

## ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ПРУЖНИХ ВКЛЮЧЕНЬ У ПЛАСТИНКАХ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

*Розроблено алгоритм визначення напружень у пластинках складної форми, що містять пружні включення. Алгоритм базується на застосуванні модифікованих інтегральних рівнянь, при яких крайові умови для напружень на межах поділу задовольняються тотожно. Інтегральні рівняння розв'язано чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведено дослідження напружень біля включень у пластинках різної форми. Встановлено характерні особливості у розподілі напружень залежно від форми включень і пружних характеристик матеріалів.*

Дослідженню напруженого стану пластинок із включеннями присвячено значно менше праць, ніж для однорідних пластинок [2, 3, 5]. Загальний метод дослідження таких задач на основі методу граничних інтегральних рівнянь (МГІР) запропоновано у [5]. При застосуванні МГІР до дослідження пластинок нескінченних розмірів (зокрема, для півплощин і смуг) і для випадків, коли включення розміщені близько до отвору або отвори мають складну форму, виникають значні труднощі. Тому в літературі для окремих класів таких пластинок із отворами і тріщинами побудовано модифіковані інтегральні рівняння, при яких умови на вибраній межі пластинки задовольняються тотожно [5, 7]. У пропонованій роботі розроблено загальний підхід до розрахунку напружено-деформованого стану пластинок із включеннями, який базується на модифікованих інтегральних рівняннях. Для реалізації цього підходу достатньо побудувати розв'язок типу Гріна для відповідної задачі теорії пружності.

**Постановка задачі.** Розглянемо задачу про дослідження напружено-деформованого стану ізотропної пластинки з пружними включеннями з іншого матеріалу. Нехай пластинка займає область  $D_0$ , обмежену контуром  $L_0$ , і перебуває під дією прикладених на нескінченності зусиль. У точках  $c_j$ , які належать включенню і матриці, діють зосереджені сили  $(X_j, Y_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, J$ . Пластинка перебуває в умовах плоского напруженого стану. Пружні сталі включень позначаємо через  $G_j$ ,  $\chi_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ , а матриці – через  $G_0$ ,  $\chi_0$ . Тут  $G_j$  – модулі зсуву,  $\chi_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$ ,  $\nu_j$  – коефіцієнти Пуассона. Вважаємо також, що на межах поділу включень і матриці має місце ідеальний механічний контакт.

**Основні співвідношення.** Виразимо загальний розв'язок поставленої задачі через комплексні потенціали Колосова – Мухелішвілі  $\Phi(z)$ ,  $\Psi(z)$  [4]. Використаємо співвідношення для визначення вектора напружень  $q_\Gamma = N_\Gamma + iT_\Gamma$  у довільній точці  $z$  кривої  $\Gamma$  на дотичній до неї площинці через комплексні потенціали [4]:

$$q_\Gamma(z) = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \frac{d\bar{z}}{dz} \cdot [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}]. \quad (1)$$

Тут  $dz$  – диференціал змінної  $z$  на кривій  $\Gamma$ , а  $N_\Gamma$ ,  $T_\Gamma$  – нормальна та дотична проекції вектора на кривій  $\Gamma$ .

Похідні від переміщень пластинки з пружними характеристиками  $G$ ,  $\chi$  на кривій  $\Gamma$  визначаються за формулами

$$2G(u' + iv') = \chi\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - \frac{d\bar{z}}{dz} \cdot [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}], \quad (2)$$

де  $u' + iv' = d(u + iv)/dz$ .

Розглянемо спочатку нескінченну пластинку з включеннями, межі яких розміщені вздовж кривих  $L_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Виберемо напрямок обходу контурів  $L_j$  (і пізніше напрямок інтегрування) так, щоб області, які лежать зовні цих кривих, залишались зліва. Використаємо інтегральні зображення розв'язку задачі у вигляді [5]

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{Q_S(t) dt}{t-z} + \Phi_c(z), \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \left[ \frac{\bar{Q}_S d\bar{t}}{t-z} - \frac{\bar{t} Q_S dt}{(t-z)^2} \right] + \Psi_c(z),\end{aligned}\quad (3)$$

де  $Q_S$  – невідома функція;  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_J$ ;  $\Phi_c$ ,  $\Psi_c$  – потенціали Колосова – Мусхелішвілі для суцільної однорідної нескінченної пластинки, які відповідають прикладеному навантаженню:

$$\begin{aligned}\Phi_c(z) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^J \frac{1}{1 + \chi(c_j)} \frac{X_j + iY_j}{c_j - z} + \Phi_\infty, \\ \Psi_c(z) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^J \frac{1}{1 + \chi(c_j)} \left[ \chi(c_j) \frac{X_j - iY_j}{c_j - z} - \frac{(X_j + iY_j)\bar{c}_j}{(c_j - z)^2} \right] + \Psi_\infty,\end{aligned}$$

де  $\Phi_\infty(z)$ ,  $\Psi_\infty(z)$  – потенціали, які відповідають прикладеним на нескінченності зусиллям. Механічні характеристики в пластинці з включеннями описуємо кусково-неперервними функціями:

$$G(x, y) = G_j, \quad \chi(x, y) = \chi_j, \quad (x, y) \in D_j, \quad j = 0, 1, \dots, J,$$

де через  $D_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ , і  $D_0$  позначено області, які займають включення і пластинка, відповідно.

Зазначимо, що  $Q_S = -i[\Phi]$ , де  $[\Phi]$  – стрибок потенціалу  $\Phi$  при переході через контур  $L$ .

При вибраному таким чином загальному розв'язку вектор напружень (1) є неперервним при переході через межі поділу матриці і включень. У зв'язку з цим невідомі функції визначаємо з умови неперервності переміщень при переході через межі поділу матеріалів

$$\begin{aligned}\chi_k \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - \frac{d\bar{z}}{dz} \cdot [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}] &= \\ &= H_k \left\{ \chi_0 \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - \frac{d\bar{z}}{dz} \cdot [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}] \right\},\end{aligned}\quad (4)$$

де  $k = 1, \dots, J$ ,  $H_k = G_k/G_0$ .

У формулах (4) вирази зліва і справа є відповідно їх граничними значеннями при  $z \rightarrow L$ . Використовуючи формули Племеля – Сохоцького, на підставі (4) отримуємо рівняння

$$\beta_k [\Phi] + S_k(\Phi, \Psi) = f, \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned}f &= -S_k(\Phi_c, \Psi_c), \quad \alpha_k = \frac{H_k \chi_0 - \chi_k}{H_k - 1}, \quad \beta_k = \frac{1}{2} \frac{H_k(\chi_0 + 1) + (\chi_k + 1)}{H_k - 1}, \\ S_k(\Phi, \Psi) &= \alpha_k \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - \frac{d\bar{z}}{dz} \cdot [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}], \quad z \in L.\end{aligned}\quad (6)$$

Тут функції  $\Phi$ ,  $\Psi$  визначаються за формулами (3) при  $z \in L$ , у яких сингулярні інтеграли розглядаються в сенсі головного значення за Коші.

**Модифіковані інтегральні рівняння.** Розглянемо пластинку, що займає область  $D$ . Межа області  $D$  ненавантажена, пластинка перебуває під дією зусиль на нескінченності (для пластинок нескінченних розмірів) та зосереджених сил.

Введемо спочатку нову змінну  $Q = \frac{Q_s dt}{2\pi ds}$ , покладемо  $Q = R + iI$  та перепишемо інтегральне зображення (3) так:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \int_L [R(t)\Phi_1(z, t) + I(t)\Phi_2(z, t)] ds + \Phi_c(z), \\ \Psi(z) &= \int_L [R(t)\Psi_1(z, t) + I(t)\Psi_2(z, t)] ds + \Psi_c(z),\end{aligned}\quad (7)$$

де

$$\Phi_j = \frac{C_j}{t-z}, \quad \Psi_j = \frac{\bar{C}_j}{t-z} - C_j \frac{\bar{t}}{(t-z)^2} \quad \text{при } C_1 = 1, \quad C_2 = i. \quad (8)$$

Введемо у розгляд потенціали Мусхелішвілі  $\Phi_j^D, \Psi_j^D, j = 1, 2$ , які у довільній точці  $t = c \in D$  мають такі ж особливості, як і потенціали  $\Phi_j, \Psi_j$  у зображеннях (7), і відповідні цим потенціалам напруження на межі області  $D$  є відсутніми. Тобто шукані потенціали  $\Phi_j^D(z, c), \Psi_j^D(z, c)$  мають у точці  $z = c$  полюси

$$\Phi_j^D \sim \frac{C_j}{c-z}, \quad \Psi_j^D \sim \frac{\bar{C}_j}{c-z} - \frac{\bar{c}C_j}{(c-z)^2}.$$

Інтегральне зображення загального розв'язку задачі теорії пружності для області  $D$  тоді запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \int_L [R(t)\Phi_1^D(z, t) + I(t)\Phi_2^D(z, t)] ds + \Phi_D(z), \\ \Psi(z) &= \int_L [R(t)\Psi_1^D(z, t) + I(t)\Psi_2^D(z, t)] ds + \Psi_D(z),\end{aligned}\quad (9)$$

де  $\Phi_D(z), \Psi_D(z)$  – потенціали для суцільної області  $D$ , які відповідають прикладеному до пластинки зовнішньому навантаженню.

За побудовою потенціали (9) автоматично задовольняють умову відсутності напружень на межі області  $D$ , і вектор напружень  $q$ , що їм відповідає, є неперервними при переході через контур  $L$ .

Інтегральні рівняння матимуть вигляд

$$\beta_k 2\pi \frac{ds}{dt} (iR - I) + S_k(\Phi, \Psi) = f, \quad z \in L_k, \quad k = 1, \dots, J, \quad (10)$$

де функції  $\Phi, \Psi$  – визначаються за формулами (9),  $f = -S_k(\Phi_D, \Psi_D)$ .

**Числовий алгоритм розв'язування інтегральних рівнянь.** Для розв'язування рівняння (10) використаємо метод механічних квадратур. При цьому рівняння контуру інтегрування запишемо параметрично у вигляді  $\xi = \alpha(\theta), \eta = \beta(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Розглянемо випадок одного включення. Введемо на контурі  $L$  вузлові точки  $z_v = \tilde{x}_v + i\tilde{y}_v, v = 1, \dots, N, t_k = x_k + iy_k$ , де  $\tilde{x}_k = \alpha(\tau_k), \tilde{y}_k = \beta(\tau_k), x_k = \alpha(\theta_k), y_k = \beta(\theta_k), \theta_k = Hk, \tau_n = \theta_n - H/2, H = 2\pi/N, N$  – кількість вибраних вузлових точок.

Поклавши у співвідношеннях (10)  $x = \tilde{x}_v, y = \tilde{y}_v$ , і замінивши інтеграли квадратурною формулою прямокутників [7], яка для періодичних підінтег-

ральних функцій, що можуть містити ядра Коші, є формулою підвищеної точності, отримуємо систему рівнянь

$$\beta_k 2\pi \left( \frac{ds}{dt} \right)_v (iR_v - I_v) + H \sum_{n=1}^N (S_{vn}^{(R)} R_n + S_{vn}^{(I)} I_n) = f_v, \quad v = 1, \dots, N, \quad (11)$$

де

$$S_{vn}^{(R)} = S_k(\Phi_1^D(z_v, t_n), \Psi_1^D(z_v, t_n)), \quad S_{vn}^{(I)} = S_k(\Phi_2^D(z_v, t_n), \Psi_2^D(z_v, t_n)),$$

$$f_v = -S_k(\Phi_D(z_v), \Psi_D(z_v)), \quad R_n = R(x_n, y_n) s'_n,$$

$$I_n = I(x_n, y_n) s'_n, \quad s'_n = (ds/d\theta)|_{\theta=\theta_n}.$$

Тут враховано, що функції  $S_k(\Phi, \Psi)$  містять інтеграли типу Коші.

Доповнимо цю систему рівняннями, отриманими з них шляхом заміни параметрів  $t$  і  $\tau$  на  $t + H/2$  і  $\tau + H/2$ , відповідно:

$$\beta_k 2\pi \left( \frac{ds}{dt} \right)_n (iR_n - I_n) + H \sum_{v=1}^N (S_{nv}^{(R)} R_v + S_{nv}^{(I)} I_v) = f_n, \quad n = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Системи рівнянь (11) і (12) є замкненими. Після знаходження величин  $R$ ,  $I$  у вузлових точках потенціали (а далі й напруження) у довільних точках пластинки можуть бути знайдені за квадратурними формулами. При визначенні напружень на межі поділу необхідно додатково врахувати складові, що виникають при граничному переході у формулі Сохоцького.

**Включення, послаблене отвором.** Розглянемо нескінченну пластинку з включенням, яке послаблене отвором, межа  $\Gamma$  якого вільна від навантаження. За область  $D$  виберемо нескінченну площину з отвором, обмеженим контуром  $\Gamma$ . Задача знаходження допоміжних потенціалів  $\Phi_j^D(z, c)$ ,  $\Psi_j^D(z, c)$  зводиться до визначення потенціалів  $\Phi_0$ ,  $\Psi_0$  з полюсами у точці  $z = c$ :

$$\Phi_0 \sim \frac{C}{c - z}, \quad \Psi_0 \sim \frac{\bar{C}}{c - z} - \frac{\bar{c} C}{(c - z)^2} \quad (13)$$

при умові, що відповідні цим потенціалам напруження на межі області  $D$  відсутні. Тут  $C$  – довільна комплексна стала.

Розглянемо детальніше випадок, коли отвір має форму еліпса. Для побудови потенціалів  $\Phi_0$ ,  $\Psi_0$  необхідно розглянути задачу теорії пружності для пластинки із еліптичним ненавантаженим отвором за умови, що у внутрішніх точках комплексні потенціали  $\phi_0(z)$  та  $\psi_0(z)$  мають такі особливості [4]:

$$\phi_0 \sim -C \ln(z - c), \quad \psi_0 \sim \bar{C} \ln(z - c) + \bar{c} C \frac{1}{z - c}, \quad (14)$$

де  $C$ ,  $c$  – довільні комплексні сталі.

Розв'язок знаходимо з використанням методу Мусхелішвілі [4]. Для цього використовуємо функцію  $z = \omega(\zeta)$ , що конформно відображає область  $D$  на зовнішність одиничного круга. Тут  $\omega(\zeta) = R(\zeta + m/\zeta)$ ,  $R = (a + b)/2$ ,  $m = (a - b)/(a + b)$ ,  $a$  і  $b$  – півосі еліптичного отвору,  $|\zeta| > 1$ .

Комплексні потенціали  $\phi(\zeta) = \phi_0(\omega(\zeta))$ ,  $\psi(\zeta) = \psi_0(\omega(\zeta))$  у площині  $\zeta$  матимуть вигляд [1]

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) &= U(\zeta) + \overline{\gamma C} \frac{\zeta^2}{(\zeta - \zeta_*)}, \\ \psi(\zeta) &= V(\zeta) + \gamma C \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)} - \frac{\zeta(1 + m\zeta^2)}{\zeta^2 - m} \phi'(\zeta), \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$c = \omega(\zeta_0), \quad \zeta_* = \frac{1}{\zeta_0}, \quad \gamma = \frac{\overline{\omega(\zeta_0)} - \overline{\omega}(1/\zeta_0)}{\omega'(\zeta_0)},$$

$$U(\zeta) = -C \left[ \ln(\zeta - \zeta_0) + \ln\left(\frac{\zeta - \zeta_*}{\zeta}\right) \right], \quad V(\zeta) = \bar{C} \left[ \ln(\zeta - \zeta_0) + \ln\left(\frac{\zeta - \zeta_*}{\zeta}\right) \right].$$

Прийmemo, що пластинка з включенням, послабленим додатково круговим отвором радіуса  $R$ , розтягується зусиллями  $p$  уздовж осі  $Oy$ . Результати розрахунків для випадку, коли включення має вигляд шестикутника зі стороною  $a$ , послабленого круговим отвором радіуса  $R = a/2$  при залежності між модулями пружності  $E_0 = 0.5E_1$  та  $\nu_0 = \nu_1 = 0.3$ , наведено на рис. 1а. Тут  $\sigma_n$  – віднесені до  $p$  нормальні напруження,  $\sigma_{tw}$  і  $\sigma_{tz}$  – відносні кільцеві напруження біля межі поділу у включенні та матриці відповідно. Віднесені до  $p$  напруження  $\sigma_y$  (криві 1) і  $\sigma_x$  (криві 2) при  $y = 0$  наведено на рис. 1б (у включенні) та рис. 1в (у матриці).

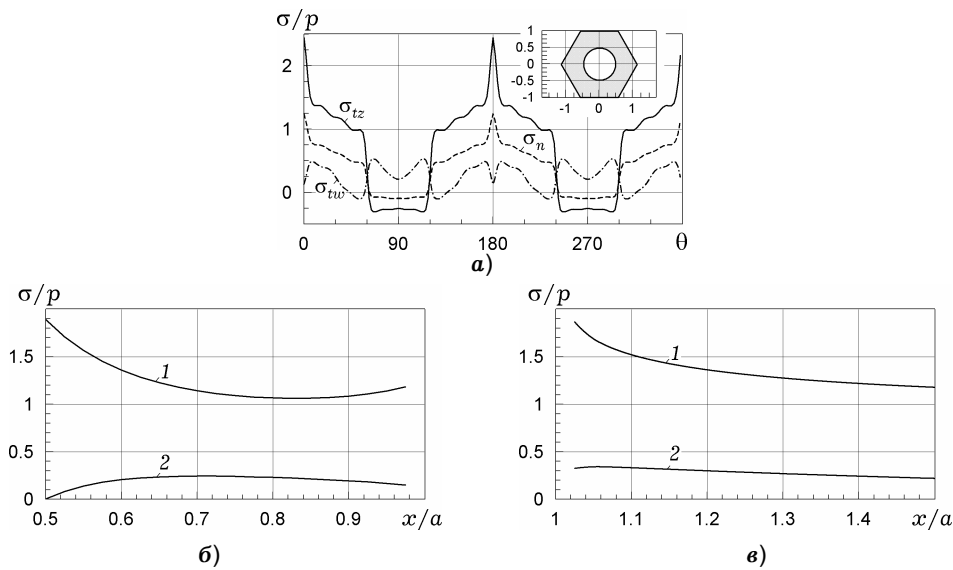


Рис. 1. Напруження біля шестикутного включення із круговим отвором.

З аналізу наведених графіків і результатів обчислень для інших форм включень, що мають форму рівностороннього многокутника, впливає, що при м'якшому включенні концентрація напружень біля отвору зменшується. Для включень, що мають форму многокутника з різною кількістю сторін, виявилось, що коефіцієнт концентрації напружень (ККН) на отворі  $\approx 2$ . Значно більше впливає форма включень на напруження на межі поділу матеріалів, причому напруження найбільші є в околі кутових точок.

**Півплощина з включеннями.** Розглянуто півплощину із вільною межею, яка містить включення. Розв'язок типу Гріна для півплощини  $y < 0$  з вільною межею має вигляд [6]

$$\Phi_0(z) = \frac{C}{c-z} - \frac{C}{\bar{c}-z} + \frac{(c-\bar{c})\bar{C}}{(\bar{c}-z)^2}, \quad \Psi_0(z) = \Omega_0 - z\Phi_0' - \Phi_0,$$

$$\text{де } \Omega_0 = \frac{c\bar{A}}{c-z} + \frac{(c-\bar{c})C}{(c-z)^2} - \frac{\bar{C}}{\bar{c}-z}.$$

Виконано розрахунки напружень біля включення, розміщеного біля межі пластинки (півплощини). Розглянуто м'якше включення:  $E_0 = E_1/2$ , еліптичної форми з півосями  $a$ ,  $a/4$  і відстанню від центра включення до межі

1.5a, пластинка розтягується зусиллями  $p$  уздовж осі  $Ox$ . Для порівняння розглянуто також прямокутне включення із півсторонами  $a$ ,  $a/4$  і з радіусом заокруглення вершин  $R = a/4$ . Результати обчислень напружень для цих випадків наведено відповідно на рис. 2а, рис. 2в і рис. 2б, рис. 2г.

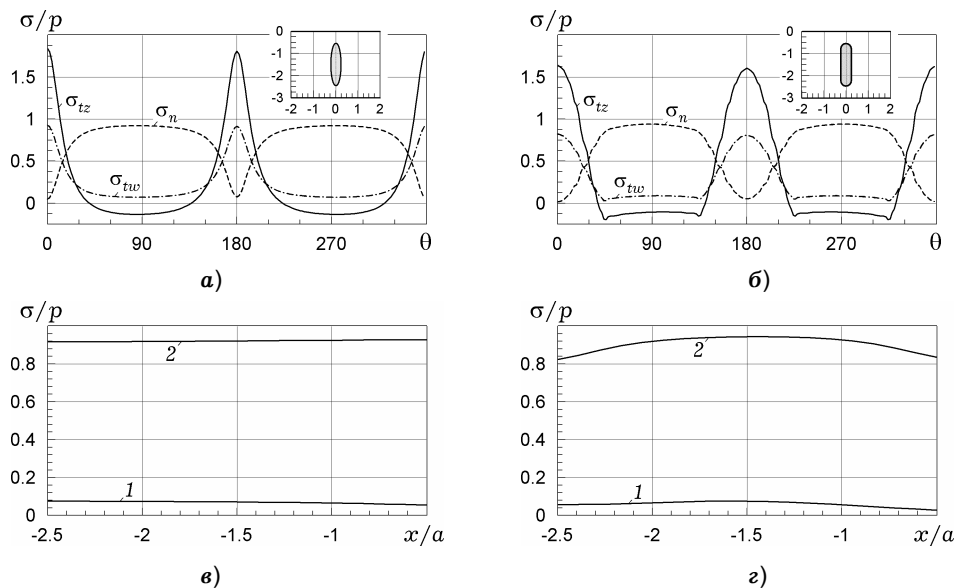


Рис. 2. Напруження біля еліптичного і прямокутного включень.

Бачимо, що напруження уздовж включення мало змінюються, залишаючись практично сталими. Таким чином, для обох розглянутих випадків, коли включення розміщене близько до межі, відхилення напружень уздовж еліптичного включення від їх середнього значення не перевищує 1%, причому для жорсткішого включення відхилення практично відсутнє.

**Смуга із включеннями.** Розглянемо смугу  $-h < y < 0$ ,  $-\infty < x < \infty$  з вільними від навантажень межами. Дислокаційний розв'язок для смуги наведено у [6].

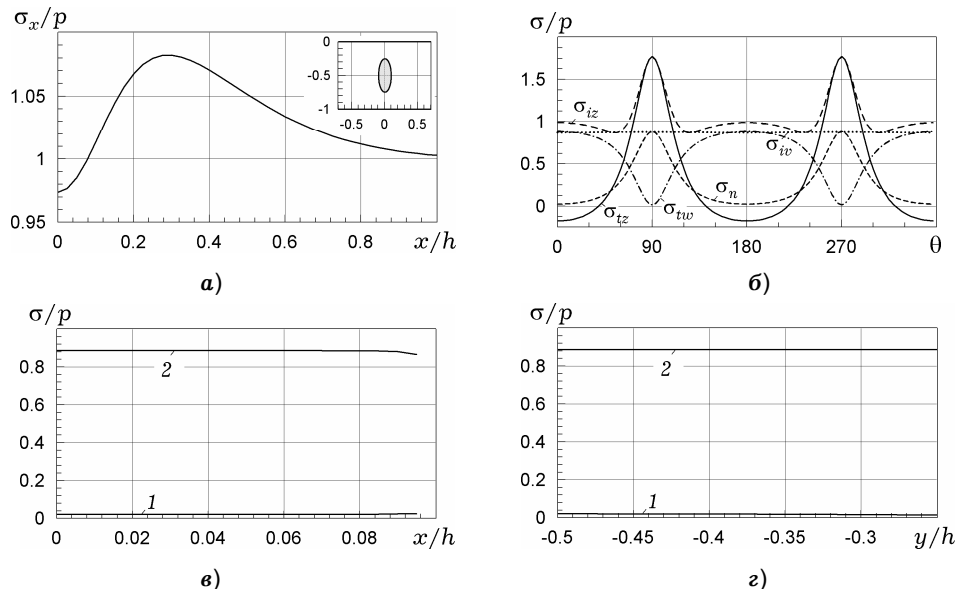


Рис. 3. Напруження у смугі з еліптичним включенням.

Нехай смуга містить еліптичне включення з центром у точці  $(x_c, y_c)$  і півосями  $a, b$ , паралельними до координатних осей  $Ox$  і  $Oy$ . Смуга розтягується зусиллями  $p$  у напрямку осі  $Ox$ . Результати обчислень віднесених до  $p$  напружень на межі поділу при  $a=0.1h, b=0.25h, x_c=0, y_c=-0.5h$  наведено на рис. 3б. Тут додатково наведено віднесені до  $p$  інтенсивності напружень для включення  $\sigma_{iv}$  та для матриці  $\sigma_{iz}$ . На рис. 3а подано віднесені до  $p$  напруження  $\sigma_x$  на межі смуги. Віднесені до  $p$  напруження уздовж півосей включення наведено на рис. 3в, рис. 3г.

З аналізу наведених результатів обчислень випливає, що інтенсивність напружень на межі поділу у включенні є практично сталою величиною. Також практично сталими є і напруження на півосях (рис. 3в, рис. 3г).

У зв'язку з цим виконано обчислення інтенсивностей напружень на межі поділу матеріалів для еліптичних включень різної форми та різних значень пружних сталей. У табл. 1 наведено віднесені до  $p$  максимальні  $\max \sigma_i$  та мінімальні  $\min \sigma_i$  значення інтенсивностей напружень на межі поділу у включенні, середні значення інтенсивності напружень  $\sigma_{i,av}$ , максимальне відносне відхилення  $\varepsilon$  (у %) між  $\sigma_{i,av}$  та інтенсивністю напружень на контурі, а також максимальна інтенсивність напружень  $\text{Max } \sigma_i^{(m)}$  у матриці. Для порівняння наведено також аналогічні дані для нескінченної пластинки (значення під штриховою рисою), для якої  $\varepsilon = 0$ .

Таблиця 1

$a/h$	$b/h$	$G_1/G_0$	$\sigma_{i,av}/p$	$\varepsilon, \%$	$\max \sigma_i/p$	$\min \sigma_i/p$	$\text{Max } \sigma_i^{(m)}/p$
0.1	0.25	0.25	0.6991	0.771	0.7045	0.6941	2.9399
0.25	0.25	0.25	0.6031	2.788	0.6199	0.5895	–
0.1	0.3	0.25	0.7470	1.242	0.7563	0.7383	3.1602
0.2	0.3	0.25	0.6614	4.038	0.6881	0.6407	–
0.3	0.3	0.25	0.6016	7.171	0.6448	0.57	2.5555
0.1	0.4	0.25	0.8398	3.451	0.8688	0.814	3.6125
			0.7191	0	0.7191	0.7191	3.0374
0.2	0.4	0.25	0.7850	8.796	0.8541	0.7392	3.4173
0.3	0.4	0.25	0.7314	12.320	0.8215	0.6726	3.2152
0.4	0.4	0.25	0.6846	13.113	0.7744	0.6191	3.0266
			0.4934	0	0.4934	0.4934	2.0279
0.1	0.25	0.5	0.8734	0.372	0.8767	0.8704	1.8093
			0.8434	0	0.8434	0.8434	1.745
0.25	0.25	0.5	0.7925	1.779	0.8066	0.7814	1.6531
			0.7413	0	0.7413	0.7413	1.5304
0.25	0.25	5.0	1.1545	0.404	1.1591	1.1499	1.1569
			1.2118	0	1.2118	1.2118	1.2151

Із таблиці видно, що можна виділити коло задач, коли напруження у включенні є практично сталими. На основі даних, наведених у таблиці, та виконаних обчислень можна зробити висновок, що коли піввісь включень  $b$

є меншою від  $0.25h$ , то інтенсивності напружень із похибкою, не більшою ніж 1.5%, є сталими величинами. При зменшенні півосі  $a$ , напрямленої уздовж межі смуги, напруження менше відрізняються від сталої.

Виконано дослідження для смуги з квадратним включенням із півстороною  $a$  з заокругленими (з радіусом  $R=0.5a$ ) кутами при  $a=0.25h$ ,  $G_1/G_0=0.5$ ,  $\nu_1=0.25$ ,  $\nu_0=0.3$ . На рис. 4 наведено результати розрахунків напружень за розтягу смуги зусиллями  $p$ .

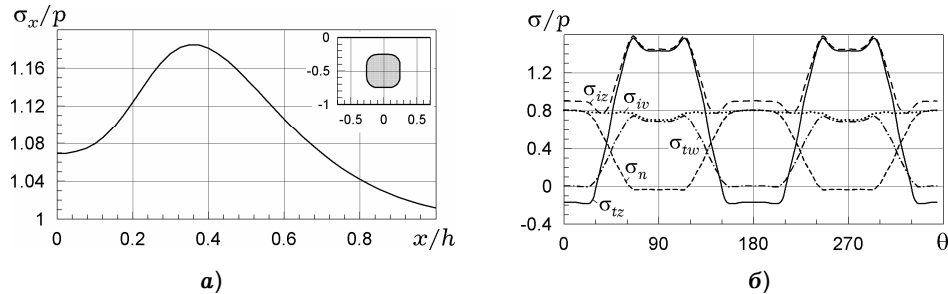


Рис. 4. Напруження біля заокругленого квадратного включення.

Із рисунка видно, що в заокругленому м'якшому включенні напруження виявились також близькими до сталих.

Розроблений алгоритм застосовано до дослідження напружено-деформованого стану залізобетонних плит за чистого та триточкового згину. Розглянуто плиту (смугу) товщини  $h$  з круговим циліндричним сталевим включенням радіуса  $R$ , з центром у точці  $(x_c, y_c)$ , яка перебуває в умовах чистого згину моментами  $M$ . Приймали, що модуль пружності і коефіцієнт Пуассона включення (сталі) дорівнюють  $E_1=2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu_1=0.25$ , а основного матеріалу (бетону) –  $E_0=0.2 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu_0=0.17$ . Обчислення для випадку плоскої деформації проведено при  $x_c=0$ ,  $y_c=0.5h$ ,  $R/h=0.1, 0.15, \dots, 0.45$ . Розраховані при  $R=0.2h$  напруження, віднесені до величини  $p=M/h^2$ , на межі поділу матеріалів і на нижній межі смуги наведено на рис. 5б і рис. 5а відповідно.

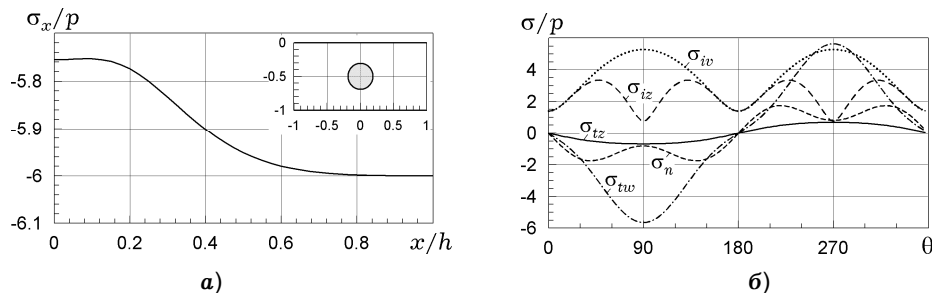


Рис. 5. Напруження у включенні радіуса  $R=0.2h$ , чистий згин.

З аналізу виконаних розрахунків і графіків, наведених на рис. 5, випливає, що при збільшенні радіуса включення напруження біля межі поділу у включенні зростають. Кільцеві напруження на межі поділу в основному матеріалі невисокі, а інтенсивність напружень неістотно залежить від розмірів включення.

Розглянуто триточковий згин плити силами  $(0, 0.5P)$ ,  $(0, -P)$ ,  $(0, 0.5P)$ , прикладеними в точках  $(-2h, -h)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(2h, -h)$ . Віднесені до  $p=P/h$  напруження для включень при  $R/h=0.2$  наведено на рис. 6.



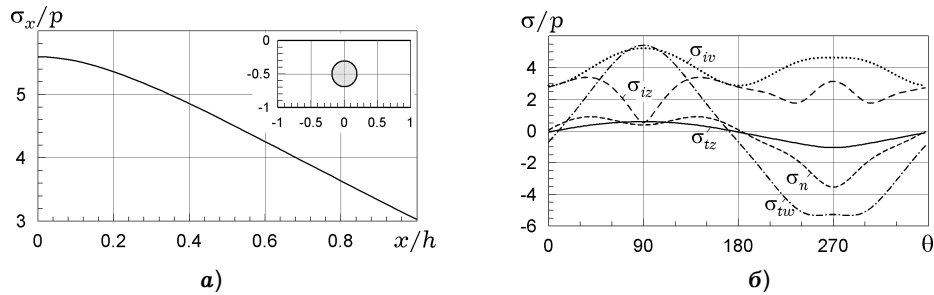


Рис. 6. Напруження у включенні радіуса  $R = 0.2h$ , триточковий згин.

Бачимо, що при триточковому згині напруження біля включення у його нижній частині (рис. 6а) близькі до розподілу напружень за чистого згину. В околі центральної сили розподіл напружень має складний характер, при цьому напруження тут є максимальними за величиною.

**Висновки.** Побудовано модифіковані інтегральні рівняння для пластинок із пружними включеннями, які додатково послаблені отворами. Основна перевага таких рівнянь полягає в тому, що граничні умови на деяких межах задовольняються тотожно, що дозволяє підвищити точність розрахунків та зменшити обсяг обчислень. Розв'язування інтегральних рівнянь проведено чисельно з використанням методу механічних квадратур. Проведене тестування вказує на високу точність та ефективність розробленого підходу. З використанням розробленого алгоритму виконано дослідження залежності напружень від форми включень і форми матриць у включеннях та в їхніх околах. Встановлено характерні особливості у розподілі напружень залежно від геометрії включень і пружних характеристик матеріалів. Зокрема, встановлено, що напруження для широкого кола форм включень є практично сталими.

1. Божидарнік В. В., Максимович О. В. Визначення напруженого стану біля крайових тріщин у пластині з отвором складної форми // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 1. – С. 19–26.  
Te same: *Bozhydarnik V. V., Maksymovych O. V.* Determination of the stressed state near edge cracks in a plate containing a hole of complex shape // *Mater. Sci.* – 2010. – **46**, No. 1. – P. 16–26.
2. Космодамианский А. С. Анизотропные многосвязные среды. – Донецк: Изд-во Донецк. ун-та, 1970. – 233 с.
3. Маруха В. І., Панасюк В. В., Силованюк В. П. Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації. – Львів: Сполом, 2009. – 262 с. – Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довід. посіб. / Під заг. ред. акад. НАН України В. В. Панасюка. – Т. 12.
4. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
5. Саврук М. П., Зеленьак В. М. Сингулярные интегральные уравнения плоских задач теплопроводности и термоупругости для кусочно-однородной плоскости с трещинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1986. – **22**, № 3. – С. 82–88.  
Te same: *Savruk M. P., Zelenyak V. M.* Singular integral equations of plane problems of thermal conductivity and thermoelasticity for a piecewise-uniform plane with cracks // *Mater. Sci.* – 1986. – **22**, No. 3. – P. 297–304.
6. Саврук М. П., Максимович Я. В. Побудова розв'язку типу Гріна задачі теорії пружності для смуги // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – **35**, № 6. – С. 17–21.  
Te same: *Savruk M. P., Maksymovych Ya. V.* Green-type solution of a problem of the theory of elasticity for a strip // *Mater. Sci.* – 1999. – **35**, No. 6. – P. 770–776.
7. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1989. – 248 с.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО УПРУГИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В ПЛАСТИНКАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Разработан алгоритм определения напряжений в пластинках сложной формы, содержащих упругие включения. Алгоритм базируется на применении модифицированных интегральных уравнений, при которых краевые условия для напряжений на границах раздела удовлетворяются тождественно. Интегральные уравнения решены численно с помощью метода механических квадратур. Проведено исследование напряжений около включений в пластинках различной формы. Установлены характерные особенности в распределении напряжений в зависимости от формы включений и упругих характеристик материалов.

## DETERMINATION OF STRESSES NEAR ELASTIC INCLUSIONS IN PLATES OF COMPLEX SHAPE

An algorithm to determinate the stresses in plates of complex shape containing elastic inclusions is developed. The algorithm is based on using the modified integral equations in which the boundary conditions for stresses at the interfaces are satisfied identically. The integral equations are solved numerically by the method of mechanical quadratures. The stresses near inclusions in the plates of various shape are studied. The characteristic features of the stress distribution depending on the shape of inclusions and elastic characteristics of the materials are determined.

<sup>1</sup> Луцьк. держ. техн. ун-т, Луцьк,

<sup>2</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
17.02.14