

## ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ПЛАСТИНОК

*Предложен метод решения задачи электровязкоупругости для многосвязных пластин. Методом малого параметра задача сведена к рекуррентной последовательности задач электровязкоупругости, которые решаются с использованием комплексных потенциалов. Разработана методика определения по комплексным потенциалам приближений основных характеристик электроупругого состояния (напряжений, компонент векторов индукции и напряженности электрического поля) в любой момент времени после приложения нагрузки. В качестве примера приведено решение задачи для пластинки с эллиптическим отверстием. Численными исследованиями установлено значительное влияние времени на значения основных характеристик электровязкоупругого состояния.*

**Введение.** В различных отраслях современной техники широкое применение получили элементы из пьезоэлектрических материалов. В связи с этим возникла необходимость разработки методов определения их электроупругого состояния при действии на них механических сил и электрических полей. Общие подходы решения таких задач предложены в работах [2, 11], а в монографии [3] разработаны методы решения задач электровязкоупругости для многосвязных областей, позволяющие определять напряженно-деформированное состояние пластинок с отверстиями, трещинами. Но в указанных работах не учитывались вязкоупругие свойства материалов, за счет которых возникающее мгновенное напряженно-деформированное состояние со временем изменяется. Учету этого явления и посвящена данная статья, в которой решение задачи линейной вязкоупругости для пьезоэлектрической пластинки сведено к последовательности задач электроупругости, которые решаются с использованием комплексных потенциалов. На примере решения задачи для пластинки с эллиптическим отверстием показано влияние времени на значения напряжений.

**Постановка задачи.** Рассмотрим отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$  находящуюся в условиях обобщенного плоского электроупругого состояния конечную пьезопластинку, занимающую многосвязную область  $S$ , ограниченную внешним контуром  $L_0$  и контурами отверстий  $L_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, \mathcal{L}$ . К контурам пластинки приложены механические и электрические воздействия. Во внутренних точках области  $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ ,  $r = 1, \dots, R$ , действуют сосредоточенные силы и электрические заряды. Если внешний контур  $L_0$  полностью уходит в бесконечность, то будем иметь бесконечную пластинку с отверстиями. В этом случае будем считать, что на бесконечности заданы напряжения  $\sigma_x^\infty$ ,  $\sigma_y^\infty$ ,  $\tau_{xy}^\infty$ , угол жесткого поворота пластинки как целого  $\omega_3^\infty$ , а также компоненты векторов индукций  $D_x^\infty$ ,  $D_y^\infty$  или напряженностей  $E_x^\infty$ ,  $E_y^\infty$  электрического поля. Будем считать, что по упругим свойствам пластинка является вязкоупругой, электрические свойства материала с течением времени не изменяются.

Для рассматриваемой пластинки решим задачу электровязкоупругости, заключающуюся в определении изменяющегося во времени электроупругого состояния. Эту задачу будем решать, используя принцип Вольтерра [13], в соответствии с которым нужно сначала решить задачу электроупругости без учета времени, а затем в полученном решении заменить

упругие постоянные соответствующими временными операторами и определить их воздействия во времени.

**Основные соотношения электроупругости.** Решение задачи электроупругости без учета времени сводится к интегрированию основной системы уравнений электроупругости [3], состоящей из

– уравнений равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

– уравнений электростатики:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0; \quad (2)$$

– уравнений электроупругого состояния:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{16}\tau_{xy} + g_{11}D_x + g_{21}D_y, \\ \varepsilon_y &= s_{12}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{26}\tau_{xy} + g_{12}D_x + g_{22}D_y, \\ \gamma_{xy} &= s_{16}\sigma_x + s_{26}\sigma_y + s_{66}\tau_{xy} + g_{16}D_x + g_{26}D_y, \\ E_x &= -g_{11}\sigma_x - g_{12}\sigma_y - g_{16}\tau_{xy} + \beta_{11}D_x + \beta_{12}D_y, \\ E_y &= -g_{21}\sigma_x - g_{22}\sigma_y - g_{26}\tau_{xy} + \beta_{12}D_x + \beta_{22}D_y; \end{aligned} \quad (3)$$

– соотношений Коши и потенциальности электрического поля:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ E_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  и  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  – компоненты тензоров напряжений и деформаций;  $u$ ,  $v$  – проекции вектора перемещений;  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $E_x$ ,  $E_y$  и  $\phi$  – компоненты векторов индукции, напряженности и потенциал электрического поля;  $s_{ij}$  – коэффициенты деформаций материала, измеренные при постоянных индукциях электрического поля;  $g_{ki}$  – пьезоэлектрические коэффициенты деформаций и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях;  $\beta_{kl}$  – коэффициенты диэлектрической восприимчивости, измеренные при постоянных напряжениях.

При этом имеет место соотношение совместности Сен-Венана

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad (5)$$

а остальные соотношения совместности деформаций выполняются тождественно.

Если задачу электроупругости решать с использованием обобщенных комплексных потенциалов, то определение электроупругого состояния пьезопластики при использовании теории функций комплексного переменного сводится к нахождению комплексных потенциалов электроупругости  $\Phi_k(z_k)$  из соответствующих граничных условий. После нахождения комплексных потенциалов основные характеристики (напряжения, перемещения, индукции и потенциалы) вычисляются по формулам [3]

$$\begin{aligned}
(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}) \Phi'_k(z_k), \\
(u, v, \varphi) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k, r_k^0) \Phi_k(z_k) + (-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0, \varphi_0), \\
(D_x, D_y) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}) \Phi'_k(z_k), \\
(E_x, E_y) &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (r_k^0, \mu_k r_k^0) \Phi'_k(z_k).
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$z_k = x + \mu_k y, \tag{7}$$

$\mu_k$  – корни характеристического уравнения задачи электроупругости

$$\ell_{4s}(\mu) \ell_{2\beta}(\mu) - \ell_{3g}^2(\mu) = 0, \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
\ell_{4s}(\mu) &= s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22}, \\
\ell_{3g}(\mu) &= g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22}, \\
\ell_{2\beta}(\mu) &= -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22};
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\lambda_{1k} = \mu_k^2, \quad \lambda_{2k} = 1, \quad \lambda_{6k} = -\mu_k, \quad \lambda_{7k} = \nu_k \mu_k, \quad \lambda_{8k} = -\nu_k,$$

$$p_k = s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} + (g_{11}\mu_k - g_{21})\nu_k,$$

$$q_k = s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + \left(g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k}\right)\nu_k,$$

$$r_k^0 = g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})\nu_k; \tag{10}$$

$$\nu_k = -\frac{\ell_{3g}(\mu_k)}{\ell_{2\beta}(\mu_k)}; \tag{11}$$

$-\omega_3 y + u_0, \omega_3 x + v_0$  – жесткие перемещения тела как целого;  $\omega_3$  – угол поворота пластинки в плоскости  $Oxy$  против часовой стрелки, причем  $\omega_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ ;  $u_0, v_0$  – компоненты поступательного движения тела;  $\varphi_0$  – нулевой уровень потенциалов электрического поля.

Функции  $\Phi_k(z_k)$  для неподкрепленных контуров  $L_\ell$  (первая основная задача) должны удовлетворять граничным условиям [3]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, \nu_k) \Phi_k(z_k) = \pm \int_0^s (-Y_{\ell n}, X_{\ell n}, D_{\ell n}) ds + (c_{\ell 1}, c_{\ell 2}, c_{\ell 3}) \tag{12}$$

при задании на контуре индукции электрического поля  $D_{\ell n}$  или

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, r_k^0) \Phi_k(z_k) &= \\
&= \left( \mp \int_0^s Y_{\ell n} ds, \mp \int_0^s -X_{\ell n} ds, \varphi_{\ell^*} \right) + (c_{\ell 1}, c_{\ell 2}, -\varphi_0),
\end{aligned} \tag{13}$$

если на контуре задан потенциал электрического поля  $\varphi_{\ell^*}$ . Для контуров, на которых заданы перемещения  $u_{\ell^*}$ ,  $v_{\ell^*}$  (вторая основная задача), граничные условия имеют вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k, v_k) \Phi_k(t_k) = \left( u_{\ell^*} + \omega_3 y - u_0, v_{\ell^*} - \omega_3 x - v_0, \pm \int_0^s D_{\ell n} ds + c_{\ell 3} \right) \quad (14)$$

при задании на контурах индукции или

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_k, q_k, r_k^0) \Phi_k(t_k) = (u_{\ell^*} + \omega_3 y - u_0, v_{\ell^*} - \omega_3 x - v_0, \varphi_{\ell^*} - \varphi_0), \quad (15)$$

если на контуре задан потенциал электрического поля. В (12)–(15) верхние знаки в правой части относятся к внешнему контуру, нижние – к контурам отверстий и тонких колец. При идеальном механическом и электрическом контакте пластинки с включением с областью  $S^{(\ell)}$ , граничные условия на контуре  $L_\ell$  имеют вид [3, 6]

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 [(1, \mu_k, p_k, q_k, v_k, r_k^0) \Phi_k(z_k) - \\ - (1, \mu_k^{(\ell)}, p_k^{(\ell)}, q_k^{(\ell)}, v_k^{(\ell)}, r_k^{0(\ell)}) \Phi_k^{(\ell)}(z_k^{(\ell)})] = \\ = (c_{\ell 1}, c_{\ell 2}, \omega_3 y - u_0 - \omega_3^{(\ell)} y + u_0^{(\ell)}, \\ - \omega_3 x - v_0 + \omega_3^{(\ell)} x + v_0^{(\ell)}, c_{\ell 3}, \varphi_0), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\Phi_k^{(\ell)}(z_k^{(\ell)})$  – комплексные потенциалы для включения с областью  $S^{(\ell)}$ ;  $c_{\ell i}$ ,  $\varphi_0$ ,  $u_0$ ,  $u_0^{(\ell)}$ ,  $v_0$ ,  $v_0^{(\ell)}$  – постоянные. В случае абсолютно жесткого включения на контуре  $L_\ell$  должно выполняться также условие [3]

$$\sum_{k=1}^3 (\beta_{k\ell 1} - \bar{\beta}_{k\ell 1}) = 0, \quad (17)$$

в котором  $\beta_{k\ell 1}$  – вычет функции  $\Phi_{k0}(z_k)$  в точке  $z_{k\ell}$ .

Комплексные потенциалы  $\Phi_k(z_k)$  определены в областях  $S_k$ , ограниченных контурами  $L_{k\ell}$ , получаемыми из  $L_\ell$  аффинными преобразованиями (7). В общем случае функции имеют вид [3]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} A_{k\ell} \ln(z_k - z_{k\ell}) + \sum_{r=1}^R A_{kr}^0 \ln(z_k - z_{kr}^0) + \Phi_{k0}(z_k). \quad (18)$$

Здесь  $\Gamma_k$  – постоянные, равные нулю в случае конечной области, а для бесконечной области определяемые из системы

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, v_k, \mu_k v_k) \Gamma_k = \\ = (\sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, 2\omega_3^\infty, -D_y^\infty, D_x^\infty) \end{aligned} \quad (19)$$

при задании на бесконечности компонент вектора индукции электрического поля или

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, r_k^0, \mu_k r_k^0) \Gamma_k =$$

$$= (\sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, 2\omega_3^\infty, -E_x^\infty, -E_y^\infty), \quad (20)$$

если на бесконечности заданы компоненты вектора напряженности электрического поля;  $A_{k\ell}$ ,  $A_{kj}^0$  – постоянные, определяемые из систем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, p_k, q_k, v_k, r_k^0) i A_{k\ell} = \left( \frac{Y_\ell}{2\pi}, -\frac{X_\ell}{2\pi}, 0, 0, -\frac{Q_{e\ell}}{2\pi}, 0 \right), \quad (21)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (1, \mu_k, p_k, q_k, v_k, r_k^0) i A_{kr}^0 = \left( \frac{Y_r}{2\pi}, -\frac{X_r}{2\pi}, 0, 0, -\frac{Q_{er}^0}{2\pi}, 0 \right), \quad (22)$$

$\Phi_{k0}(z_k)$  – функции, голоморфные в многосвязных областях  $S_k$ ;  $X_\ell$ ,  $Y_\ell$  и  $Q_{e\ell}$  – компоненты главного вектора внешних усилий и суммарный электрический заряд, приложенный к контуру  $L_\ell$ ;  $X_r$ ,  $Y_r$  и  $Q_{er}^0$  – компоненты сосредоточенной силы и сосредоточенный электрический заряд в точке  $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ .

Таким образом, в каждом конкретном случае после выбора функций (18) и удовлетворения соответствующим граничным условиям (12)–(16) находятся комплексные потенциалы  $\Phi_k(z_k)$ , а затем по ним – основные характеристики электроупругого состояния (6). При этом, если выражения основных характеристик представляются произведениями рациональных функций постоянных в уравнениях состояния (3) на функции координат, то значения основных характеристик с течением времени можно определять, заменив в этих выражениях постоянные временными операторами и вычислив действие этих операторов во времени.

**Определение электровязкоупругого состояния по принципу Вольтерра.** Из уравнений электроупругого состояния для деформаций в случае ортотропных материалов имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{13}\sigma_z + g_{11}D_x + g_{21}D_y + g_{31}D_z, \\ \varepsilon_y &= s_{12}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{23}\sigma_z + g_{12}D_x + g_{22}D_y + g_{32}D_z, \\ \varepsilon_z &= s_{13}\sigma_x + s_{23}\sigma_y + s_{33}\sigma_z + g_{13}D_x + g_{23}D_y + g_{33}D_z, \\ \gamma_{yz} &= s_{44}\tau_{yz} + g_{14}D_x + g_{24}D_y + g_{34}D_z, \\ \gamma_{xz} &= s_{55}\tau_{xz} + g_{15}D_x + g_{25}D_y + g_{35}D_z, \\ \gamma_{xy} &= s_{66}\tau_{xy} + g_{16}D_x + g_{26}D_y + g_{36}D_z, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{E_1}, \quad s_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad s_{33} = \frac{1}{E_3}, \quad s_{44} = \frac{1}{G_{12}}, \quad s_{55} = \frac{1}{G_{23}}, \quad s_{66} = \frac{1}{G_{31}}, \\ s_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad s_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad s_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, \end{aligned} \quad (24)$$

$E_i$ ,  $\nu_{ij}$  – модули Юнга и коэффициенты Пуассона для соответствующих направлений.

Если изменения технических постоянных со временем представить с помощью операторов Ю. Н. Работнова [13]:

$$E_i^* = E_i^0 [1 - \delta_i^* \mathfrak{D}_{\alpha^*}^* (-\beta_i^* - \delta_i^*)], \quad v_{12}^* = v_{12}^0 [1 + \delta^* \mathfrak{D}_{\alpha^*}^* (-\beta^*)],$$

$$G_{ij}^* = G_{ij}^0 [1 - \delta_{ij}^* \mathfrak{D}_{\alpha^*}^* (-\beta_{ij}^* - \delta_{ij}^*)], \quad (25)$$

где  $E_i^0$ ,  $v_{12}^0$ ,  $G_{ij}^0$  – мгновенные значения соответствующих постоянных (остальные  $v_{ij}$  выражаются через  $v_{12}$ ),

$$\mathfrak{D}_{\alpha^*}^*(\beta, t - \tau) = (t - \tau)^{\alpha^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n (t - \tau)^{n(1+\alpha^*)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha^*)]} \quad (26)$$

– оператор Ю. Н. Работнова;  $\Gamma(1 + \alpha^*)$ ,  $-1 < \alpha^* < 0$ , – гамма-функция;  $\delta_i^*$ ,  $\beta_i^*$  и  $\delta_{ij}^*$ ,  $\beta_{ij}^*$  – реологические постоянные материала, связанные с изменением соответствующих  $E_i$  и  $G_{ij}$  во времени;  $\delta^*$ ,  $\beta^*$  – реологические постоянные материала, связанные с изменением  $v_{12}$  во времени.

Таким подходом для решения задачи электровязкоупругости можно воспользоваться, если известны реологические постоянные, связанные с изменением всех технических постоянных. Однако для анизотропных материалов в большинстве случаев известны лишь реологические постоянные, связанные с коэффициентами  $E_i$ ,  $G_{ij}$  для главных направлений. Поэтому возникает необходимость нахождения неизвестных реологических постоянных через известные. Кроме того, для уменьшения числа операторов, входящих в полученные решения, в исследованиях применяют различные упрощения, учитывая постоянство во времени некоторых величин [8, 14, 15].

Из уравнений (23) для первого инварианта тензора деформаций в случае ортотропного материала имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z &= (s_{11} + s_{12} + s_{13})\sigma_x + (s_{12} + s_{22} + s_{23})\sigma_y + \\ &+ (s_{13} + s_{23} + s_{33})\sigma_z + (g_{11} + g_{12} + g_{13})D_x + \\ &+ (g_{21} + g_{22} + g_{23})D_y + (g_{31} + g_{32} + g_{33})D_z, \end{aligned} \quad (27)$$

или

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{K_1} \sigma_x + \frac{1}{K_2} \sigma_y + \frac{1}{K_3} \sigma_z + \frac{1}{K_{1D}} D_x + \frac{1}{K_{2D}} D_y + \frac{1}{K_{3D}} D_z, \quad (28)$$

где  $\mathfrak{D} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$  – первый инвариант тензора деформаций,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  – модули деформаций для растяжения-сжатия вдоль главных направлений [1],  $K_{1D}$ ,  $K_{2D}$ ,  $K_{3D}$  – модули деформаций для электрических воздействий, причем

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_1} &= s_{11} + s_{12} + s_{13}, & \frac{1}{K_2} &= s_{12} + s_{22} + s_{23}, & \frac{1}{K_3} &= s_{13} + s_{23} + s_{33}, \\ \frac{1}{K_{1D}} &= g_{11} + g_{12} + g_{13}, & \frac{1}{K_{2D}} &= g_{21} + g_{22} + g_{23}, & \frac{1}{K_{3D}} &= g_{31} + g_{32} + g_{33}. \end{aligned} \quad (29)$$

$$(30)$$

При действии на тело гидростатического давления (всестороннего растяжения-сжатия), когда  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ , учитывая свойства первого инварианта тензора напряжений  $\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ , формулу (28) запишем в виде

$$\vartheta = \frac{1}{K} \theta + \frac{1}{K_{1D}} D_x + \frac{1}{K_{2D}} D_y + \frac{1}{K_{3D}} D_z, \quad (31)$$

где

$$\frac{1}{K} = s_{11} + s_{22} + s_{33} + 2s_{12} + 2s_{13} + 2s_{23}, \quad (32)$$

$K$  – модуль объемной деформации тела для растяжения-сжатия, который можно считать неизменяемым во времени [9, 15, 12]. Также будем считать, что со временем не изменяются и модули деформаций для электрических воздействий  $K_{iD}$ . Подставляя в (32) представления (24), получаем

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{2\nu_{23}}{E_2} - \frac{2\nu_{13}}{E_1}. \quad (33)$$

В связи с тем, что в литературе отсутствуют значения модуля Юнга  $E_3$ , коэффициентов Пуассона  $\nu_{13}$  и  $\nu_{23}$  и их реологические постоянные, примем, что [5]

$$s_{33} = \frac{1}{2}(s_{11} + s_{22}), \quad s_{13} = s_{23} = s_{12}, \quad (34)$$

т. е.

$$\frac{1}{E_3} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right), \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}. \quad (35)$$

Тогда из (33) получим

$$\frac{1}{K} = \frac{3}{2E_1} + \frac{3}{2E_2} - \frac{6\nu_{12}}{E_1}, \quad (36)$$

откуда следует, что

$$\nu_{12} = \frac{1}{6} \left( \frac{3}{2} + \frac{3E_1}{E_2} - \frac{E_1}{K} \right). \quad (37)$$

Заменив в последних формулах модули Юнга временными операторами (25) с учетом постоянства во времени  $K$ , для  $\nu_{12}$  получим операторные представления

$$\nu_{12}^* = \frac{1}{6} \left( \frac{3}{2} + \frac{3E_1^*}{E_2^*} - \frac{E_1^*}{K^0} \right), \quad (38)$$

где  $K^0$  – постоянное значение модуля объемной деформации тела (36), в котором  $E_i$  принимают значения  $E_i^0$ ,

$$E_1^* = E_1^0 [1 - \delta_1^* \mathfrak{A}_\alpha^* (-\beta_1^* - \delta_1^*)],$$

$$\frac{1}{E_2^*} = \frac{1}{E_2^0} [1 + \delta_2^* \mathfrak{A}_\alpha^* (-\beta_2^*)]. \quad (39)$$

Таким образом, после решения задачи электроупругости, заменив в выражениях основных характеристик постоянные их временными операторами, можно определить значения этих величин в любой момент времени, если они представляются произведениями рациональных функций постоянных в уравнениях состояния (3) на функции координат. Но в большинстве случаев и, в первую очередь для многосвязных областей, невозможно получить решение задачи в явном виде, и, следовательно, непосредственное применение принципа Вольтерра к анализу электроупругого состояния тел невозможно. В связи с этим возникает необходимость и в таких задачах получать решения, которые явным образом содержали бы коэффициенты упругих деформаций. Это можно сделать методом малого параметра.

**Сведение задачи электровязкоупругости к последовательности задач электроупругости.** Выделим из коэффициентов деформации  $s_{ij}$  величину, меньшую единицы, и разложим решение задачи в ряды по ней как по малому параметру.

Из технических постоянных меньшими единицы являются только коэффициенты Пуассона  $\nu_{ij}$ . Поэтому в качестве малого параметра можно взять любой из коэффициентов, например  $\nu_{12}$ . Но сходимость получаемых решений ускорится, если в качестве малого параметра взять не коэффициент Пуассона  $\nu_{12}$ , а его изменение с течением времени, т. е. представить  $\nu_{12}$  в виде суммы

$$\nu_{12} = \nu_{12}^0 + \lambda, \quad (40)$$

где  $\nu_{12}^0$  – мгновенно упругое значение коэффициента Пуассона  $\nu_{12}$ .

Учитывая равенство (40), из выражений (24), (10) находим

$$s_{12} = s_{12}^0 - \lambda s_{11}, \quad p_k = p_{k0} + \lambda p_{k1}, \quad q_k = q_{k0} + \lambda q_{k1}, \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} s_{12}^0 &= -\nu_{12}^0 s_{11}, & p_{k1} &= -s_{11}, & q_{k1} &= -s_{11} \mu_k, \\ p_{k0} &= (\mu_k^2 - \nu_{12}^0) s_{11} - s_{16} \mu_k + (g_{11} \mu_k - g_{21}) \nu_k, \\ q_{k0} &= -\mu_k \nu_{12}^0 s_{11} + \frac{s_{22}}{\mu_k} - s_{26} + \left( g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k} \right) \nu_k. \end{aligned} \quad (42)$$

Введем малый параметр  $\lambda$  в приведенное выше общее решение задачи электроупругости. Но прежде чем использовать этот параметр, несколько преобразуем системы (19)–(22).

Характеристическое уравнение (8) не может иметь вещественных корней [10, 3], в том числе и равных нулю, т. е.  $\mu_k \neq 0$ . Кроме того,  $\ell_{2\beta}(\mu_k) \neq 0$ , иначе уравнение (8) не содержало бы полинома  $\ell_{4s}(\mu_k)$  с коэффициентами деформации и не соответствовало бы задаче электроупругости. Следовательно, для любых пьезоматериалов  $\mu_k \ell_{2\beta}(\mu_k) \neq 0$ . Исходя из этого, преобразуем системы уравнений (19)–(22) таким образом, чтобы их определители не содержали постоянной  $s_{12}$ , входящей в коэффициенты  $q_k - \mu_k p_k$ .

Исходя из выражений (10), находим

$$\begin{aligned} q_k - \mu_k p_k &= \frac{s_{22}}{\mu_k} - s_{26} + s_{16} \mu_k^2 - s_{11} \mu_k^3 + \\ &+ \nu_k \left( -\frac{g_{22}}{\mu_k} + g_{12} + g_{21} \mu_k - g_{11} \mu_k^2 \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Тогда четвертое из уравнений системы (19) запишем в виде

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{s_{22}}{\mu_k} - s_{26} + s_{16} \mu_k^2 - s_{11} \mu_k^3 + \right. \\ \left. + \nu_k \left( -\frac{g_{22}}{\mu_k} + g_{12} + g_{21} \mu_k - g_{11} \mu_k^2 \right) \right] \Gamma_k = 2\omega_3^\infty. \end{aligned} \quad (44)$$

Поделив характеристическое уравнение (8) на  $\mu_k \ell_{2\beta}(\mu_k)$ , получим

$$s_{11}\mu_k^3 - 2s_{16}\mu_k^2 + (2s_{12} + s_{66})\mu_k - 2s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + v_k \left( g_{11}\mu_k^2 - (g_{21} + g_{16})\mu_k + (g_{12} + g_{26}) - \frac{g_{22}}{\mu_k} \right) = 0. \quad (45)$$

Определив выражение для  $s_{11}\mu_k^3$  из равенства (45) и подставив его в (43), найдем

$$\begin{aligned} q_k - \mu_k p_k &= \frac{s_{22}}{\mu_k} - s_{26} + s_{16}\mu_k^2 - s_{11}\mu_k^3 + v_k \left( -\frac{g_{22}}{\mu_k} + g_{12} + g_{21}\mu_k - g_{11}\mu_k^2 \right) = \\ &= 2\frac{s_{22}}{\mu_k} - 3s_{26} + (2s_{12} + s_{66})\mu_k - s_{16}\mu_k^2 + \\ &+ v_k \left( -\frac{2g_{22}}{\mu_k} + 2g_{12} + g_{26} - g_{16}\mu_k \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Поэтому четвертое из уравнений системы (19) примет вид

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{1}{\mu_k} \left( 1 - \frac{v_k}{s_{22}} \left( g_{22} - \frac{2g_{12} + g_{26}}{2} \mu_k + \frac{g_{16}}{2} \mu_k^2 \right) \right) \right] \Gamma_k = \\ = \frac{1}{2s_{22}} [2\omega_3^\infty + 3s_{26}\sigma_y^\infty + (2s_{12} + s_{66})\tau_{xy}^\infty + s_{16}\sigma_x^\infty]. \end{aligned} \quad (47)$$

Уравнение (47) преобразуем, учитывая первые три уравнения системы (19). Окончательно систему (19) запишем в форме

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \left[ 1 - \frac{v_k}{s_{22}} \left( g_{22} - \frac{2g_{12} + g_{26}}{2} \mu_k + \frac{g_{16}}{2} \mu_k^2 \right) \right], \right. \\ \left. v_k, \mu_k v_k \right\} \Gamma_k = \left\{ \sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, \frac{1}{2s_{22}} [2\omega_3^\infty + \right. \\ \left. + 3s_{26}\sigma_y^\infty + 2s_{12} + s_{66}\tau_{xy}^\infty + s_{16}\sigma_x^\infty], -D_y^\infty, D_x^\infty \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

Если на бесконечности заданы компоненты вектора напряженности  $-E_x^\infty, -E_y^\infty$ , то последние два уравнения системы (48) запишутся в виде

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \{r_k^0, \mu_k r_k^0\} \Gamma_k = \{-E_x^\infty, -E_y^\infty\}. \quad (49)$$

По аналогии с выводом уравнений (48) из систем (21), (22) получаем

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2 \left[ 1 + \frac{v_k g_{11}}{\mu_k s_{11}} \right], \frac{1}{\mu_k} \left[ 1 - \frac{v_k g_{22}}{s_{22}} \right], v_k, r_k^0 \right\} iA_{kl} = \\ = \left\{ \frac{Y_\ell}{2\pi}, -\frac{X_\ell}{2\pi}, -\frac{s_{16}X_\ell + s_{12}Y_\ell + g_{21}Q_{el}}{2\pi s_{11}}, \right. \\ \left. \frac{s_{12}X_\ell + s_{26}Y_\ell + g_{12}Q_{el}}{2\pi s_{22}}, -\frac{Q_{el}}{2\pi}, 0 \right\}, \end{aligned} \quad (50)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2 \left[ 1 + \frac{v_k g_{11}}{\mu_k s_{11}} \right], \frac{1}{\mu_k} \left[ 1 - \frac{v_k g_{22}}{s_{22}} \right], v_k, r_k^0 \right\} iA_{kr}^0 =$$

$$= \left\{ \frac{Y_r^0}{2\pi}, -\frac{X_r^0}{2\pi}, -\frac{s_{16}X_r^0 + s_{12}Y_r^0 + g_{21}Q_{er}^0}{2\pi s_{11}}, \right. \\ \left. \frac{s_{12}X_r^0 + s_{26}Y_r^0 + g_{12}Q_{er}^0}{2\pi s_{22}}, -\frac{Q_{er}^0}{2\pi}, 0 \right\}. \quad (51)$$

Разложим постоянные  $\Gamma_k$ ,  $A_{k\ell}$ ,  $A_{kr}^0$  и функции  $\Phi_k^*(z_k)$ , а также углы поворотов  $\omega_3$  в ряды по малому параметру  $\lambda$  [5]:

$$\Gamma_k = \sum_{j=0} \lambda^j \Gamma_{jk}, \quad A_{k\ell} = \sum_{j=0} \lambda^j A_{jk\ell}, \quad A_{kr}^0 = \sum_{j=0} \lambda^j A_{jkr}^0, \\ (\Phi_k^*(z_k), \omega_3) = \sum_{j=0} \lambda^j (\Phi_{jk}^*(z_k), \omega_{j3}). \quad (52)$$

Подставляя разложения (52), (42) в системы (48)–(51), учитывая, что  $s_{12} = s_{12}^0 - \lambda s_{11}$ , и сравнивая в получаемых равенствах коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ , для определения постоянных  $\Gamma_{jk}$ ,  $A_{jk\ell}$ ,  $A_{jkr}^0$  находим следующие последовательности систем уравнений:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \left[ 1 - \frac{v_k}{s_{22}} \left( g_{22} - \frac{2g_{12} + g_{26}}{2} \mu_k + \frac{g_{16}}{2} \mu_k^2 \right) \right], \right. \\ \left. v_k, \mu_k v_k \right\} \Gamma_{0k} = \left\{ \sigma_y^\infty, -\tau_{xy}^\infty, \sigma_x^\infty, \frac{1}{2s_{22}} [2\omega_3^\infty + 3s_{26}\sigma_y^\infty + \right. \\ \left. + (s_{66} - 2v_{12}^0 s_{11})\tau_{xy}^\infty + s_{16}\sigma_x^\infty], -D_y^\infty, D_x^\infty \right\}, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \left[ 1 - \frac{v_k}{s_{22}} \left( g_{22} - \frac{2g_{12} + g_{26}}{2} \mu_k + \frac{g_{16}}{2} \mu_k^2 \right) \right], \right. \\ \left. v_k, \mu_k v_k \right\} \Gamma_{1k} = \left\{ 0, 0, 0, -\frac{s_{11}}{2s_{22}} \tau_{xy}^\infty, 0, 0 \right\}, \quad (53)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2 \left[ 1 + \frac{v_k g_{11}}{\mu_k s_{11}} \right], \frac{1}{\mu_k} \left[ 1 - \frac{v_k g_{22}}{s_{22}} \right], v_k, r_k^0 \right\} iA_{0k\ell} = \\ = \left\{ \frac{Y_\ell}{2\pi}, -\frac{X_\ell}{2\pi}, -\frac{s_{16}X_\ell - v_{12}^0 s_{11} Y_\ell + g_{21}Q_{e\ell}}{2\pi s_{11}}, \right. \\ \left. -\frac{v_{12}^0 s_{11} X_\ell + s_{26} Y_\ell + g_{12} Q_{e\ell}}{2\pi s_{22}}, -\frac{Q_{e\ell}}{2\pi}, 0 \right\}, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2 \left[ 1 + \frac{v_k g_{11}}{\mu_k s_{11}} \right], \frac{1}{\mu_k} \left[ 1 - \frac{v_k g_{22}}{s_{22}} \right], v_k, r_k^0 \right\} iA_{1k\ell} = \\ = \{0, 0, -s_{11} Y_\ell, -s_{11} X_\ell, 0, 0\}, \quad (54)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2 \left[ 1 + \frac{v_k g_{11}}{\mu_k s_{11}} \right], \frac{1}{\mu_k} \left[ 1 - \frac{v_k g_{22}}{s_{22}} \right], v_k, r_k^0 \right\} iA_{0kr}^0 = \\ = \left\{ \frac{Y_r^0}{2\pi}, -\frac{X_r^0}{2\pi}, -\frac{s_{16}X_r^0 - v_{12}^0 s_{11} Y_r^0 + g_{21}Q_{er}^0}{2\pi s_{11}}, \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{-v_{12}^0 s_{11} X_r^0 + s_{26} Y_r^0 + g_{12} Q_{er}^0}{2\pi s_{22}}, -\frac{Q_{er}^0}{2\pi}, 0 \right\}, \\
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 & \left\{ 1, \mu_k, \mu_k^2 \left[ 1 + \frac{v_k g_{11}}{\mu_k s_{11}} \right], \frac{1}{\mu_k} \left[ 1 - \frac{v_k g_{22}}{s_{22}} \right], v_k, r_k^0 \right\} i A_{1kr}^0 = \\
& = \{0, 0, -s_{11} Y_r^0, -s_{11} X_r^0, 0, 0\}, \tag{55}
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{jk} = A_{jk\ell} = A_{jkr}^0 = 0, \quad j \geq 2.$$

Учитывая разложения (52), комплексные потенциалы (18) представим в виде

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{j=0} \lambda^j \Phi_{jk}(z_k), \tag{56}$$

где

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + N_{jk}(z_k) + \Phi_{jk}^*(z_k), \tag{57}$$

$$N_{jk}(z_k) = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{L}} A_{jk\ell} \ln(z_k - z_{k\ell}) + \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} A_{jkr}^0 \ln(z_k - z_{kr}^0), \tag{58}$$

$\Phi_{jk}^*(z_k)$  – функции, голоморфные в многосвязных областях  $S_k$ , ограниченных контурами  $L_{k\ell}$ .

Комплексные потенциалы приближений  $\Phi_{jk}(z_k)$  должны удовлетворять соответствующим граничным условиям. Подставив функции (56) в граничные условия (12)–(15) и приравняв в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра  $\lambda$ , находим рекуррентную последовательность граничных условий для определения комплексных потенциалов приближений. Механические граничные условия получаются такими

– для неподкрепленных контуров:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (1, \mu_k) \Phi_{jk}(t_k) = \delta_{j0} (c_{1\ell}, c_{2\ell}); \tag{59}$$

– при задании на контурах перемещений:

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (p_{k0}, q_{k0}) \Phi_{jk}(t_k) &= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{j0}) (p_{k1}, q_{k1}) \Phi_{j-1,k}(t_k) + \\
&+ \delta_{j0} (u_{\ell^*} - u_0, v_{\ell^*} - v_0) + (\omega_{j3} y, -\omega_{j3} x). \tag{60}
\end{aligned}$$

Из электрических граничных условий находим

– при задании на контурах электрической индукции:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 v_k \Phi_{jk}(t_k) = \delta_{j0} c_{3\ell}; \tag{61}$$

– при задании на контурах электрических потенциалов:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 r_k^0 \Phi_{jk}(t_k) = \delta_{j0} (\varphi_{\ell^*} + c_{3\ell}). \tag{62}$$

После определения из граничных условий функций приближений  $\Phi_{jk}(z_k)$ , заменив степени малого параметра  $\lambda^j$  временными операторами, можно найти значения комплексных потенциалов (56) и их производных в любой момент времени, а по ним – основные характеристики (6). При этом,

чтобы для пластинки найти степени малого параметра  $\lambda$ , нужно учитывать, что на основании (40)

$$\lambda = v_{12}^* - v_{12}^0. \quad (63)$$

Заменив  $v_{12}^*$  в (63) его временным оператором (38), получим

$$\lambda = D_1 \mathfrak{D}_\alpha^*(-\beta_1^* - \delta_1^*) + D_2 \mathfrak{D}_\alpha^*(-\beta_2^*), \quad (64)$$

где

$$D_1 = \frac{\delta_1^*}{4} \left[ \frac{E_1^0}{E_2^0} \frac{\delta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*} + 1 - 4v_{12}^0 \right], \quad D_2 = \frac{\delta_2^*}{4} \frac{E_1^0}{E_2^0} \frac{\beta_1^* - \beta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*}. \quad (65)$$

Исходя из формулы (63) и из свойств возведения оператора в степень, находим

$$\lambda^j = (v_{12}^* - v_{12}^0)^j = \left( \frac{v_{12}^0}{\beta_1^*} \right)^j \frac{1}{(j-1)!} \frac{\partial \mathfrak{D}_\alpha^*(-\beta_1^*)}{\partial (-\beta_1^*)^{j-1}}. \quad (66)$$

Возведя  $\lambda$  в степень  $j$  по формуле (66), найдем

$$\begin{aligned} \lambda^j &= \sum_{k=0}^j C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \mathfrak{D}_\alpha^{*j-k}(-\beta_1^* - \delta_1^*) \mathfrak{D}_\alpha^{*k}(-\beta_2^*) = \\ &= \sum_{k=0}^j C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \frac{\mathfrak{D}_\alpha^{*k}(-\beta_2^*) - \mathfrak{D}_\alpha^{*j-k}(-\beta_1^* - \delta_1^*)}{-\beta_2^* + \beta_1^* + \delta_1^*}. \end{aligned} \quad (67)$$

Вычислив  $\lambda^j$  по формуле (67) и подставив его, как и ранее, в выражение (56), найдем функции  $\Phi_k(z_k)$  и их производные, следовательно, и основные характеристики электроупругого состояния (6) в любой момент времени.

**Решение задачи для пластинки с эллиптическим отверстием.** Рассмотрим бесконечную пластинку с эллиптическим отверстием. Обозначим контур отверстия и его полуоси через  $L_1$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  (рис. 1). Контур  $L_1$  отверстия жестко подкреплен, электрическая индукция на нем равна нулю. На бесконечности  $\sigma_y^\infty = p$ ,  $\sigma_x^\infty = \tau_{xy}^\infty = \omega_3^\infty = 0$ .

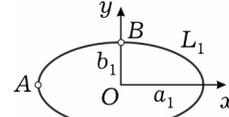


Рис. 1

Кроме того,  $E_y^\infty = \varepsilon$ ,  $E_x^\infty = 0$  или  $D_y^\infty = \delta$ ,  $D_x^\infty = 0$ .

В рассматриваемом случае комплексные потенциалы (56) примут вид

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \Phi_{jk1}(z_k), \quad (68)$$

где  $\Gamma_{jk}$  – постоянные, определяемые из системы уравнений (53);  $\Phi_{jk1}(z_k)$  – функции, голоморфные вне эллипсов  $L_{k1}$ , соответствующих контуру  $L_1$  при аффинных преобразованиях (7). Для построения этих функций используем конформные отображения.

Функции [4]

$$z_k = R_{k1}(\zeta_{k1} + m_{k1}/\zeta_{k1}), \quad (69)$$

в которых

$$R_{k1} = \frac{a_1 - i\mu_k b_1}{2}, \quad m_{k1} = \frac{a_1 + i\mu_k b_1}{a_1 - i\mu_k b_1}, \quad (70)$$

отображают конформно внешности единичных кругов  $|\zeta_{k1}| \geq 1$  на внешности эллипсов  $L_{k1}$ . Тогда функции  $\Phi_{jk1}(z_k)$ , голоморфные вне  $L_{k1}$ , будут го-

ломорфными вне единичных кругов  $|\zeta_{k1}| \geq 1$ , включая бесконечно удаленную точку, и их можно представить рядами Лорана по отрицательным степеням  $\zeta_{k1}$ . Поэтому для функций (68) имеем выражения [7]

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{jk1n}}{\zeta_{k1}^n}. \quad (71)$$

Подставляя функции (68) в граничные условия (60), (61) и применяя метод рядов, получаем, что  $a_{jk1n} = 0$ ,  $j = 0, 1, \dots$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $n \geq 2$ , а  $a_{jk11}$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (p_{k0}, q_{k0}) a_{jk11} &= -(1 - \delta_{j0}) \sum_{k=1}^3 (p_{k1}, q_{k1}) a_{j-1, k11} - \\ &- \delta_{j0} \sum_{k=1}^3 [(p_{k0}, q_{k0}) \Gamma_{j,k} R_{k1} m_{k1} + (\bar{p}_{k0}, \bar{q}_{k0}) \bar{\Gamma}_{j,k} \bar{R}_{k1}] - \\ &- \delta_{j1} \sum_{k=1}^3 [(p_{k1}, q_{k1}) \Gamma_{j-1, k} R_{k1} m_{k1} + (\bar{p}_{k1}, \bar{q}_{k1}) \bar{\Gamma}_{j-1, k} \bar{R}_{k1}], \\ \sum_{k=1}^3 v_k a_{jk11} &= -\delta_{j0} \sum_{k=1}^3 [\bar{v}_k \bar{\Gamma}_{jk} \bar{R}_{k1} - v_k \Gamma_{jk} R_{k1} m_{k1}]. \end{aligned} \quad (72)$$

Решая систему (72), найдем коэффициенты  $a_{jk11}$ . Окончательно комплексные потенциалы и их производные примут вид

$$\Phi_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \frac{a_{jk11}}{\zeta_{k1}}, \quad \Phi'_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} - \frac{a_{jk11}}{R_{k1}(\zeta_{k1}^2 - m_{k1})}. \quad (73)$$

Вычислив по формуле (67) степени малого параметра  $\lambda^j$  и умножив их на функции приближений (73), получим комплексные потенциалы (56) и их производные, а по ним и значения основных характеристик (6) в любой момент времени.

Если контур отверстия не подкреплен, то построение решения проводится аналогичным образом. Это решение получается из приведенного выше, если принять  $p_{k0} = 1$ ,  $q_{k0} = \mu_k$ ,  $p_{k1} = q_{k1} = 0$ . Если вместо индукций на контуре пластинки задан потенциал электрического поля, то решение также получается из приведенного при замене  $v_k = r_k^0$ .

Для случаев растяжения пластинки усилиями  $\sigma_y^\infty = p$  и действия на бесконечности напряженности  $E_y^\infty = \varepsilon$  были проведены численные исследования изменения основных характеристик в пластинке во времени из следующих материалов: монокристалл селенида кадмия (ЭМ1) [3, 17] и пьезо-керамика  $PZT - 5A$  (ЭМ6) [3, 16]. В связи с тем, что реологические постоянные для этих материалов в литературе отсутствуют, на основе анализа реологических постоянных известных материалов [5, 8] были выбраны следующие значения

– для материала ЭМ1:

$$\alpha^* = 0.28, \quad \beta_1^* = 0.015 c^{\alpha-1}, \quad \beta_2^* = 0.0025 c^{\alpha-1}, \quad \delta_1^* = 0.011 c^{\alpha-1}, \\ \delta_2^* = 0.0069 c^{\alpha-1} a;$$

– для материала ЭМ6:

$$\alpha^* = 0.21, \quad \beta_1^* = 0.00055 c^{\alpha-1}, \quad \beta_2^* = 0.00028 c^{\alpha-1}, \quad \delta_1^* = 0.0062 c^{\alpha-1}, \\ \delta_2^* = 0.0061 c^{\alpha-1} a.$$

При проведении расчетов количество приближений  $j$  по степеням малого параметра  $\lambda$  увеличивалось до тех пор, пока последующее приближение изменяло максимальные значения напряжений предыдущего приближения более чем на 0.01%. Для этого в рассмотренных случаях необходимо было оставлять от 5 до 10 приближений (степеней малого параметра  $\lambda$ ).

На рис. 2 для растяжения пластинки изображены графики изменения во времени нормальных напряжений  $\sigma_s/p$  в точке  $B$  на площадках, перпендикулярных контуру отверстия, а на рис. 3 изображены графики распределения напряжений около контура отверстия в начальном (сплошные линии) и стационарном (штриховые линии) состояниях. Кривые 1 и 2 рассчитаны соответственно для пластинки из материала ЭМ1 и ЭМ6.

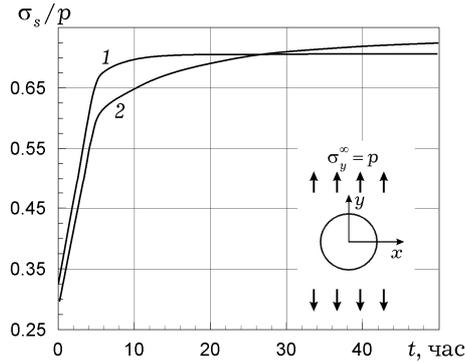


Рис. 2

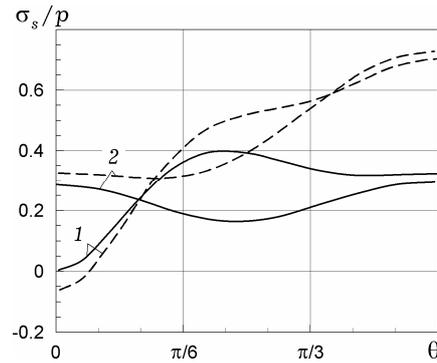


Рис. 3

В табл. 1 с точностью до приложенной нагрузки ( $p$  или  $\varepsilon$ ) для материалов ЭМ1 и ЭМ6 в зависимости от времени приведены значения нормальных напряжений в точках  $A$  и  $B$  на площадках, нормальных ( $\sigma_n$ ) и касательных ( $\sigma_s$ ) к контуру отверстия.

Таблица 1

Точки	$t$ , час	0	5	10	20	30	50	100	
		Материал ЭМ1, действие $\sigma_y^\infty = p$							
A	$\sigma_s \cdot 10^{-1}$	0.0597	-0.568	-0.619	-0.623	-0.624	-0.624	-0.624	
	$\sigma_n \cdot 10^{-1}$	0.083	-1.857	-1.992	-2.026	-2.028	-2.028	-2.028	
B	$\sigma_s$	0.326	0.678	0.702	0.709	0.709	0.709	0.709	
	$\sigma_n$	1.405	1.338	1.333	1.332	1.332	1.332	1.332	
		Материал ЭМ1, действие $E_y^\infty = \varepsilon$							
A	$\sigma_s \cdot 10^{-1}$	-0.980	-0.991	-0.992	-0.992	-0.992	-0.992	-0.992	
	$\sigma_n \cdot 10^{-2}$	-0.475	-0.815	-0.839	-0.845	-0.845	-0.845	-0.845	
B	$\sigma_s \cdot 10^{-2}$	0.570	1.187	1.230	1.241	1.241	1.242	1.242	
	$\sigma_n \cdot 10^{-2}$	2.459	2.342	2.334	2.332	2.332	2.332	2.332	
		Материал ЭМ6, действие $\sigma_y^\infty = p$							
A	$\sigma_s \cdot 10^{-1}$	2.884	3.168	3.205	3.242	3.258	3.271	3.277	
	$\sigma_n \cdot 10^{-1}$	1.000	-1.169	-1.450	-1.731	-1.859	-1.958	-1.999	
B	$\sigma_s$	0.298	0.613	0.654	0.695	0.713	0.727	0.733	
	$\sigma_n$	1.439	1.319	1.303	1.288	1.281	1.275	1.273	

		Материал ЭМ6, действие $E_y^\infty = \varepsilon$						
А	$\sigma_s \cdot 10^1$	-5.754	-5.673	-5.663	-5.652	-5.648	-5.644	-5.642
	$\sigma_n \cdot 10^1$	1.885	1.268	1.188	1.108	1.071	1.043	1.032
В	$\sigma_s \cdot 10^1$	0.848	1.744	1.861	1.977	2.030	2.071	2.088
	$\sigma_n \cdot 10^1$	4.096	3.754	3.710	3.665	3.645	3.630	3.623

Из описанных результатов следует, что уже через 50 часов напряжения в пластинке с течением времени практически не изменяются, т.е. в нем устанавливается стационарное состояние. Но их значительные изменения происходят лишь в первые 20 час. При переходе в стационарное состояние напряжения изменяются довольно значительно. Так, для растяжения пластинки значения  $\sigma_s$  в точке В увеличиваются приблизительно в 2.5 раза.

1. Ашкенадзи Е. К., Ганов Э. В. Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. – Ленинград: Машиностроение, 1980. – 247 с.
2. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 5.
3. Калоеров С. А., Баева А. И., Бороненко О. И. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с.
4. Калоеров С. А., Горянская Е. С. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П. и др. Концентрация напряжений. – Киев: А.С.К., 1998. – 387 с. – (Механика композитов / Под ред. А. Н. Гузя: В 12 т. – Т. 7.) – С. 10–26.
5. Калоеров С. А., Паршикова О. А. Решение задачи термовязкоупругости для анизотропной пластинки // Теорет. и прикл. механика. – 2011. – № 2 (48). – С. 51–70.
6. Калоеров С. А., Самодуров А. А. Влияния значений пьезомодулей на пьезоэффект в задачах электромагнитоупругости // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2014. – Вип. 1. – С. 42–48.
7. Калоеров С. А., Самодуров А. А. Исследование электромагнитоупругого состояния пьезопластинки с подкрепленными отверстиями // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2013. – Вип. 1. – С. 42–48.
8. Каминский А. А. Исследование деформирования анизотропных вязкоупругих тел // Прикл. механика. – 2000. – 36, № 11. – С. 39–63.  
То же: Kaminskiy A. A. Study of the deformation of anisotropic viscoelastic bodies // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, No. 11. – P. 1434–1457.
9. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. – Москва: Мир, 1974. – 338 с.
10. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
11. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – Москва: Наука, 1988. – 471 с.
12. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. – Москва: Наука, 1966. – 752 с.
13. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием // Прикл. математика и механика. – 1948. – 12, № 1. – С. 53–62.
14. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – Москва: Наука, 1977. – 384 с.
15. Савин Г. Н. Распределение напряжений возле отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.
16. Dunn M. L. Micromechanics of coupled electroelastic composites: Effective thermal expansion and pyroelectric coefficients // J. Appl. Phys. – 1993. – 73, No. 10. – P. 5131–5140.
17. Liu J.-X., Zhang X.-S., Liu X.-L., Zheng J. Anisotropic thermopiezoelectric solids with an elliptic inclusion or a hole under uniform heat flow // Acta Mech. Sinica. – 2000. – 16, No. 2. – P. 148–163.

#### **ЗАДАЧА ЕЛЕКТРОВ'ЯЗКОПРУЖНОСТІ ДЛЯ БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ПЛАСТИНОК**

*Запропоновано метод розв'язування задачі електров'язкопружності для багатозв'язних пластин. Методом малого параметра задачу зведено до рекурентної послідовності задач електров'язкопружності, які розв'язуються з використанням комплексних потенціалів. Розроблено методіку визначення за комплексним потенціалом наближень основних характеристик електропружного стану (напружень, компонент векторів індукції і напруженості електричного поля) у будь-який момент часу після прикладення навантаження. Як приклад наведено розв'язок задачі для пластинки з еліптичним отвором. Чисельними дослідженнями встановлено значний вплив часу на значення основних характеристик електро-в'язкопружного стану.*

#### **ELECTRO-VISCOELASTICITY PROBLEM FOR MULTI-CONNECTED PLATES**

*A method for solving the problem of electro-viscoelasticity for multi-connected plates is proposed. By the small parameter method the problem is reduced to a recurrent sequence of electro-viscoelasticity problems solved using the complex potentials. The procedure for determining by complex potentials the approximations of main characteristics of electroelastic state (stresses, components of the induction vector and the vector of the electric field intensity) at any time after the load application is developed. As an example, the solution of the problem for a plate with an elliptic hole is carried out. Numerical studies revealed a significant time effect on the values of the basic characteristics of electro-viscoelasticity state.*

Донецк. нац. ун-т, Донецк

Получено  
19.03.14