

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ І ВІБРОРОЗІГРІВ В'ЯЗКОПРУЖНИХ БАЛОК З П'ЕЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ СЕНСОРАМИ ТА АКТУАТОРАМИ

Розглядається задача про вимушені резонансні коливання і вібророзігрів в'язкопружних гнучких балок з п'єзоелектричними актуаторами і сенсорами. В'язкопружна поведінка пасивного (без п'єзоефекту) і п'єзоактивного матеріалів описується в термінах миттєвих і комплексних модулів. Нелінійна зв'язана задача електров'язкопружності і теплопровідності розв'язується з використанням методів квазілінеаризації, дискретної ортогоналізації і скінченних різниць. Досліджено вплив граничних умов і геометричної нелінійності на динамічні характеристики, електричні показники сенсора та температуру вібророзігріву гнучкої балки. Для активного демпфування балок запропоновано спосіб розрахунку показника актуатора на основі показника сенсора при невідомому навантаженні.

Вступ. В останні роки інтенсивно розвиваються способи активного демпфування вимушених коливань тонкостінних елементів за допомогою п'єзоелектричних включень [16–19, 21]. Одним із найбільш розповсюджених способів активного демпфування є нанесення на поверхню пасивного несучого шару п'єзоактивних шарів, один з яких виконує роль сенсора, а другий – актуатора. Проблеми вимушених коливань і вібророзігріву в'язкопружних тонкостінних елементів та їх контроль за допомогою п'єзоелектричних сенсорів і актуаторів досліджуються у роботах [3, 7–15, 17, 20] та ін. В умовах експлуатації тонкостінних елементів при інтенсивних гармонічних навантаженнях, коли прогини досягають товщини елемента, в задачах про їх термомеханічну поведінку необхідно враховувати ефекти фізичної та геометричної нелінійностей. Побудова електротермомеханічних моделей тонкостінних елементів із в'язкопружних пасивних (без п'єзоефекту) і п'єзоактивних складових з урахуванням фізичної і геометричної нелінійностей та розв'язки окремих задач містяться в роботах [3, 6, 7, 10, 12]. Зокрема, задачі про вимушені коливання і вібророзігрів шарнірно закріпленої в'язкопружної балки з п'єзоактуаторами з урахуванням фізичної і геометричної нелінійностей розглядаються у працях [3] і [14], відповідно.

У цій статті розглянемо вимушені коливання і дисипативний розігрів в'язкопружних гнучких балок з п'єзоелектричними сенсорами та актуаторами при різних граничних умовах. Дослідимо вплив механічних умов закріплення і геометричної нелінійності на динамічні і температурні характеристики системи, електричні показники сенсора, коефіцієнт оберненого зв'язку та критичні навантаження, при яких температура вібророзігріву в п'єзоматеріалі досягає точки Кюрі, а в пасивному матеріалі – або температури розм'якшення, або температури плавлення.

1. Постановка задачі. Розглянемо тришарову балку довжини ℓ і ширини b . Середній шар товщини h_0 виготовлено з ізотропного пасивного (без п'єзоефекту) в'язкопружного матеріалу, а зовнішні шари товщини h_1 – із в'язкопружної п'єзокераміки з товщинною поляризацією у протилежних напрямках. Шари жорстко зчеплені між собою. Балка віднесена до прямокутної системи координат $Oxyz$, так що $0 \leq x \leq \ell$, $|y| \leq b/2$, $|z| \leq H/2$ (де $H = h_0 + 2h_1$). Вважаємо, що один із п'єзос шарів ($z \leq -h_0/2$) виконує роль актуатора, поляризація якого характеризується п'єзомодулем ${}^1d_{31} = d_{31}$, а другий шар ($z \geq h_0/2$) – сенсор із п'єзомодулем ${}^2d_{31} = -d_{31}$. Зовнішні ($z = \pm H/2$) і внутрішні ($z = \pm h_0/2$) поверхні п'єзос шарів електродовані. При

цьому внутрішні електроди підтримуються при електричному потенціалі $\varphi(\pm h_0/2) = 0$. Зовнішні електродовані поверхні нескінченно тонкими розрізами з координатами x_0, x_1 розділені на окремі ділянки. На балку діє поверхневий тиск $q_z = q^0 + q' \cos \omega t$ з частотою гармонічної складової ω , близькою до резонансної. До електродів актуатора площею $s_x = b\Delta_x$ (де $\Delta_x = x_1 - x_0$) підводиться різниця електричних потенціалів $\varphi_1(-h_0/2) - \varphi_1(-H/2) = \text{Re}(V_a e^{i\omega t})$ з тією ж частотою, що і механічне навантаження, дія якого компенсується або підсилюється залежно від амплітуди і фази підведеної різниці потенціалів. У випадку розімкнутих електродів сенсора на електродованих поверхнях виконується умова електростатики [12]

$$\iint_s {}^2D_z = 0, \quad (1)$$

де 2D_z – нормальна складова електричної індукції в п'єзошарі сенсора.

В результаті деформації балки на розімкнутих електродах сенсора виникає різниця потенціалів невідомої амплітуди $V_s = \varphi_2(H/2) - \varphi_2(h_0/2)$, яку потрібно визначити чисельно або експериментально.

При моделюванні електротермомеханічної поведінки тришарової гнучкої балки приймаємо, що по всьому пакету шарів справджуються гіпотези плоских перерізів [1] для механічних величин і адекватні припущення відносно електричних змінних [6, 14], з яких випливає, що в п'єзошарах складові електричної індукції ${}^mD_z = {}^mC = \text{const}$ ($m = 1, 2$) є постійними вздовж їх товщин. Температуру дисипативного розігріву балки приймаємо постійною вздовж товщини пакету шарів. Вважаємо, що деформації малі, але прогини балки такі, що в кінематичних співвідношеннях необхідно утримувати квадрати кутів повороту. При цьому рівняння руху є також нелінійними. В'язкопружні властивості матеріалів шарів описуються інтегральними операторами [4], які для гармонічних процесів деформування зводяться до дії множення комплексних величин [5]

$$B * f = (B' + iB'')(f' + if''). \quad (2)$$

На основі прийнятих гіпотез тривимірні співвідношення в'язкопружної поляризованої вздовж осі Oz п'єзокераміки [5, 6] мають вигляд

$${}^m\sigma_x = c_{11}^E * e_x - {}^m b_{31} * {}^m E_z, \quad (3)$$

$${}^m D_z = {}^m b_{31} * e_x + b_{33} * E_z, \quad {}^m E_z = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial z}.$$

Тут $c_{11}^E = \frac{1}{s_{11}^E}$; $b_{33} = \varepsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E}$; ${}^m b_{31} = \frac{{}^m d_{31}}{s_{11}^E}$, $m = 1, 2$; $c_{11}^E *$, ${}^m d_{31} *$, $\varepsilon_{33}^T *$ – відповідно ізотермічні оператори податливості, п'єзомодуля і діелектричної проникливості п'єзоматеріалу. Поведінка пасивного ізотропного матеріалу описується першим зі співвідношень (3), у якому $c_{11}^E = E$, ${}^m b_{31} = 0$ (E – оператор модуля Юнга). Надалі у формулах символ «*» опускаємо.

Зв'язок деформації e_x з поздовжнім u і поперечним w переміщеннями записується так:

$$e_x = \varepsilon_x + z\chi_x, \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\vartheta_x^2, \quad \chi_x = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x}, \quad \vartheta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}. \quad (4)$$

На основі співвідношень (3), (4) одержуємо такі вирази для напружень ${}^m\sigma_x$ та електричних потенціалів φ_m у п'єзошарах:

$${}^m\sigma_x = \left(c_{11}^E + \frac{b_{31}^2}{b_{33}} \right) (\varepsilon_x + z\chi_x) + \frac{m b_{31}}{b_{33}} {}^m D_z, \quad (5)$$

$$\varphi_m = \frac{{}^m D_z}{b_{33}} z + \frac{m b_{31}}{b_{33}} \left(\varepsilon_x z + \frac{1}{2} \chi_x z^2 \right) + {}^m C_1, \quad m = 1, 2. \quad (6)$$

Враховуючи умови $\varphi(H/2) = \pm V_s$, $\varphi_2(h_0/2) = 0$, із виразу (6) для п'єзошару – сенсора ($m = 2$) знаходимо значення електричної індукції

$${}^2 D_z = -b_{33} \frac{V_s}{h_1} + {}^2 b_{31} \left(\varepsilon_x + \frac{h_0 + h_1}{2} \chi_x \right). \quad (7)$$

Після підстановки правої частини рівності (7) в умову (1) на зовнішній поверхні сенсора з урахуванням співвідношення ${}^2 d_{31} = -d_{31}$ отримуємо

$$V_s = -\frac{b_{31} h_1}{b_{33} \Delta_x} \int_{x_0}^{x_1} \left(\varepsilon_x + \frac{h_0 + h_1}{2} \chi_x \right) dx. \quad (8)$$

Із виразу (6) для актуатора ($m = 1$), до електродів якого підводиться різниця електричних потенціалів з амплітудою V_a , знаходимо

$${}^1 D_z = -b_{33} \frac{V_a}{h_1} \mp {}^1 b_{31} \left(\varepsilon_x \pm \frac{h_0 + h_1}{2} \chi_x \right). \quad (9)$$

Підстановка (8) у вираз (7), а потім у співвідношення (5) для сенсора ($m = 2$) приводить до інтегро-диференціального виразу ${}^2 \sigma_x$, що значно ускладнює побудову співвідношень між зусиллями, моментами і деформаційними параметрами балки. Тому при побудові цих співвідношень для сенсора умову (1) наближено замінимо рівністю [12]

$${}^2 D_x = 0. \quad (10)$$

Вводячи замість механічних напружень інтегральні величини зусилля $N_x = b \int \sigma_x dz$ і моменту $M_x = b \int \sigma_x z dz$ по пакету шарів, на основі виразів (5), (7)–(10) одержимо визначальні співвідношення

$$N_x = C_{11} * \varepsilon_x + K_{11} * \chi_x + N_E, \quad M_x = K_{11} * \varepsilon_x + D_{11} * \chi_x + M_E, \quad (11)$$

у яких

$$\begin{aligned} C_{11} &= b h_0 (E + 2\delta c_{11}^E + \delta \gamma_{33}), & K_{11} &= \frac{b h_0^2}{2} \delta (1 + \delta) \gamma_{33}, \\ D_{11} &= \frac{b h_0^3}{12} [E + 2\delta_0^3 c_{11}^E + (\delta^3 + \delta_0^3) \gamma_{33}], & \delta_0^3 &= 4\delta^3 + 6\delta^2 + 3\delta, \\ M_E &= -\frac{1}{2} (h_0 + h_1) b_{31} V_a, & N_E &= b_{31} * V_a, & \gamma_{33} &= \frac{b_{31}^2}{b_{33}}, & \delta &= \frac{h_1}{h_0}. \end{aligned} \quad (12)$$

Рівняння нелінійних коливань гнучкої балки мають вигляд [2, 6]

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = \rho_* \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \widehat{Q}_x}{\partial x} = \rho_* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q_z F, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} = \widehat{Q}_x + N_x \vartheta_x. \quad (13)$$

У рівняннях (13) позначено: $\widehat{Q}_x = Q_x - N_x \vartheta_x$, Q_x – перерізуюче зусилля; $F = bH$ – площа поперечного перерізу балки; $\rho_* = b h_0 (\rho_0 + 2\rho_1 \delta)$, ρ_0 , ρ_1 – питомі густини пасивного і п'єзоактивного матеріалів відповідно.

Механічні граничні умови записуються так:

– у випадку шарнірного закріплення торців балки

$$u = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0, \quad x = 0, \quad x = \ell; \quad (14)$$

– при їх жорсткому зацемленні

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \vartheta_x = 0, \quad x = 0, \quad x = \ell. \quad (15)$$

Внаслідок гістерезисних втрат при гармонічному деформуванні в'язкопружних елементів має місце їх дисипативний розігрів. Усереднене за період коливання і в площині поперечного перерізу розглядуваної балки рівняння теплопровідності має вигляд

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2\alpha_z(b+H)}{\lambda F} (T - T_c) + \langle W \rangle, \quad (16)$$

де

$$\langle W \rangle = \frac{\omega b}{2\lambda F} \int_{-H/2}^{H/2} (\sigma_x'' e_x' - \sigma_x' e_x'' + {}^1 D_z'' V_a' - {}^1 D_z' V_a'') dz, \quad (17)$$

$\langle W \rangle$ – дисипативна функція; $\alpha_z = (\alpha_+ + \alpha_-)/2$; α_+ , α_- – коефіцієнти теплообміну на поверхнях $z = \pm H/2$; λ , a – усереднені коефіцієнти теплопровідності і температуропровідності; T_c – температура зовнішнього середовища.

Початкова та граничні теплові умови на краях балки такі:

$$T = T_0, \quad t = 0, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \pm \alpha_{0,\ell} (T - T_c), \quad x = 0, \quad x = \ell, \quad (18)$$

де $\alpha_{0,\ell}$ – коефіцієнти теплообміну на краях балки.

2. Побудова розв'язку задачі. Для побудови розв'язку поставленої задачі розв'язувальні рівняння електров'язкопружності (4), (11)–(15) подамо відносно шуканих величин u , w , N_x , \widehat{Q}_x , M_x , записавши співвідношення (4), (11) у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= J_{CK} * (N_x - N_E) - J_{DK} * (M_x - M_E) - \frac{1}{2} \vartheta_x^2, \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= -\vartheta_x, \quad \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} = J_D * (M_x - M_E) - J_{DK} * (N_x - N_E), \end{aligned} \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} J_C &= \frac{1}{C_{11}}, \quad J_D = \frac{1}{D_{11}(1 - \nu_{KC}\nu_{KD})}, \quad \nu_{KC} = \frac{K_{11}}{C_{11}}, \\ J_{DK} &= J_D \nu_{KC}, \quad J_{CK} = J_C + \nu_{KC} J_{DK}, \quad \nu_{KD} = \frac{K_{11}}{D_{11}}. \end{aligned} \quad (20)$$

При навантаженнях типу

$$q_z = q^0(x) + q'(x) \cos \omega t - q''(x) \sin \omega t, \quad q'' = 0, \quad (21)$$

будемо нехтувати перехідними процесами, обмежившись розглядом квазістаціонарних вимушених коливань та квазістатичного напружено-деформованого стану, обумовленого складовою $q^0(x)$. За аналогією з підходом [14] наближений розв'язок нелінійних рівнянь (13), (19) за часом будемо у вигляді

$$A = A^0 + A' \cos \omega t - A'' \sin \omega t, \quad B = B^0 + \sum_{k=1}^2 (B^k \cos k\omega t - B''^k \sin k\omega t), \quad (22)$$

де величини $A = \{w, \vartheta_x, \widehat{Q}_x, M_x\}$ характеризують згин, а $B = \{u, N_x, \varepsilon_x\}$ – плоске деформування балки.

В результаті із розв'язувальних рівнянь (13)–(15), (19) відносно коефіцієнтів подання (22) отримуємо таку систему нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
\frac{d u'}{dx} &= J_{CK}^1 (N'_x - N'_E) + J_{CK}'' (N''_x - N''_E) - J_{DK}^1 (M'_x - M'_E) - \\
&\quad - J_{DK}'' (M''_x - M''_E) - \mathfrak{G}_x^0 \mathfrak{G}'_x, \\
\frac{d u''}{dx} &= -J_{CK}^1 (N'_x - N'_E) + J_{CK}^1 (N''_x - N''_E) - J_{DK}^1 (M'_x - M'_E) - \\
&\quad - J_{DK}^1 (M''_x - M''_E) - \mathfrak{G}_x^0 \mathfrak{G}''_x, \\
\frac{d u'}{dx} &= J_{CK}^2 N'^2_x + J_{CK}'' N''^2_x - \frac{1}{4} (\mathfrak{G}'^2_x - \mathfrak{G}''^2_x), \\
\frac{d u''}{dx} &= -J_{CK}^2 N'^2_x + J_{CK}'' N''^2_x - \frac{1}{2} \mathfrak{G}'_x \mathfrak{G}''_x, \\
\frac{d w'}{dx} &= -\mathfrak{G}'_x, \quad \frac{d w''}{dx} = -\mathfrak{G}''_x, \\
\frac{d \mathfrak{G}'_x}{dx} &= J_{DK}^1 (N'_x - N'_E) - J_{DK}'' (N''_x - N''_E) + J_D^1 (M'_x - M'_E) + J_D'' (M''_x - M''_E), \\
\frac{d \mathfrak{G}''_x}{dx} &= J_{DK}^1 (N'_x - N'_E) - J_{DK}'' (N''_x - N''_E) - J_D^1 (M'_x - M'_E) + J_D'' (M''_x - M''_E), \\
\frac{d N'_x}{dx} &= -\rho_* \omega^2 u', \quad \frac{d N''_x}{dx} = -\rho_* \omega^2 u'', \\
\frac{d N'^2_x}{dx} &= -4\rho_* \omega^2 u'^2, \quad \frac{d N''^2_x}{dx} = -4\rho_* \omega^2 u''^2, \\
\frac{d \hat{Q}'_x}{dx} &= -\rho_* \omega^2 w' - q^0 F, \quad \frac{d \hat{Q}''_x}{dx} = -\rho_* \omega^2 w'', \\
\frac{d M'_x}{dx} &= \hat{Q}'_x + N'^0_x \mathfrak{G}_x^0 + N_x^0 \mathfrak{G}'_x + \frac{1}{2} N'^2_x \mathfrak{G}'_x + \frac{1}{2} N''^2_x \mathfrak{G}''_x, \\
\frac{d M''_x}{dx} &= \hat{Q}''_x + N''^0_x \mathfrak{G}_x^0 + N_x^0 \mathfrak{G}''_x + \frac{1}{2} N''^2_x \mathfrak{G}'_x + \frac{1}{2} N'^2_x \mathfrak{G}''_x, \\
\frac{d u}{dx} &= J_C^0 N_x^0 - \frac{1}{2} \mathfrak{G}_x^0 - \frac{1}{4} (\mathfrak{G}'^2_x + \mathfrak{G}''^2_x), \quad \frac{d w}{dx} = -\mathfrak{G}_x^0, \\
\frac{d \mathfrak{G}_x^0}{dx} &= J_D^0 M_x^0, \quad \frac{d N_x^0}{dx} = 0, \quad \frac{d \hat{Q}_x^0}{dx} = -q^0 F, \\
\frac{d M_x^0}{dx} &= \hat{Q}_x^0 + \frac{1}{2} (N'^1_x \mathfrak{G}'_x + N''^1_x \mathfrak{G}''_x) + N_x^0 \mathfrak{G}_x^0. \tag{23}
\end{aligned}$$

Граничні умови (14), (15) записуються у вигляді

$$\begin{aligned} u = u' = u'' = u' = u'' = 0, \quad w = w' = w'' = 0, \\ M_x = M'_x = M''_x = 0, \quad x = 0, \quad x = \ell, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} u = u' = u'' = u' = u'' = 0, \quad w = w' = w'' = 0, \\ \vartheta_x = \vartheta'_x = \vartheta''_x = 0, \quad x = 0, \quad x = \ell. \end{aligned} \quad (25)$$

У коефіцієнтах (20) рівнянь (23) компоненти комплексних податливостей $J_C = J'_C - i J''_C$, $J_D = J'_D - i J''_D$, $k = 0, 1, 2$, обчислюються на основі (2), (20). При цьому для величин з індексом $k = 1$ комплексні модулі електров'язкопружності обчислюються на частоті ω , а з індексом $k = 2$ – на частоті 2ω . Коефіцієнти J_C^0 , J_D^0 відповідають рівноважним значенням пружних модулів пасивного і п'єзоактивного матеріалів.

У термінах шуканих величин задачі (23)–(25) дисипативна функція (17) для розглядуваної балки визначається співвідношенням

$$\begin{aligned} \langle W \rangle = \frac{\omega}{2\lambda F} \left\{ N_x'' \varepsilon_x' - N_x' \varepsilon_x'' + 2(N_x'' \varepsilon_x' - N_x' \varepsilon_x'') + M_x'' \chi_x' - M_x' \chi_x'' - \right. \\ \left. - \frac{b}{2}(h_0 + h_1) \left[(b_{31}'' \chi_x' + b_{31}' \chi_x'') V_a' + (b_{31}'' \chi_x'' - b_{31}' \chi_x') V_a'' \right] + \right. \\ \left. + \frac{b}{h_1} b_{33}'' (V_a'^2 + V_a''^2) \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Нелінійні рівняння (23) лінеаризуємо методом квазілінеаризації [7]. Отриману систему лінеаризованих диференціальних рівнянь з граничними умовами (24) або (25) на кожному наближенні інтегруємо чисельним методом дискретної ортогоналізації з використанням типової програми. Першим наближенням є розв'язок лінійної задачі. У процесі реалізації такого алгоритму використовується спосіб продовження за параметрами зовнішнього навантаження. Потім обчислюється дисипативна функція (26) і нестационарна задача теплопровідності (16), (18) розв'язується методом скінченних різниць з використанням явної схеми.

На основі лінеаризованої задачі електров'язкопружності (23)–(26) обчислюємо амплітуду значення різниці потенціалів V_s (8) на електродах сенсора. Для контролю вимушених коливань балки за допомогою сенсорів і актуаторів необхідно визначити амплітуду різниці потенціалів V_a , яку необхідно підвести до електродів актуатора, щоб компенсувати дію гармонічного навантаження.

Обмежимося випадком гармонічного навантаження балки поперечним тиском постійної амплітуди $q_z = q_0 \cos \omega t$. При цьому у формулі (21) покладається $q'(x) = q_0$, $q^0 = 0$. При відомому навантаженні q_0 компенсуючий показник актуатора V_a будемо визначати за формулою [13]

$$V_a = k_a(\Delta)q_0, \quad \Delta = (x_1 - x_0)/\ell. \quad (27)$$

Тут $k_a = \frac{|w_{q_{\max}}^1|}{|w_{E_{\max}}^1|}$ – коефіцієнт керування, який обчислюється на основі

розв'язку лінійної задачі: $|w_{q\max}^1|$ – максимальне значення амплітуди прогину балки на частоті лінійного резонансу при навантаженні $q_0 = 1$ Па, а $|w_{E\max}^1|$ – аналогічна величина, зумовлена дією на електроди актуатора амплітуди потенціалів $V_a = V_a' = \varphi_1(-h_0/2) - \varphi_1(-H/2) = 1$ В ($V_a'' = 0$). Проти-фазність дії електричного навантаження для компенсації поперечного тиску реалізується за формулою $V_a \cos(\omega t + \pi) = -V_a \cos \omega t$.

У випадку невідомого навантаження для модальної форми демпфування балки компенсуючий показник балки актуатора V_a визначається через показник сенсора V_s такою лінійною залежністю [12]:

$$V_a = G_{as} V_s. \quad (28)$$

Тут коефіцієнт оберненого зв'язку G_{as} визначається співвідношенням

$$G_{as} = \frac{|V_a^1|}{|V_s^1|}, \quad (29)$$

в якому амплітуди еталонних показників сенсора V_s^1 і актуатора V_a^1 розраховуються за формулами (8) і (27), відповідно, при $q_0 = 1$ МПа.

3. Результати розрахунків та їх аналіз. Числові розрахунки проведено для балки, пасивний шар якої виготовлено із поліметилметакрилату, а п'єзоактивні шари – із в'язкопружної п'єзокераміки типу ЦТСтБС-2, фізико-механічні характеристики яких наведено в статті [14].

З огляду на спосіб гармонічного навантаження у розглядуваній балці реалізуються переважно згинні коливання. Тому розрахунки виконано для частот навантаження, що близькі до частоти першого резонансу найбільш енергоємної згинної моди коливань.

Геометричні розміри балки такі: $\ell = 0.4$ м, $h_0 = 0.01$ м, $b = H = h_0 + 2h_1$.

На рис. 1 зображено залежності від безрозмірного параметра $\Delta = \frac{x_1 - x_0}{\ell}$, що характеризує розмір площі актуатора та сенсора, таких величин: $\tilde{w} = |w(0.5\ell)| \cdot 10^4$ м – амплітуд максимальних прогинів балки (суцільні лінії), зумовлених дією електричного потенціалу $V_a = 1$ В ($q' = 0$, $V_a'' = 0$) на актуатор, $\tilde{V}_s = |V_s^1|/h \cdot 10^{-2}$ В/м – еталонних показників сенсора (штрихпунктирні лінії) та актуатора $\tilde{V}_a = |V_a^1| \cdot 10^2$ В (штрихові лінії) при механічному навантаженні $q' = 1$ Па ($V_a = 0$) і $\tilde{G}_{as} = G_{as} h_1 \cdot 10^3$ м – параметра керування (суцільні з хрестиками лінії). Розрахунки проведено на частотах лінійного резонансу ω_r для таких варіантів товщин п'єзоактивних складових:

– у випадку шарнірно опертих країв балки (рис. 1а):

$$\text{криві 1: } \omega_r = 243 \text{ с}^{-1}, \quad h_1 = 0.1 \cdot 10^{-4} \text{ м,}$$

$$\text{криві 2: } \omega_r = 286 \text{ с}^{-1}, \quad h_1 = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ м,}$$

$$\text{криві 3: } \omega_r = 329 \text{ с}^{-1}, \quad h_1 = 0.1 \cdot 10^{-3} \text{ м;}$$

– при жорсткому закріпленні (рис. 1б):

$$\text{криві 1: } \omega_r = 567 \text{ с}^{-1}, \quad h_1 = 0.1 \cdot 10^{-4} \text{ м,}$$

$$\text{криві 2: } \omega_r = 660 \text{ с}^{-1}, \quad h_1 = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ м,}$$

$$\text{криві 3: } \omega_r = 757 \text{ с}^{-1}, \quad h_1 = 0.1 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

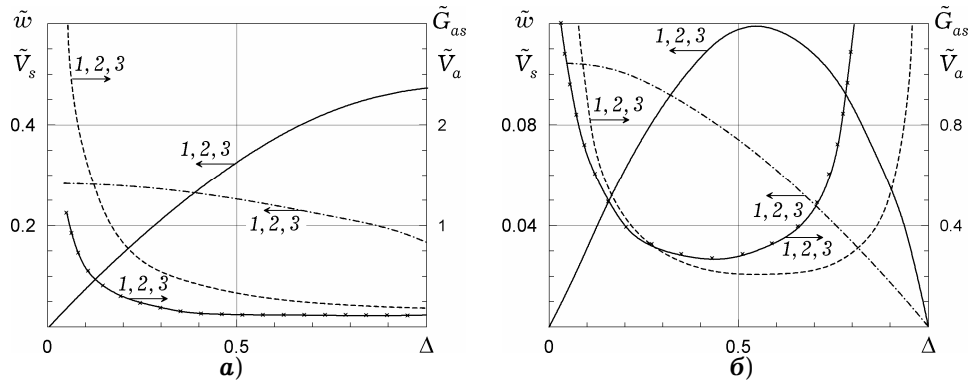


Рис. 1

Виявилось, що графіки представлених величин для розглянутих товщин п'єзоактивних складових співпадають між собою. Це означає, що величина амплітуди прогину балки, зумовлена різницею електричних потенціалів на електродах актуатора, та показник актуатора V_a при відомому механічному навантаженні не залежать від товщини п'єзоактуатора. В той же час показник сенсора V_s та коефіцієнт керування G_{as} , відповідно, прямо та обернено пропорційно змінюються зі зміною товщини сенсора. Наведені на рис. 1а та рис. 1б графічні результати, що відповідають розглядуваним граничним умовам (24), (25), кількісно і якісно відрізняються між собою. Так, якщо при шарнірному закріпленні країв балки найбільш ефективним є актуатор, який повністю покриває поверхню вздовж довжини балки ($\Delta = 1$, $x_0 = 0$, $x_1 = \ell$), то при жорсткому зацепленні – п'єзоактуатор, який займає симетричну відносно середини балки частину поверхні ($\Delta = 0.55$, $x_0 = 0.225\ell$, $x_1 = 0.775\ell$). Ефективним вважається актуатор, який при підведенні до його електродів різниці електричних потенціалів забезпечує максимальний прогин балки.

Нижче наведено результати розрахунків для балки з найбільш ефективним актуатором і сенсором з такими ж розмірами і координатами розміщення. Числові результати, наведені на рисунках штриховими лініями, відповідають розв'язку лінійної задачі, а суцільними – розв'язку задачі при врахуванні геометричної нелінійності. Вплив граничних умов і геометричної нелінійності на термомеханічну поведінку балки з п'єзошарами досліджується для випадку механічного гармонічного навантаження з амплітудою q_0 ($q^0 = 0$, $V_a = 0$).

На рис. 2 зображено криві залежності максимального прогину $\tilde{w} = |w(0.5\ell)|/h_0$ балки з оптимальними розмірами Δ і товщиною $h_1 = 0.5 \cdot 10^{-4}$ м п'єзоелементів від амплітуди навантаження q_0 . Розраховані на частоті ω_r лінійного резонансу графіки симетричного відносно середини балки розподілу температури вібророзігріву відносно її довжини при $q_0 = 0.5 \cdot 10^5$ Па і $\alpha = \alpha_{\pm} = \alpha_{0,\ell} = 1$ Вт/(м²·°С) показано на рис. 3.

Криві 1 відповідають шарнірному закріпленню балки при $\Delta = 1$, $\omega_r = 286$ с⁻¹, а криві 2 – випадку жорсткого зацеплення при $\Delta = 0.55$, $\omega_r = 660$ с⁻¹. Із рис. 2 випливає, що врахування геометричної нелінійності стає помітним при досягненні амплітуди відносних прогинів $\tilde{w} \geq 0.1$ для шарнірно опертої балки і $\tilde{w} \geq 0.2$ – при жорсткому зацепленні її країв. Криві на рис. 3 показують, що максимальний розігрів шарнірно закріпленої балки (криві 1) має місце в точці найбільшого прогину балки ($x = 0.5\ell$), а

жорстко заземленої балки (криві 2) – у точках заземлення $x = 0$, $x = \ell$. Врахування геометричної нелінійності приводить до зменшення величин прогинів і температури вібророзігріву.

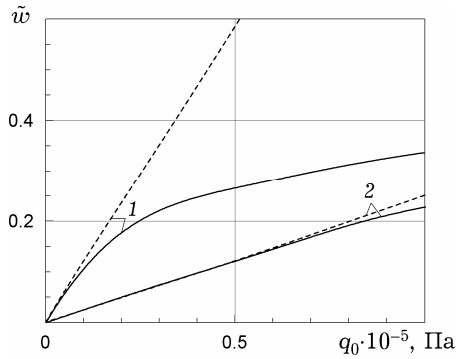


Рис. 2

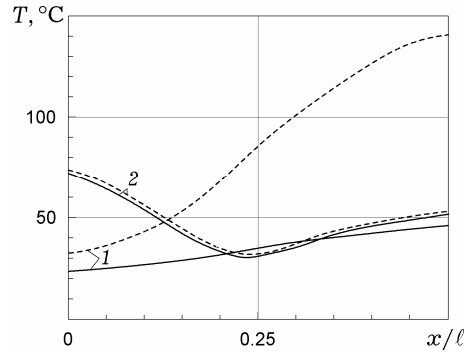


Рис. 3

Для шарнірно закріпленої балки при розглядуваних розмірах п'єзоелементів і параметрах теплообміну криві частотних залежностей максимальних значень відносного прогину \tilde{w} , показників сенсора $\tilde{V}_s = |V_s| \cdot 10^{-2}$ В і усталеної ($\tau = at/\ell^2 = 0.5$) температури дисипативного розігріву $T_m = T(0.5\ell)$ показано на рис. 4, рис. 5, рис. 6, відповідно.

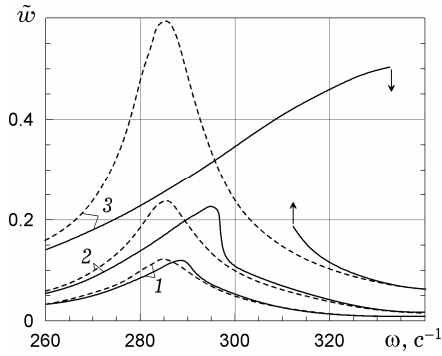


Рис. 4

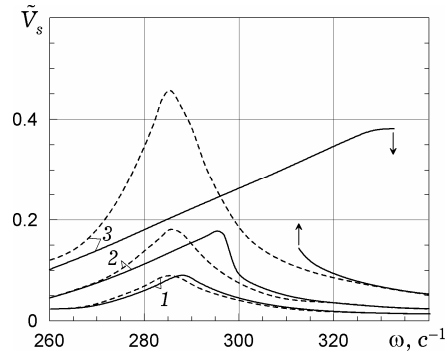


Рис. 5

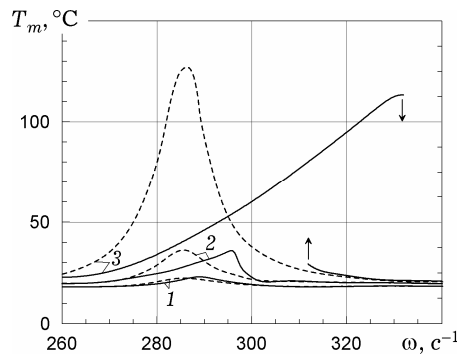


Рис. 6

Криві 1, 2, 3 розраховано при механічному навантаженні з амплітудами $q' \cdot 10^{-5} = 0.1, 0.2, 0.5$ Па, відповідно. Аналіз кривих показує, що зі збільшенням амплітуди навантаження вплив геометричної нелінійності проявляється у збільшенні власної частоти коливань балки, трансформації частотних залежностей в характеристики жорсткого типу при наявності неоднороззначних ділянок. Проте величини амплітудних значень прогинів, показ-

ника сенсора і температури вібророзігріву на частотах лінійного і нелінійного резонансів мало відрізняються між собою. Ця обставина може бути обґрунтована підходу, коли для активного демпфування механічних коливань балки розрахунки електричних показників актуатора (27), (28) проводяться на основі розв'язку лінійної задачі.

Для активного демпфування механічних коливань розглядуваної шарнірно закріпленої балки ($\Delta = 1$) при відомій амплітуді $q' = q_0 = 0.5 \cdot 10^5$ Па гармонічного навантаження показник актуатора, що компенсує це навантаження, розраховується за формулою (27), у якій $k_a = V'_a = 0.255 \cdot 10^{-2}$ В/Па (рис. 1а, штрихова лінія), так що $V_a = 127.5$ В. При цьому згідно з (8) показник сенсора $V_s = 44.86$ В. Припустивши, що показник сенсора V_s є відомим при невідомому q_0 , показник актуатора V_a обчислимо за формулою (28), у якій згідно з (29) $G_{as} = 2.84$ (рис. 1а, суцільна з хрестиками лінія). В результаті одержимо $V_a = 127.4$ В. Близькість значень V_a , отриманих з формул (27), (28), є підставою допустимості використання формули (28) для обчислення V_a при невідомому навантаженні q_0 .

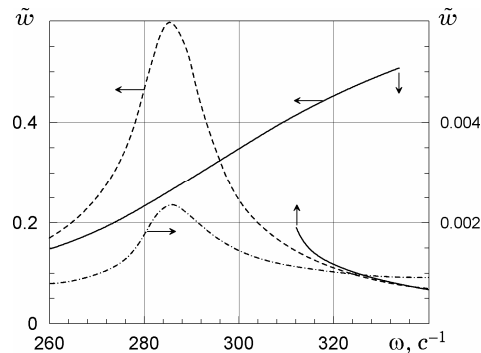


Рис. 7

На рис. 7 показано криві амплітудно-частотних залежностей відносних прогинів \tilde{w} балки при підведенні до актуатора різниці електричних потенціалів $V_a = 127.5$ В (штрихова і суцільна криві). Ці криві співпадають з кривими 3 на рис. 4 при механічному навантаженні $q_0 = 0.5 \cdot 10^5$ Па (для шарнірно закріпленої балки).

Сумісну протифазну дію механічного $q_0 = 0.5 \cdot 10^5$ Па та електричного $V_a = 127.5$ В навантажень демонструє штрихпунктирна крива. Зменшення амплітуди прогину більш як на два порядки вказує на можливість активного гасіння основної моди механічних коливань балки. Аналогічні результати спостерігаємо також і у випадку жорсткого зацмлення країв балки.

Термічне руйнування. При високих рівнях гармонічних навантажень в'язкопружних недемпфованих елементів з п'єзоактивними складовими та слабкому теплообміні на зовнішніх поверхнях втрата їх працездатності може наступити через вібророзігрів при досягненні або температури T_p плавлення пасивного матеріалу, або температури T_K деполяризації (точка Кюрі) п'єзоактивного матеріалу. Тому при проектуванні однією з вимог для визначення працездатності таких елементів є розрахунок критичних амплітуд механічного навантаження, при яких температура вібророзігріву досягає одного із вказаних значень.

Приймемо, що втрата працездатності в'язкопружних елементів з п'єзовключеннями настає при досягненні значення температури плавлення T_p

або деполяризації T_K хоча би в одній точці. Розглянемо залежності усталеної ($\tau = 0.5$) максимальної температури T_m вібророзігріву балки від амплітуди q_0 при різних коефіцієнтах теплообміну α . Такі залежності температури всередині ($x = 0.5\ell$) шарнірно закріпленої і жорстко защемленої на краях $x = 0$, $x = \ell$ балок показано на рис. 8а і рис. 8б, відповідно. Криві 1, 2, 3 розраховано на частотах лінійного резонансу $\omega_r = 286 \text{ с}^{-1}$ і $\omega_r = 660 \text{ с}^{-1}$ та відповідають коефіцієнтам теплообміну $\alpha = 0.1, 0.5, 1.0 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$. Значення абсцис, при яких криві 1, 2, 3 перетинаються з ординатами $T_m = T_p = \text{const}$ або $T_m = T_K = \text{const}$, будуть визначати критичну величину q_{cr} , при якій об'єкт втрачає працездатність через розм'якшення або деполяризацію матеріалу. З аналізу кривих на рис. 8 випливає, що інтенсифікація теплообміну на поверхнях балки і врахування геометричної нелінійності сприяє збільшенню критичних значень q_{cr} , при яких настає теплове руйнування об'єкта.

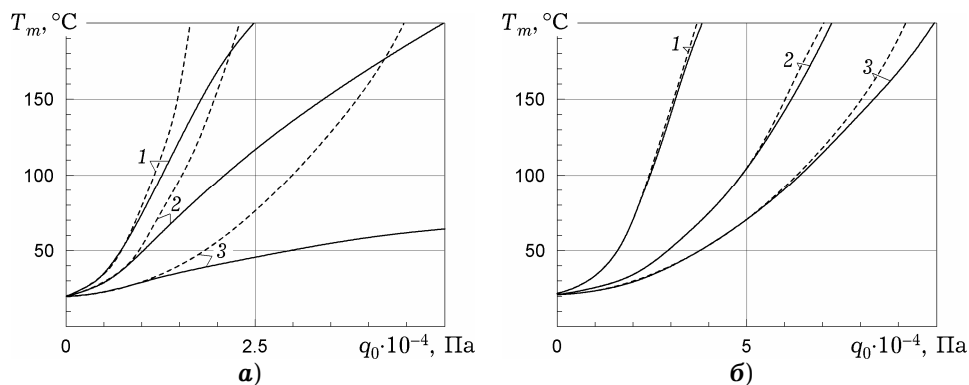


Рис. 8

Висновки. Розглянуто наближену постановку задачі про вимушені резонансні коливання і вібророзігрів гнучких в'язкопружних балок та їх контроль п'єзоелектричними сенсорами і актуаторами. Досліджено вплив геометричної нелінійності, механічних і теплових граничних умов на динамічні характеристики, температуру вібророзігріву, електричні показники сенсора та величину критичних значень амплітуд гармонічного навантаження, при якому вібророзігрів балки досягає температури деполяризації п'єзокераміки або температури розм'якшення пасивного матеріалу і система втрачає працездатність. Обґрунтовано оснований на розв'язку лінійної задачі спосіб визначення електричного показника актуатора через показник сенсора для демпфування гнучкої балки при невідомому навантаженні.

1. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху. – Київ: Вища шк., 2004. – 526 с.
2. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академперіодика, 2006. – 472 с.
3. Жук Я. А., Сенченков И. К. Моделирование стационарных колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных неупругих элементов, содержащих пьезоактивные слои // Прикл. механика. – 2004. – 40, № 5. – С. 80–91.
The same: Zhuk Ya. A., Senchenkov I. K. Modelling the stationary vibrations and dissipative heating of thin-walled inelastic elements with piezoactive layers // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, No. 5. – P. 546–556.
4. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – Москва: Наука, 1970. – 280 с.
5. Карнаузов В. Г., Киричок И. Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 222 с.

6. Карнаушов В. Г., Киричок И. Ф. Электротермовязкоупругость. – Киев: Наук. думка, 1988. – 320 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций / Под ред. А. Н. Гузя: В 5 т. – Т. 4.
7. Карнаушов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И. Влияние температуры диссипативного разогрева на активное демпфирование вынужденных колебаний неупругих тонких пластин при помощи пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов // Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень. Акустика і хвилі. – Київ: Наук. думка, 2007. – С. 127–152.
8. Карнаушов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И. Электромеханические колебания тонкостенных элементов с пьезоэффектом // Успехи механики / Под ред. А. Н. Гузя: В 6 т. – Киев: А.С.К., 2006. – Т. 2. – С. 185–217.
9. Карнаушов В. Г., Козлов В. И., Пятецкая Е. В. Активное демпфирование колебаний прямоугольной пластины при помощи распределенных сенсоров и актуаторов // Теорет. и прикл. механика. – 2003. – Вып. 37. – С. 137–140.
10. Карнаушов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: Житомир. держ. технолог. ун-т, 2005. – 426 с.
11. Карнаушов В., Козлов В., Карнаушова Т. Моделювання вимушених резонансних коливань і дисипативного розігріву гнучких в'язкопружних пластин із розподіленими актуаторами // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2008. – Вип. 8. – С. 48–68.
12. Киричок И. Ф. Осесимметричные резонансные колебания и разогрев оболочек вращения и их контроль пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 8. – С. 42–57.
Te same: Kirichok I. F. Control of axisymmetric resonant vibrations and self-heating of shells of revolution with piezoelectric sensors and actuators // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, No. 8. – P. 890–901.
13. Киричок И. Ф., Карнаушова Т. В. Влияние граничных условий и температуры диссипативного розігріву на активне демпфування вимушених осесимметричних резонансних згинальних коливань круглих в'язкопружних пластин за допомогою п'езоелектричних сенсорів та актуаторів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 2. – С. 94–107.
Te same: Kyrychok I. F., Karnaukhova T. V. Influence of boundary conditions and temperature of dissipative heating on active damping of forced axisymmetric resonant bending vibrations of circular viscoelastic plates by piezoelectric sensors and actuators // J. Math. Sci. – 2011. – **178**, No. 5. – P. 480–495.
14. Киричок И. Ф., Сенченков И. К., Червинко О. П. Вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів гнучкої в'язкопружної балки з п'езоактуаторами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 4. – С. 120–130.
Te same: Kirichok I. F., Senchenkov I. K., Chervinko O. P. Forced resonance vibrations and dissipative heating of a flexible viscoelastic beam with piezoelectric actuators // J. Math. Sci. – 2012. – **187**, No. 6. – P. 685–698.
15. Киричок И., Карнаушова Т. Контроль вимушених коливань круглих в'язкопружних пластинок за допомогою п'езоелектричних сенсорів та актуаторів з урахуванням віборозігріву // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2009. – Вип. 9. – С. 67–78.
16. Blaguernon A., Léné F., Bernadou M. Active control of a beam using a piezoceramic element // Smart Mater. Struct. – 1999. – **8**, No.1. – P. 116–124.17.
17. Brennan M. J., Elliott S. J., Pinnington R. J. The dynamic coupling between piezoceramic actuators and a beam // J. Acoust. Soc. Am. – 1997. – **102**, No. 4. – P. 1931–1942.
18. Gabbert U., Tzou H. S. Smart structures and structronic systems. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001. – 384 p.
19. Intelligent structural systems / Eds. H. S. Tzou, G. L. Anderson/ – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. – 453 p.
20. Karnaukhov V. G., Kirichok I. F., Karnaukhov M. V. The influence of dissipative heating on active vibration damping of viscoelastic plates // J. Eng. Math. – 2008. – **61**, No. 2–4. – P. 399–411.
21. Tzou H. S. Piezoelectric shells: Distributed sensing and control of continua. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 468 p.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВИБРОРАЗОГРЕВ ВЯЗКОУПРУГИХ БАЛОК С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СЕНСОРАМИ И АКТУАТОРАМИ

Рассматривается задача о вынужденных резонансных колебаниях и виброразогреве вязкоупругих гибких балок с пьезоэлектрическими актуаторами и сенсорами. Вязкоупругое поведение пассивного (без пьезоэффекта) и пьезоактивного материалов описывается в терминах мгновенных и комплексных модулей. Нелинейная связанная задача электровязкоупругости и теплопроводности решается с использованием методов квазилинеаризации, дискретной ортогонализации и конечных разностей. Исследовано влияние граничных условий и геометрической нелинейности на динамические характеристики, электрические показания сенсора и температуру виброразогрева гибкой балки. Для активного демпфирования балок предложен способ расчета показателя актуатора на основании показателя сенсора при неизвестной нагрузке.

FORCED VIBRATIONS AND VIBRATION HEATING-UP OF VISCOELASTIC BEAMS WITH PIEZOELECTRIC SENSORS AND ACTUATORS

The problem of forced resonance vibrations and vibration heating-up of flexible viscoelastic beams with piezoelectric sensors and actuators is considered. Viscoelastic behavior of passive (without piezoeffect) and piezoactive materials is described in terms of instantaneous and complex moduli. To solve the nonlinear coupled problem of electroviscoelasticity and heat conduction the method of quasilinearization together with the numerical methods of discrete orthogonalization and finite differences are used. An effect of boundary conditions and geometric nonlinearity on dynamic characteristics, electrical indicators of sensor and temperature of vibration heating-up of a flexible beam is investigated. For active damping of beams, a method of calculation the indicators of actuator on the basis of the indicator of sensor under unknown external loading is proposed.

Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
12.07.12