.
11. *Lamé G.* Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. – Paris: Mallet-Bachelier, 1852. – 335 p.
12. *Meleshko V. V.* Equilibrium of elastic rectangle: Mathieu–Inglis–Pickett solution revisited // J. Elasticity. – 1995. – **40**, No. 3. – P. 207–238.
13. *Meleshko V. V., Gomilko A. M.* Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle // Proc. R. Soc. Lond. – 1997. – **A453**. – P. 2139–2160.
14. *Meleshko V. V., Gomilko A. M.* Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle: further discussion // Proc. R. Soc. Lond. – 2004. – **A460**. – P. 807–819.
15. *Papkov S. O., Chekhov Val. N.* Buckling of thin elastic plates and regular infinite systems of the linear algebraic equations // Int. Conf. Comput. & Exper. Eng. Sci. (ICCES'12, April 30 – May 4, 2012, Crete, Greece). – P. 54–55.
16. *Sundara Raja Iyengar K. T., Prabhakara M. K.* A three dimensional elasticity solution for rectangular prism under end loads // Z. Angew. Math. Mech. – 1969. – **49**, No. 6. – P. 321–332.

ПРОСТОРОВА ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

Досліджується тривимірна задача теорії пружності для прямокутного паралелепіпеда у випадку сталих вимушених коливань. З використанням методу суперпозиції задача зводиться до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів подвійних рядів Фур'є. Для цієї нескінченної системи доводиться виконання умов квазірегулярності та існування обмеженого розв'язку. Будується асимптотика, що описує поведінку невідомих у нескінченній системі. Наводяться числові приклади.

SPATIAL DYNAMIC PROBLEM OF ELASTICITY THEORY FOR PARALLELEPIPED

The three-dimensional elasticity problem for a rectangular parallelepiped in the case of steady-state forced vibrations is investigated. By the superposition method the problem is reduced to an infinite system of linear algebraic equations for the coefficients of double Fourier series. The quasi-regularity of the system and existence of its bounded solution are proved. The asymptotic behavior of the unknowns is constructed. The method is illustrated by several numerical examples.

Севастоп. нац. техн. ун-т, Севастополь

Получено
15.04.13