УДК 517.97

С. М. Бак

ІСНУВАННЯ ГЕТЕРОКЛІНІЧНИХ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ У СИСТЕМІ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

За допомогою методу критичних точок і принципу концентрованої компактності досліджено питання про існування гетероклінічних біжучих хвиль для системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці.

Вступ. Нескінченновимірні гамільтонові системи широко використовуються в нелінійній фізиці для моделювання складних оптичних і квантових явищ. Останнім часом значну увагу приділяють моделям, дискретним за просторовою змінною: модель Френкеля – Конторової, системи Фермі – Пасти – Улама, дискретні нелінійні рівняння Шредінгера, дискретні рівняння sine-Gordon, ланцюги осциляторів тощо. Подібні системи є цікавими з огляду на численні застосування у фізиці [3, 5, 6].

Важливим класом розв'язків таких систем є біжучі хвилі. Досить детальні результати про біжучі хвилі в ланцюгах Фермі – Пасти – Улама можна знайти в працях О. Панкова (див., наприклад, оглядову роботу [12]). У той же час з дослідження біжучих хвиль у ланцюгах осциляторів відомі лише декілька праць, зокрема, [9], результати якої отримано методами теорії біфуркацій, а також [1, 4], в яких отримано умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль за допомогою методу критичних точок.

У статті [13] вивчались періодичні розв'язки для системи осциляторів, розміщених на двовимірних ґратках, а в статтях [2, 7, 8] – біжучі хвилі у таких системах. Зокрема, в [7] розглядалась система з непарною 2π-періодичною нелінійністю, а у [8] досліджувались лінійні осцилятори. Умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль одержано в [2].

У праці [10] вивчались гетероклінічні біжучі хвилі для дискретного рівняння sine-Gordon з лінійною взаємодією сусідніх атомів на одновимірній ґратці.

У цій статті за допомогою методу критичних точок і принципу концентрованої компактності досліджено питання про існування гетероклінічних біжучих хвиль для дискретного рівняння sine-Gordon на двовимірній ґратці.

Метою статті є одержання умов існування гетероклінічних біжучих хвиль для системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів з потенціалом $V(r) = K(1 - \cos r)$ на двовимірній цілочисловій ґратці.

Постановка задачі. У цій статті вивчаємо рівняння, які описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів з потенціалом $V(r) = K(1 - \cos r)$, розміщених на плоскій цілочисловій ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ – узагальнена координата (n,m)-го осцилятора в момент часу t. Припускаємо, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Рівняння руху такої системи мають вигляд

$$c^2\ddot{q}_{n,m}(t) = c_0^2\big(q_{n+1,m}(t) + q_{n-1,m}(t) + q_{n,m+1}(t) + q_{n,m-1}(t) - \\ - 4q_{n,m}(t)\big) - K\sin\big(q_{n,m}(t)\big), \qquad (n,m) \in \mathbb{Z}^2. \tag{1}$$

Тут c – швидкість поширення хвилі. Рівняння (1) представляє собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь і є двовимірним аналогом дискретного рівняння sine-Gordon з лінійною взаємодією сусідніх атомів. Його також можна записати у вигляді

$$c^2\ddot{q}_{n,m} = c_0^2(\Delta q)_{n,m} - K\sin(q_{n,m}), \tag{2}$$

де $(\Delta q)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} + q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 4q_{n,m}$ – двовимірний дискретний оператор Лапласа.

Варто зазначити, що в цьому випадку потенціал $V(r) = K(1-\cos r)$ не задовольняє умову (h) з [1, 2], а тому аналогічним чином результати про існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль одержати не можна.

Для профілю біжучої хвилі $u(s)$, де $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$, $s \in \mathbb{R}$, рівняння (2) набуде вигляду

$$c^2u''(s) = c_0^2\big(u(s+\cos\varphi) + u(s-\cos\varphi) + u(s+\sin\varphi) +$$

$$+ u(s-\sin\varphi) - 4u(s)\big) - K\sin(u(s)). \tag{3}$$

Зазначимо, що в рівняння (3) швидкість c входить тільки в квадраті. Звідси випливає, що якщо функція $u(s)$ задовольняє рівняння (3), то існують дві біжучі хвилі з таким профілем і швидкостями $\pm c$.

Будемо розглядати випадок гетероклінічних біжучих хвиль, для знаходження профілю яких достатньо знайти розв'язок рівняння (3), який задовольняє умови

$$\lim_{s\to-\infty} u(s) = -\pi, \qquad \lim_{s\to+\infty} u(s) = \pi. \tag{4}$$

Надалі під розв'язком рівняння (3) розуміємо функцію $u(s)$ класу $C^2(\mathbb{R})$, яка задовольняє рівняння (3) для всіх $s \in \mathbb{R}$.

При певних значеннях кута φ задачу (3), (4) можна звести до одновимірного випадку, тобто до ланцюга осциляторів (одновимірної ґратки).

Для $\varphi = \dfrac{\pi k}{2}$, $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$ маємо

$$\cos\frac{\pi k}{2} = \cos\pi n = (-1)^n, \qquad \sin\frac{\pi k}{2} = \sin\pi n = 0.$$

Тоді

$$c^2u''(s) = c_0^2\big(u(s+(-1)^n) + u(s-(-1)^n) + 2u(s) - 4u(s)\big) - K\sin(u(s)) =$$

$$= u(s+1) + u(s-1) - 2u(s) + c_0u(s) - K\sin(u(s)).$$

Для $\varphi = \dfrac{\pi k}{2}$, $k = 2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$ маємо

$$\cos\frac{\pi k}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = 0, \qquad \sin\frac{\pi k}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)\right) = (-1)^n.$$

Тоді

$$c^2u''(s) = c_0^2\big(u(s) + u(s) + u(s+(-1)^n) + u(s-(-1)^n) - 4u(s)\big) -$$

$$- K\sin(u(s)) = c_0^2\big(u(s+1) + u(s-1) - 2u(s)\big) - K\sin(u(s)).$$

Для $\varphi = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$ маємо

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2n\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = (-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2n\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = (-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тоді

$$c^2u''(s) = c_0^2\left(2u\left(s+(-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2u\left(s-(-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-4u(s)\right)-$$

$$-K\sin(u(s)) = c_0^2\left(2u\left(s+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+2u\left(s-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-4u(s)\right)-K\sin(u(s)).$$

Для $\varphi = \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k = 2n+1$, $n\in\mathbb{Z}$ маємо

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(2n+1)\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\pi n\right)=(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(2n+1)\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\pi n\right)=(-1)^{n}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тоді

$$c^2u''(s)= c_0^2\left(u\left(s+(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+u\left(s-(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+u\left(s+(-1)^{n}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+u\left(s-(-1)^{n}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-4u(s)\right)-K\sin(u(s)) =$$

$$= c_0^2\left(2u\left(s+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2u\left(s-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-4u(s)\right)-K\sin(u(s)).$$

Введемо заміну $\psi(s)=u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)$, $\psi''(s)=\frac{1}{2}u''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)$. Тоді, оскільки

$$c^2u''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)=c_0^2\left(2u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-4u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)\right)-K\sin\left(u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)\right),$$

$$c^2u''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)=c_0^2\left(2u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(s+1)\right)+2u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(s-1)\right)-\right.$$

$$\left.-4u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)\right)-K\sin\left(u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s\right)\right)$$

і

$$u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(s+1)\right)=\psi(s+1),\qquad u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(s-1)\right)=\psi(s-1),$$

то, виконавши заміну, матимемо рівняння

$$2c^2\psi''(s)=c_0^2\big(2\psi(s+1)+2\psi(s-1)-4\psi(s)\big)-K\sin(\psi(s)),$$

$$c^2\psi''(s)=c_0^2\big(\psi(s+1)+\psi(s-1)-2\psi(s)\big)-\frac{K}{2}\sin(\psi(s)).$$

Таким чином, для кутів $\varphi=\frac{\pi k}{2}$ і $\varphi=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, отримано рівняння, вивчене у статті [10], тобто випадок одновимірної ґратки.

Варіаційне формулювання задачі. З рівнянням (3) пов'яжемо функціонал

$$J(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2}{2} (u'(s))^2 - \frac{c_0^2}{2} \big(u(s+\cos\varphi) - u(s) \big)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{c_0^2}{2} \big(u(s+\sin\varphi) - u(s) \big)^2 + K\big(1 + \cos(u(s))\big) \right] ds \,, \tag{5}$$

визначений на гільбертовому просторі $X := \{ u \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) : u' \in L^2(\mathbb{R}) \}$ зі скалярним добутком

$$(u, v)_X = u(0)v(0) + \int_{\mathbb{R}} u'(\tau) v'(\tau) \, d\tau \,.$$

Позначимо $\mathcal{M}_{-\pi,\pi} = \{ u \in X : u(-\infty) = -\pi, \, u(+\infty) = \pi \}$.

Нехай $v_0 : \mathbb{R} \to [-\pi; \pi]$ – монотонна функція в $C^\infty(\mathbb{R})$ така, що $v_0(s) = -\pi$ для $s < -1$ і $v_0(s) = \pi$ для $s > 1$. Тоді означимо функціонал $\Psi : H^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$\Psi(v) := J(v_0 + v) \,.$$

Неважко переконатися, що $\Psi(v) < \infty$ для всіх $v \in H^1(\mathbb{R})$. І навпаки, точку мінімуму u функціонала J на $\mathcal{M}_{-\pi,\pi}$ можна записати у вигляді $u = v_0 + v$ для деякого $v \in H^1(\mathbb{R})$ (див. [10]). Більше того, функціонал Ψ є неперервно диференційовним на $H^1(\mathbb{R})$.

Лема 1. *Нехай* u *– критична точка функціонала* Ψ *і* $u = v_0 + v \in \mathcal{M}_{-\pi,\pi} \subset X$. *Тоді* $u \in C^2(\mathbb{R})$ *є розв'язком рівняння* (3), *який задовольняє умови* (4).

Д о в е д е н н я. Нехай $v \in H^1(\mathbb{R})$ – критична точка функціонала Ψ. Тоді $\langle \Psi'(v), h \rangle = 0$ для будь-якого $h \in H^1(\mathbb{R})$:

$$0 = \langle \Psi'(v), h \rangle = \langle J'(u), h \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[c^2 u'(s) h'(s) + c_0^2 \big(u(s+\cos\varphi) + \right.$$

$$+ u(s-\cos\varphi) - 2u(s) \big) h(s) + c_0^2 \big(u(s+\sin\varphi) +$$

$$\left. + u(s-\sin\varphi) - 2u(s) \big) h(s) - K \sin(u(s)) h(s) \right] ds \,.$$

Це означає, що u задовольняє рівняння (3) у сенсі узагальнених функцій (слабкий розв'язок). Нагадаємо, що за теоремою вкладення $X \subset C_b(\mathbb{R})$, де $C_b(\mathbb{R})$ – простір обмежених і неперервних функцій на $\mathbb{R}$, а отже, $u \in C_b(\mathbb{R})$. Таким чином, права частина рівняння (3) – неперервна функція. Звідси маємо, що u'' – неперервна функція і, отже, $u \in C^2(\mathbb{R})$ – розв'язок рівняння (3) у звичайному сенсі. ♦

Для спрощення записів позначимо

$$(Au)(s) := u(s+\cos\varphi) - u(s), \qquad (Bu)(s) := u(s+\sin\varphi) - u(s) \,.$$

Тоді за лемою 3.1 зі статті [2]

$$\|A(s)\|_{L^2(\mathbb{R})} \le |\cos\varphi| \, \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})} \,, \qquad u \in X \,,$$

$$\|B(s)\|_{L^2(\mathbb{R})} \le |\sin\varphi| \, \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})} \,, \qquad u \in X \,,$$

тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Au(s)|^2\, ds \le \cos^2\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} |u'(s)|^2\, ds, \qquad u \in X\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Bu(s)|^2\, ds \le \sin^2\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} |u'(s)|^2\, ds, \qquad u \in X\,. \tag{6}$$

Це означає, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2 - c_0^2}{2}(u'(s))^2 + K\bigl(1 + \cos(u(s))\bigr)\right] ds \le J(u) \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 + K\bigl(1 + \cos(u(s))\bigr)\right] ds, \qquad u \in X\,.$$

Позначимо

$$I_\gamma(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\gamma(u'(s))^2 + K\bigl(1 + \cos(u(s))\bigr)\right] ds\,,$$

де $\gamma > 0$. Тоді за лемою 3.1 з [10] функціонал I_γ досягає мінімуму на $\mathcal{M}_{-\pi,\pi}$, причому

$$\min_{u\in\mathcal{M}_{-\pi,\pi}} I_\gamma(u) = \vartheta := 2\sqrt{\gamma K}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1 + \cos(\xi)}\, d\xi\,. \tag{7}$$

Більше того, з тим самим ϑ маємо

$$\inf_{T>0}\inf\left\{\int_{-T}^{T}\left[\gamma(u'(s))^2 + K\bigl(1+\cos(u(s))\bigr)\right] ds : \begin{array}{c} u \in H^1(-T,T), \\ u(-T) = -\pi,\ u(T) = \pi \end{array}\right\} = \vartheta\,. \tag{8}$$

Як безпосередній наслідок з леми 1, оцінюючи інтеграл у (7), отримуємо

$$8\sqrt{(c^2 - c_0^2)K} \le \inf_{u\in\mathcal{M}_{-\pi,\pi}} J(u) \le 8c\sqrt{K}\,. \tag{9}$$

Таким чином, з нерівностей (9) і $1 + \cos(u) \ge 0$ випливає, що

$$\frac{c^2 - c_0^2}{2}\|u_0'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \le J(u_0) \le 8c\sqrt{K}\,. \tag{10}$$

Використовуючи нерівності (9), неважко довести наступну лему (див. [10]).

Лема 2. *Нехай* $c^2 > c_0^2$. *Тоді точка глобального мінімуму* u_0 *функціонала* J *на* $\mathcal{M}_{-\pi,\pi}$ *задовольняє нерівність*

$$\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < (2k + 3)\pi\,,$$

де $k := \max\left\{æ \in \mathbb{N}_0 : (2æ + 1) \le \sqrt{\dfrac{c^2}{c^2 - c_0^2}}\right\}$.

Основний результат. Введемо скорочену версію функціонала J для параметра $T > 1$ і $\eta \in \mathbb{R}$:

$$J_T(u;\ \eta) := \int_{-1/2}^{1/2}\int_{\eta-T+1/2+\tau}^{\eta+T-1/2+\tau}\frac{c^2}{2}[u'(s)]^2\, ds\, d\tau -$$

$$-\int_{\eta-T+1/2}^{\eta+T-1/2}\frac{c_0^2}{2}\left[u\left(s + \cos\varphi + \frac{1}{2}\right) - u\left(s - \frac{1}{2}\right)\right]^2 ds -$$

$$- \int\limits_{\eta-T+1/2}^{\eta+T-1/2} \frac{c_0^2}{2}\left[u\left(s+\sin\varphi+\frac{1}{2}\right)-u\left(s-\frac{1}{2}\right)\right]^2 ds +$$

$$+ \int\limits_{\eta-T+1/2}^{\eta+T-1/2} K[1+\cos(u(s))]\, ds\,.$$

Для одержання основного результату нам знадобиться дискретний варіант принципу концентрованої компактності (див. [10], а також [11] у неперервному випадку).

Лема 3. *Нехай* $c^2 > c_0^2$ *і* $\inf J(u)\big|_{\mathcal{M}_{-\pi,\pi}} \le \theta < \infty$. *Тоді будь-яка послідовність* $(u_n) \subset \mathcal{M}_{-\pi,\pi}$ *така, що*

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \theta\,, \tag{11}$$

містить підпослідовність (u_n) *(для якої залишаємо те саме позначення), яка задовольняє одну з трьох умов*:

(***i***) «*концентрація*»: *існує послідовність* $(\eta_n) \subset \mathbb{R}$ *така, що для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує* $T_0 > 0$ *таке, що для всіх* $T > T_0$

$$J(u_n) - J_T(u_n;\, \eta_n) < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,;$$

(***ii***) «*розпливання*»: *для всіх* $T > 0$ *виконується*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\eta\in\mathbb{R}} J_T(u_n;\, \eta) = 0\,; \tag{12}$$

(***iii***) «*розщеплення*»: *існує* $\varepsilon_1 > 0$ *таке, що для кожного* $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ *існують послідовності* f_n, $g_n \in X$ *такі, що*

$$|u_n - (f_n + g_n - \pi)| \le \varepsilon\,,$$

$$\left|J(u_n) - \big(J(f_n) + J(g_n)\big)\right| \le \varepsilon\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}\big(\operatorname{supp}(f_n'), \operatorname{supp}(g_n')\big) = \infty\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} J(f_n) = \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} J(g_n) = \beta$$

для деяких $0 < \alpha$, $\beta < \theta$ (π *у першій нерівності необхідне для забезпечення* $J(f_n) < \infty$ *і* $J(g_n) < \infty$).

Основним результатом цієї статті є

Теорема 1. *Нехай* $c^2 > \frac{9}{8}c_0^2$. *Тоді існує точка мінімуму* $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ *функціонала* J *на* $\mathcal{M}_{-\pi,\pi} \subset X$.

За лемою 1 ця точка мінімуму і є розв'язком рівняння (3), який задовольняє умови (4).

Доведення цієї теореми полягає у виключенні останніх двох випадків (***ii***) та (***iii***) принципу концентрованої компактності.

Наступні дві леми виключають можливість розпливання і розщеплення мінімізуючої послідовності функціонала J.

Лема 4. *Нехай* $c^2 > \frac{9}{8}c_0^2$ *і* $(u_n) \subset \mathcal{M}_{-\pi,\pi}$ *– мінімізуюча послідовність функціонала* J. *Тоді умова* (***ii***) *не виконується.*

Лема 5. *Нехай* $c^2 > \frac{9}{8}c_0^2$ *і* $(u_n) \subset \mathcal{M}_{-\pi,\pi}$ *– мінімізуюча послідовність функціонала* J. *Тоді умова* (***iii***) *не виконується.*

Леми 4 і 5 доводяться аналогічно, як леми 5.1 і 5.2 у статті [10].

Д о в е д е н н я **теореми 1**. Нерівності (9) означають, що функціонал J є обмеженим знизу на X. Нехай $(u_n) \subset \mathcal{M}_{-\pi,\pi}$ – мінімізуюча послідовність функціонала J. За лемою 3 для $(u_n) \subset \mathcal{M}_{-\pi,\pi}$ виконується одна з трьох умов (***i***)–(***iii***). З лем 4 і 5 випливає, що виконується умова (***i***). Отже, для фіксованого $\varepsilon > 0$ можна вибрати послідовність $(\eta_n) \subset \mathbb{R}$ і $T_0 > 0$ такі, що

$$J(u_n) - J_T(u_n; \eta_n) < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Позначимо $v_n(s) := u_n(\eta_n + s)$. Послідовність (v_n) є обмеженою в просторі X, оскільки $\|v_n'\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_n'\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \dfrac{2}{c^2 - c_0^2} J(u_n)$ і $|v(0)| < 3\pi$ згідно з оцінкою (10) і лемою 2. Оскільки X – гільбертів простір, то існує підпослідовність (для якої залишаємо позначення (v_n)), яка збігається слабко. На відрізку $[-T_0, T_0]$ слабка збіжність (v_n) означає сильну збіжність в $L^2(-T_0, T_0)$ і $C^0[-T_0, T_0]$ до деякої границі u. Отже, для всіх $n > N$ з достатньо великим N маємо

$$\left| \int_{-T_0}^{T_0 - 1} \left[(Av_n(s))^2 - (Au_n(s))^2 \right] ds \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \int_{-T_0}^{T_0 - 1} \left[(Bv_n(s))^2 - (Bu_n(s))^2 \right] ds \right| < \varepsilon$$

і

$$\left| \int_{-T_0}^{T_0} \left[\cos(v_n(s)) - \cos(u_n(s)) \right] ds \right| < \varepsilon.$$

Оскільки слабка збіжність означає, що $\|u'\|^2_{L^2(-T_0,T_0)} \le \liminf\limits_{n\to\infty,\, n\in\mathbb{N}} \|v_n'\|^2_{L^2(-T_0,T_0)}$, то робимо висновок, що $J_{T_0}(u) \le \liminf\limits_{n\to\infty,\, n\in\mathbb{N}} J_{T_0}(v_n; 0)$.

Виберемо довільну монотонну послідовність $T_k \to \infty$ з $k \in \mathbb{N}_0$ і припустимо, що u вже визначено як рівномірну границю послідовності (v_n) на відрізку $[-T_k, T_k]$. Оскільки (v_n) все ще обмежена в X, то можна знову вибрати підпослідовність (для якої залишаємо позначення (v_n)), яка збігається рівномірно в $C^0[-T_{k+1}, T_{k+1}]$ до деякої границі $\tilde{u}$, яка за побудовою співпадає з u на $[-T_k, T_k]$.

Звідси випливає, що функція u на $\mathbb{R}$ задовольняє умови (4) і з константою $C = C(c, c_0, K)$

$$J(u) = \lim_{T\to\infty} J_T(u, 0) \le \lim_{T\to\infty} \liminf_{n\to\infty,\, n\in\mathbb{N}} J_T(v_n, 0) \le$$

$$\le \lim_{T\to\infty} \liminf_{n\to\infty,\, n\in\mathbb{N}} J(v_n) + C\varepsilon \le \lim_{n\to\infty} J(u_n) + C\varepsilon,$$

зокрема, $u' \in L^2(\mathbb{R})$. Таким чином, $u \in \mathcal{M}_{-\pi,\pi}$. З огляду на довільність ε, з останньої нерівності випливає, що

$$J(u) \le \lim_{n\to\infty} J(u_n).$$

А це означає, що u є точкою мінімуму функціонала J на $\mathcal{M}_{-\pi,\pi}$. ♦

Таким чином, одержано умови існування гетероклінічних біжучих хвиль для системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів з потенціалом $V(r) = K(1 - \cos r)$ на двовимірній ґратці. У найближчій перспективі планується одержання умов існування гомоклінічних і періодичних біжучих хвиль для таких систем.

1. *Бак С. М.* Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів // Мат. студії. – 2006. – **26**, № 2. – С. 140–153.
2. *Бак С. Н., Панков А. А.* Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках // Укр. мат. вісн. – 2010. – **7**, № 2. – С. 154–175.
   Те саме: *Bak S. N., Pankov A. A.* Traveling waves in systems of oscillators on 2D-lattices // J. Math. Sci. – 2011. – **174**, No. 4. – P. 437–452.
3. *Aubry S.* Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization // Physica D. – 1997. – **103**, No. 1-4. – P. 201–250.
4. *Bak S. M.* Periodic traveling waves in chains of oscillators // Commun. Math. Anal. – 2007. – **3**, No. 1. – P. 19–26.
5. *Braun O. M., Kivshar Yu. S.* Nonlinear dynamics of the Frenkel–Kontorova model // Phys. Rep. – 1998. – **306**, No. 1-2. – P. 1–108.
6. *Braun O. M., Kivshar Y. S.* The Frenkel–Kontorova model: Concepts, methods and applications. – Berlin: Springer, 2004. – xviii + 472 p.
7. *Fečkan M., Rothos V. M.* Travelling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions // Nonlinearity. – 2007. – **20**, No. 2. – P. 319–341.
8. *Friesecke G., Matthies K.* Geometric solitary waves in a 2D mass-spring lattice // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. – 2003. – **3**, No. 1. – P. 105–114.
9. *Iooss G., Kirchgässner K.* Travelling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators // Commun. Math. Phys. – 2000. – **211**, No. 2. – P. 439–464.
10. *Kreiner C.-F., Zimmer J.* Heteroclinic travelling waves for the lattice sine-Gordon equation with linear pair interaction // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A. – 2009. – **25**, No. 3. – P. 915–931.
11. *Lions P. L.* The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. Part 1; Part 2 // Ann. Inst. H. Poincaré. (C) Anal. Non Linéaire. – 1984. – **1**, No. 2; No. 4. – P. 109–145; P. 223–283.
12. *Pankov A.* Travelling waves and periodic oscillations in Fermi–Pasta–Ulam lattices. – London: Imperial College Press, 2005. – xv +194 p.
13. *Srikanth P.* On periodic motions of two-dimentional lattices // Proc. Conf. «Functional analysis with current applications in science, technology and industry» (Aligarh, India, Dec. 1996). – Pitman Res. Notes Math. Ser. – 1998. – Vol. 377. – P. 118–122.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИХ БЕГУЩИХ ВОЛН В СИСТЕМЕ ОСЦИЛЛЯТОРОВ НА ДВУМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ

С помощью метода критических точек и принципа концентрированной компактности исследован вопрос о существовании гетероклинических бегущих волн для системы линейно связанных нелинейных осцилляторов на двумерной решетке.

EXISTENCE OF HETEROCLINIC TRAVELLING WAVES IN A SYSTEM OF NONLINEAR OSCILLATORS ON TWO DIMENSIONAL LATTICE

By using the critical points method and the concentration-compactness principle, the problem of existence of heteroclinic travelling waves for a system of linearly coupled nonlinear oscillators in a two-dimensional lattice is studied.

Вінницьк. держ. пед. ун-т
ім. Михайла Коцюбинського, Вінниця

Одержано
22.02.13