УДК 517.2

В. С. Ільків[1,2], З. М. Нитребич[1]

ОЦІНКА МІРИ МНОЖИНИ РІВНЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Встановлено оцінку зверху міри множини рівня функцій, які є розв'язками неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами з правими частинами, які не мають нулів на деякому проміжку. Такі оцінки використовуються при дослідженні цілих і мероморфних функцій, при вивченні проблеми малих знаменників для рівнянь із частинними похідними, у метричній теорії діофантових наближень, у теорії міри та інтеграла.

Вступ. Нехай $[a,b]$ – деякий проміжок додатної довжини, δ – додатна стала. Для дійсних чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, розглянемо многочлени

$$L_j(\lambda) = (\lambda+\lambda_1)\ldots(\lambda+\lambda_j), \qquad L_{(j)}(\lambda) = \lambda+\lambda_j, \qquad j = 1,\ldots,n,$$

і відповідні неперервні функції

$$g_1 = L_1\left(\frac{d}{dx}\right)f, \qquad \ldots, \qquad g_n = L_n\left(\frac{d}{dx}\right)f,$$

де $f \in \mathbf{C}^n[a,b]$, тобто f – неперервно диференційовна n разів на проміжку $[a,b]$ функція (на кінцях проміжку похідні – односторонні).

Припустимо, що елементами множини $G_n = G_n(\delta)$ є функції $g_n \in \mathbf{C}[a,b]$, які не мають нулів на проміжку $[a,b]$ і задовольняють умову

$$\min_{x\in[a,b]} |g_n(x)| = \left| L_n\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)\right| \ge \delta, \tag{1}$$

тобто множина функцій $g_n^*(x) = 1/g_n(x)$ належить до кулі з нульовим центром і радіусом $1/\delta$ у просторі $\mathbf{C}[a,b]$. Позначимо символом $\mathbf{C}_{\delta,L_n}[a,b]$ підмножину функцій f із простору $\mathbf{C}^n[a,b]$, кожна з яких задовольняє диференціальне рівняння

$$L_n\left(\frac{d}{dx}\right)f = \frac{d^n f}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n f = g_n$$

для деякої функції $g_n \in G_n$, де $a_j = \sum\limits_{1\le s_1<\ldots<s_j\le n} \lambda_{s_1}\ldots\lambda_{s_j}$, $j = 1,\ldots,n$.

Множину $G_{L_n}(\varepsilon,\delta,f)$ рівня ε функції $f \in \mathbf{C}_{\delta,L_n}[a,b]$ визначає формула

$$G_{L_n}(\varepsilon,\delta,f) = \{x\in[a,b] : |f(x)| < \varepsilon\}, \qquad \varepsilon > 0. \tag{2}$$

Знайдемо оцінку міри Лебеґа $\operatorname{mes} G_{L_n}(\varepsilon,\delta,f)$ множини рівня $G_{L_n}(\varepsilon,\delta,f)$ для довільного натурального n, довільних додатних ε та δ і довільної функції $f \in \mathbf{C}_{\delta,L_n}[a,b]$.

1. Відомі результати. Проблема знаходження міри множини (2) для дійсних і комплексних функцій однієї і багатьох змінних вивчалася у роботах [2–6, 8–11, 13–15], зокрема, для многочленів і квазімногочленів f – у [1, 7, 12, 16], для випадку $L_n\left(\frac{d}{dx}\right) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n$, тобто $g_n = f^{(n)}$, – у працях [2–6, 8, 10, 11, 13–15], для загальних (зокрема, також зі змінними коефіцієнтами) лінійних операторів $L_n\left(\frac{d}{dx}\right)$ –у [8]. Авторами цих праць встановлено оцінки міри множини $G_{L_n}(\varepsilon,\delta,f)$ у вигляді нерівностей

$$\operatorname{mes} G_{L_n}(\varepsilon,\delta,f) \le \min\left\{C\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}},\, b-a\right\}, \tag{3}$$

де C – сталі, які у випадку $L_n\left(\frac{d}{dx}\right)=\frac{d^n}{dx^n}$ поступово уточнювалися (зменшувалися) у згаданих роботах, поки не сягнули [14] (для дійсних функцій f дійсного аргументу) їх точного, тобто непокращуваного на $\mathbf{C}_{\delta,L_n}[a,b]$, значення $C=4\sqrt[n]{n!/2}$.

Близьким до цього значення є значення $C=2n$ у роботі [4], оскільки для $n=1$ і $n=2$ вони співпадають, а для $n>2$ виконуються нерівності $2<\frac{n}{\sqrt[n]{n!/2}}<e$.

У випадку комплексної f точних значень сталих C не встановлено [16, с. 78].

Вперше задачу оцінювання $\operatorname{mes} G_{L_n}(\varepsilon,\delta,f)$ для випадку $L_n(\lambda)\ne\lambda^n$ і для загальніших многочленів $L_n(\lambda)\equiv L_n(\lambda,x)=(\lambda+u_1(x))\dots(\lambda+u_n(x))$, де $u_1,\dots,u_n$ – дійсні неперервні функції на $[a,b]$, розв'язано у роботі [8]. Зокрема, для попарно різних між собою значень $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ (наприклад, $\lambda_1>\dots>\lambda_n$) встановлено нерівність

$$\operatorname{mes} G_{L_n}(\varepsilon,\delta,f) \le \min\left\{2nc_n\sqrt[n]{e^{(b-a)(|\lambda_1|+\dots+|\lambda_n|)}\frac{\varepsilon}{\delta}},\, b-a\right\} =$$

$$= \begin{cases} 2nc_n\sqrt[n]{e^{(b-a)(|\lambda_1|+\dots+|\lambda_n|)}\frac{\varepsilon}{\delta}}, & \varepsilon<\varepsilon_n^*, \\ b-a, & \varepsilon\ge\varepsilon_n^*, \end{cases} \tag{4}$$

де додатні послідовності ε_n^* та c_n визначаються формулами

$$\varepsilon_n^* = \delta\left(\frac{b-a}{2nc_n}\right)^n e^{-(b-a)(|\lambda_1|+\dots+|\lambda_n|)}, \qquad c_n = 2^{(n-1)/2}, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

Подібні оцінки встановлено і для L_n з кратними числами λ_j або функціями u_j [8].

Із формули (5) випливає, що при $|\lambda_1|+\dots+|\lambda_n|>0$ величина ε_n^*, як функція змінної $b-a$, дорівнює нулеві при $b-a=0$, зростає на інтервалі $\left(0,\frac{n\delta}{|\lambda_1|+\dots+|\lambda_n|}\right)$ до свого максимального значення $\frac{\delta e^{-n}}{c_{n+1}^{n+1}(|\lambda_1|+\dots+|\lambda_n|)^n}$ і спадає до нуля на інтервалі $\left(\frac{n\delta}{|\lambda_1|+\dots+|\lambda_n|},+\infty\right)$. Отже, для нескінченного інтервалу (a,b) оцінку (4) можна використовувати лише при $\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$, коли оптимальною є стала $4\sqrt[n]{n!/2}$, оскільки для $n>2$ справджуються нерівності $4\sqrt[n]{n!/2}<2n<2nc_n$.

У цій роботі отримано оцінку типу (3), яка уточнює оцінку (4) для всіх значень рівня ε і всіх многочленів L_n, та досліджено деякі її властивості.

2. Основні результати. Розглянемо функцію $q = q(\lambda)$, яка визначається формулами

$$q(\lambda) = \frac{z}{\operatorname{th} z}, \qquad z = \frac{(b-a)|\lambda|}{2}. \tag{6}$$

Вона має такі властивості (див. рис. 1): є парною та монотонно зростає для $\lambda > 0$, також $q(0) = 1$ і $q(\lambda) > 1$, $q(\lambda) > \pm\frac{(b-a)\lambda}{2}$ для $\lambda \in \mathbb{R}$. На інтервалі $\left(0, \frac{2}{b-a}\right)$ справджується подвійна нерівність $1 < q(\lambda) < \frac{1}{\operatorname{th} 1}$. Іншого типу подвійна нерівність $\frac{b-a}{2} < \frac{q(\lambda)}{\lambda} < \frac{b-a}{2}\frac{1}{\operatorname{th} 1}$ справджується для $\lambda \in \left(\frac{2}{b-a}, +\infty\right)$.

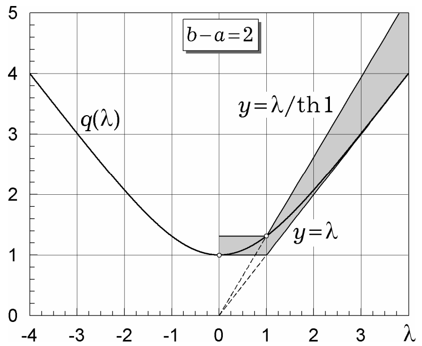

Рис. 1. Графік функції $q(\lambda) = z/\operatorname{th} z$, де $z = (b-a)|\lambda|/2$, для довжини відрізка $b - a = 2$ та графіки частин прямих $y = 1$, $y = 1/\operatorname{th} 1$, $y = z$, $y = z/\operatorname{th} 1$, які її обмежують при $\lambda > 0$.

Введемо числа $q_1 = q(\lambda_1)$, $q_2 = q(\lambda_1)q(\lambda_2)$, $\ldots$, $q_n = q(\lambda_1)\ldots q(\lambda_n)$. Очевидно, що $q_j = q_{j-1}q(\lambda_j)$ для $j = 2, \ldots, n$.

Теорема 1. *Нехай* $L_n(\lambda) = (\lambda + \lambda_1)\ldots(\lambda + \lambda_n)$ *− многочлен з дійсними коренями,* $f \in \mathbf{C}_{\delta, L_n}[a, b]$, *тобто функція* f *задовольняє умову* (1), $b > a$, $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Тоді для* $\varepsilon > 0$ *виконується нерівність*

$$\operatorname{mes} G_{L_n}(\varepsilon, \delta, f) \le \min\left\{F_n\left(\frac{\varepsilon}{\delta}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\right), b - a\right\} =$$

$$= \begin{cases} F_n\left(\frac{\varepsilon}{\delta}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\right), & \varepsilon < \varepsilon_n, \\ b - a, & \varepsilon \ge \varepsilon_n, \end{cases} \tag{7}$$

де

$$F_n(\alpha, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 2nc_n\sqrt[n]{q_n\alpha}, \qquad \varepsilon_n = \frac{\delta}{q_n}\left(\frac{b-a}{2nc_n}\right)^n, \tag{8}$$

стала c_n *визначена формулою* (5).

Зауважимо, що формула (7) випливає з (4) і ε_n^*, визначена формулою (5), дорівнює ε_n, якщо значення функції $q^*(\lambda) = e^{(b-a)|\lambda|}$ у точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ замінити меншими значеннями функції $q(\lambda)$ за формулою (6). Порівняння графіків функцій q^* та q подано на рис. 2.

Д о в е д е н н я. Вважаємо, що $G_{L_n}(\varepsilon, \delta, f) \ne \varnothing$, оскільки нерівність (7) є тривіальною у протилежному випадку. Достатньо також розглядати лише випадок, коли $\min\limits_{x\in[a,b]} g_n(x) \ge \delta$. Це випливає з умови (1) і з рівності множин $G_{L_n}(\varepsilon,\delta,f)$ та $G_{L_n}(\varepsilon,\delta,-f)$.

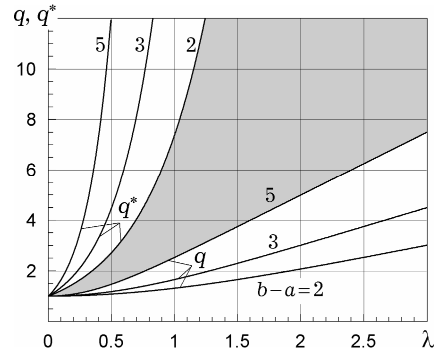

Рис. 2. Графіки функцій $q(\lambda) = z/\operatorname{th} z$ (розташовані ближче до горизонтальної осі) та функцій $q^*(\lambda) = e^{2z}$, де $z = (b-a)|\lambda|/2$, для значень довжини відрізка $b - a = 2, 3, 5$.

Використаємо метод математичної індукції за порядком n диференціального виразу $L_n(d/dx)$. Встановлюючи нерівність (7) для $n=1$, запишемо функцію $g_1(x)$ у вигляді добутку:

$$g_1(x) \equiv f'(x) + \lambda_1 f(x) = e^{-\lambda_1 x}\left(e^{\lambda_1 x} f(x)\right)'.$$

Нехай a_1 та b_1, $a_1 \le b_1$, – деякі точки з множини $G_{L_1}(\varepsilon,\delta,f)$. Тоді

$$\frac{\delta}{\lambda_1}\left(e^{\lambda_1 b_1} - e^{\lambda_1 a_1}\right) \le \int\limits_{a_1}^{b_1} e^{\lambda_1 x} g_1(x)\,dx = e^{\lambda_1 b_1} f(b_1) - e^{\lambda_1 a_1} f(a_1)$$

для $\lambda_1 \ne 0$ і $|f(a_1)| < \varepsilon$, $|f(b_1)| < \varepsilon$. Якщо $\lambda_1 = 0$, то відповідно маємо $\delta(b_1 - a_1) \le \int\limits_{a_1}^{b_1} e^{\lambda_1 x} g_1(x)\,dx < f(b_1) - f(a_1)$. Звідси отримуємо для $b_1 - a_1$ шукану нерівність $\operatorname{th}\dfrac{(b_1 - a_1)|\lambda_1|}{2} < \dfrac{|\lambda_1|\varepsilon}{\delta}$ і при $a_1 \to \inf\limits_{[a,b]} G_{L_1}(\varepsilon,\delta,f)$ та $b_1 \to$ $\to \sup\limits_{[a,b]} G_{L_1}(\varepsilon,\delta,f)$ – оцінку міри

$$\operatorname{mes} G_{L_1}(\varepsilon,\delta,f) \le b_1 - a_1 \le \min\left\{\frac{2}{|\lambda_1|}\operatorname{arth}\frac{\varepsilon|\lambda_1|}{\delta},\ b-a\right\} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{|\lambda_1|}\operatorname{arth}\dfrac{\varepsilon|\lambda_1|}{\delta}, & \varepsilon < \varepsilon_1, \\ b-a, & \varepsilon \ge \varepsilon_1, \end{cases} \tag{9}$$

де $\varepsilon_1 = \dfrac{\delta}{|\lambda_1|}\operatorname{th}\dfrac{(b-a)|\lambda_1|}{2} = \dfrac{\delta}{q_1}\dfrac{b-a}{2c_1}$. Отже, друга з двох формул (8) справджується для числа ε_1. У випадку $\lambda_1 = 0$ отримуємо, що $\varepsilon_1 = (b-a)\delta/2$.

Функція $\dfrac{2}{|\lambda_1|}\operatorname{arth}\dfrac{\varepsilon|\lambda_1|}{\delta}$, де arth – обернена функція до гіперболічної функції th, і лінійна функція $\dfrac{b-a}{\varepsilon_1}\varepsilon = 2q_1\dfrac{\varepsilon}{\delta} = F_1\left(\dfrac{\varepsilon}{\delta},\lambda_1\right)$ строго монотонно зростають від нуля до $b-a$, а їх різниця є від'ємною для $\lambda_1 \ne 0$ і дорівнює нулеві для $\lambda_1 = 0$ на інтервалі $(0,\varepsilon_1)$ зміни ε.

На рис. 3 показано графіки цих функцій для значень параметра $\lambda_1 = 1/2,\ 3/2$ і значень параметра $b-a = 3,\ 5$.

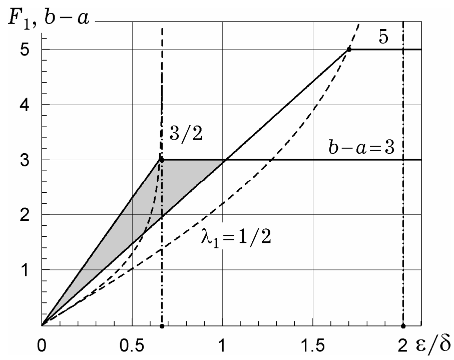

Рис. 3. Графіки функції $F_1(\varepsilon/\delta, \lambda_1)$ – суцільні прямі, суцільні горизонтальні – значення $b-a$, штрихові лінії – графіки функції $(2/\lambda_1)\operatorname{arth}(\varepsilon|\lambda_1|/\delta)$, штрихпунктирні прямі – їх асимптоти.

Формули (7) і (8) для $n=1$ доведено. Доведемо їх виконання для $n>1$, використовуючи припущення індукції − правильність (7) і (8) для порядків диференціальних виразів, менших, ніж n.

Із рівності $g_n = L_{(n)}(d/dx)g_{n-1}$ випливає, що $g_{n-1} \in \mathbf{C}_{\delta, L_{(n)}}[a,b]$ і для $\sigma > 0$ довжина відрізка $[a_n, b_n]$, де

$$a_n = a_n(\sigma) = \inf_{[a,b]} G_{L_{(n)}}(\sigma, \delta, g_{n-1}), \qquad b_n = b_n(\sigma) = \sup_{[a,b]} G_{L_{(n)}}(\sigma, \delta, g_{n-1}),$$

має, згідно з формулами (7)−(9), оцінку

$$b_n - a_n \le \min\left\{2q(\lambda_n)\frac{\sigma}{\delta},\ b-a\right\}. \tag{10}$$

Якщо $a < a_n$ або $b_n < b$, то $f \in \mathbf{C}_{\sigma, L_{n-1}}[a, a_n] \cap \mathbf{C}_{\sigma, L_{n-1}}[b_n, b]$ і за формулою (7) маємо

$$\operatorname{mes}\left(G_{L_{n-1}}(\varepsilon, \sigma, f) \cap [a, a_n]\right) \le \min\left\{F_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}\right),\ b-a\right\}, \tag{11}$$

$$\operatorname{mes}\left(G_{L_{n-1}}(\varepsilon, \sigma, f) \cap [b_n, b]\right) \le \min\left\{F_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}\right),\ b-a\right\}. \tag{12}$$

Із нерівностей (10)−(12) та нерівності

$$\operatorname{mes} G_{L_n}(\varepsilon, \sigma, f) \le \operatorname{mes}\left(G_{L_{n-1}}(\varepsilon, \sigma, f) \cap [a, a_n]\right) +$$

$$+ \operatorname{mes}\left(G_{L_{n-1}}(\varepsilon, \sigma, f) \cap [b_n, b]\right) + b_n - a_n,$$

де $\sigma > 0$, отримуємо оцінку

$$\operatorname{mes} G_{L_n}(\varepsilon, \delta, f) \le \min\left\{\inf_{\sigma>0}\left\{2q(\lambda_n)\frac{\sigma}{\delta} + 2F_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}\right)\right\},\ b-a\right\}. \tag{13}$$

У формулі (13) обчислимо похідну функції F_{n-1} за змінною σ:

$$F'_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}\right) = -4c_{n-1}\sqrt[n-1]{q_{n-1}\frac{\varepsilon}{\sigma^n}}.$$

Тоді значення σ_n для інфімуму визначається зі степеневого рівняння

$\left(\frac{q(\lambda_n)}{\delta}\right)^{n-1} = \frac{q_{n-1}\varepsilon}{(c_n\sigma_n)^n}$. Тут використано властивість $c_n^n = (2c_{n-1})^{n-1}$ степенів c_n^n членів послідовності c_n. Отже, у точці $\sigma_n = c_n \sqrt[n]{\frac{q_{n-1}\varepsilon\delta^{n-1}}{q^{n-1}(\lambda_n)}}$ у формулі (13) досягається інфімум:

$$2q(\lambda_n)\frac{\sigma_n}{\delta} + 2F_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_n}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}\right) =$$

$$= 2q(\lambda_n)\frac{\sigma_n}{\delta} + 4(n-1)c_{n-1}\sqrt[n-1]{q_{n-1}\frac{\varepsilon}{\sigma_n}} = 2nc_n\sqrt[n]{q_n\frac{\varepsilon}{\delta}}.$$

Це доводить теорему, оскільки $F_n(\varepsilon_n/\delta, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = b - a$, тобто справджується друга формула з (8), а з нерівності (13) випливає формула (7). ♦

3. Порівняння результатів. Для порівняння нерівностей (4) і (7) введемо функцію Ψ за формулою $\Psi(\lambda) = q^*(\lambda)/q(\lambda) = e^{2z}\,\mathrm{th}\,z/z$, де $z = (b-a)|\lambda|/2$. Графік функції Ψ подано на рис. 4.

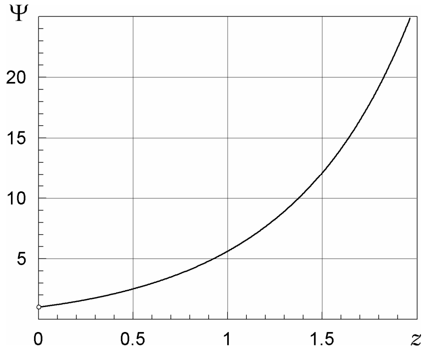

Рис. 4. Графік функції $\Psi(\lambda) = e^{2z}\,\mathrm{th}\,z/z$, де $z = (b-a)|\lambda|/2$.

Позначимо через Ψ_n частку від ділення функції з правої частини (4) на функцію з правої частини (7) для $\varepsilon < \varepsilon_n^*$ (див. рис. 5 для $n = 3$), тоді

$$\Psi_n = \frac{2nc_n\sqrt[n]{e^{(b-a)(|\lambda_1|+\ldots+|\lambda_n|)}\varepsilon/\delta}}{F_n(\varepsilon/\delta, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)} = \sqrt[n]{\Psi(\lambda_1)\ldots\Psi(\lambda_n)}.$$

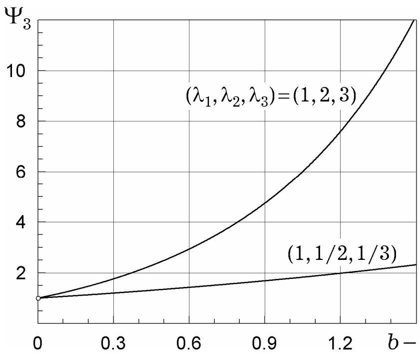

Рис. 5. Графіки функції $\Psi_3 = \sqrt[3]{\Psi(\lambda_1)\Psi(\lambda_2)\Psi(\lambda_3)}$ для наборів $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 1/2, 1/3)$ і $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 2, 3)$.

Поведінка функції Ψ показує, що $\Psi_n \ge 1$ і необмежено зростає у випадку $(b-a)|\lambda_j| \to \infty$ для хоча б одного значення $j \in \{1,\ldots,n\}$.

На рис. 6 для $n = 3$, $\delta = 1000$ і $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/2$, $\lambda_3 = 1/3$ зображено графіки функцій з правих частин оцінок (4) і (7) (відповідно криві *3*, *4* і *2*) і для порівняння наведено графік функції $y = 4\sqrt[3]{3\varepsilon}$ (крива *1*) для випадку $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ та оптимальної сталої $C = 4\sqrt[3]{3}$.

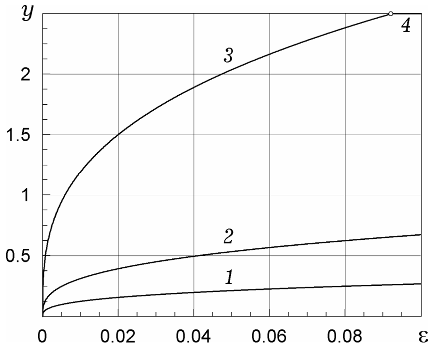

Рис. 6. Графік правої частини нерівності (4): $y = 1.2\sqrt[3]{e^{55/12}\varepsilon}$ – крива *3*, і $y = 2.5$ – пряма *4*, графік функції $y = 4\sqrt[3]{3\varepsilon}$ – крива *1*, і крива *2* – графік функції $y = F_3(\varepsilon/1000, 1, 1/2, 1/3)$ з правої частини нерівності (7) для $n = 3$ при $b - a = 2.5$.

Отже, оцінка (7) є точнішою і якісно кращою, ніж оцінка (4).

Висновки. У роботі отримано оцінку (7) міри множини рівня функцій, які є розв'язками неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і знакосталими правими частинами. Встановлено її основні властивості та переваги над відомими оцінками.

1. *Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. – Москва: Мир, 1986. – 502 с.
   Те саме: *Baker G. A., Jr., Graves-Morris P. R.* Padé approximants. – Cambridge Univ. Press, 1996. – 764 p.
2. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.
3. *Ільків В. С.* Аналоги леми Пяртлі із абсолютними константами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 68–74.
4. *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Про константу в лемі Пяртлі // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2007. – № 601. – С. 12–17.
5. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
6. *Пяртли А. С.* Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства // Функц. анализ и его прилож. – 1969. – **3**, Вып. 4. – С. 59–62.
   Те саме: *Pyartli A. S.* Diophantine approximations on submanifolds of Euclidean space // Funct. Anal. Appl. – 1969. – **3**, No. 4. – P. 303–306.
7. *Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для навантаженого полігармонічного рівняння // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2003. – Вип. 1. – С. 25–34.
8. *Симотюк М. М.* Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 90–95.
9. *Benvenuti P., Mesiar R., Vivona D.* Monotone set functions-based integrals / In: Handbook of measure theory / Ed. E. Pap. – Vol. II. – Amsterdam: Elsevier, 2002. – P. 1329–1379.
10. *Beresnevich V. V.* A Groshev type theorem for convergence on manifolds // Acta Math. Hungar. – 2002. – **94**, No. 1-2. – P. 99–130.

11. *Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kleinbock D. Y., Margulis G. A.* Metric Diophantine approximation: The Khintchine–Groshev theorem for nondegenerate manifolds // Moscow Math. J. – 2002. – **2**, No. 2. – P. 203–225.
12. *Cartan H.* Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications // Ann. Sci. l'École Norm. Sup. – 1928. – **45**, Ser. 3. – P. 255–346.
13. *Dani S. G., Margulis G. A.* Limit distributions of orbits of unipotent flows and values of quadratic forms // I. M. Gelfand Seminar: Adv. in Soviet Math. – 1993. – **16**, Part 1. – P. 91–137.
14. *Ilkiv V. S., Maherovska T. V.* Exact estimate for the measure of the level set of the modulus of a function with high-order constant-sign derivative // Мат. студії. – 2010. – **34**, № 1. – С. 57–64.
15. *Kleinbock D. Y., Margulis G. A.* Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds // Ann. Math. – 1998. – **148**, No. 1. – P. 339–360.
16. *Levin B. Ya.* Lectures on entire functions. – Amer. Math. Soc., 1996. – Ser. Translations of Mathematical Monographs. – Vol. 150. – 248 p.

ОЦЕНКА МЕРЫ МНОЖЕСТВА УРОВНЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Установлена оценка сверху меры множества уровня функций, являющихся решениями неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с правыми частями, которые не имеют нулей на некотором промежутке. Такие оценки используются при исследовании целых и мероморфных функций, для изучения проблемы малых знаменателей для уравнений с частными производными, в метрической теории диофантовых приближений, в теории меры и интеграла.

THE ESTIMATE OF A MEASURE OF THE LEVEL SET FOR SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

The upper estimate of a measure of the level set for functions which are solutions of nonhomogeneous ordinary differential equations with constant coefficients and with right-hand sides having no zeros on a certain interval is established. Such estimates can be used to investigating entire and meromorphic functions, to studying the problem of small denominators for partial differential equations, in metric theory of Diophantine approximations, in theory of measure and integral.

[1] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 02.04.13