УДК 517.95: 519.63: 539.3

А. О. Стягар, Я. Г. Савула, І. І. Дияк

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТІЛА З ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ

Розглянуто математичну модель пружного тіла з тонким включенням або покриттям у вигляді тонкої пружної оболонки. Показано, що відповідний оператор Стєклова – Пуанкаре математичної моделі має властивості, що забезпечують існування і єдиність слабкого розв'язку крайової задачі. Запропоновано метод розв'язування, який базується на алгоритмі декомпозиції області з використанням методу граничних елементів і методу скінченних елементів. Доведено збіжність ітераційного методу декомпозиції області та наведено результати обчислювальних експериментів.

Вступ. Сучасні елементи інженерних конструкцій і механізмів, в основному, є неоднорідними за своєю структурою, тому виникає необхідність побудови ефективних числових методів для визначення напружено-деформованого стану (НДС) таких об'єктів. Окремої уваги заслуговує випадок, коли конструкції є різномасштабними та мають тонкі включення чи покриття. Важливим питанням є дослідження впливу таких включень і покриттів на основне середовище. Цій проблематиці присвячена велика кількість статей і монографій, зокрема [1–3, 5–8, 10, 11, 13–16].

Як відомо [1], тонкі включення найбільш зручно моделювати з використанням математичного апарату теорії оболонок або пластин. У роботах [7, 8, 10] основну увагу приділено детальному аналізу напружено-деформованого стану тіл з покриттями. Роботи [2, 3] присвячені моделям, побудованим на основі класичної теорії пружності та безмоментної теорії оболонок Тимошенка. Для числового аналізу цих моделей застосовано метод скінченних елементів (МСЕ) з апроксимаціями у вигляді функцій «бульбашок». У роботі [15] модель, побудована на основі класичної теорії пружності та теорії оболонок Тимошенка, використовується для аналізу задач типу Гіркмана. Чисельний аналіз у цьому випадку здійснено за допомогою поєднання МСЕ та прямого методу граничних елементів (ПМГЕ). Варто зазначити, що у роботах [2, 3, 15] числові дослідження проведено без використання ітераційних алгоритмів декомпозиції області.

У цій роботі сформульовано математичну модель, яка описує НДС конструкції з включенням, побудовану на основі класичної теорії пружності та теорії оболонок типу Тимошенка [4]. Запропоновано ітераційний метод для числового розв'язання задачі, що базується на поєднанні МСЕ та ПМГЕ. Використання гетерогенних числових апроксимацій дозволяє підвищити ефективність обчислень для областей, що складаються з кількох частин з різними геометричними та фізичними характеристиками [15, 17]. Доведено збіжність розробленого методу та проведено числові експерименти, що підтверджують ефективність запропонованого підходу.

1. Формулювання задачі. Розглянемо задачу про плоску деформацію пружного тіла з включенням, поперечний переріз якого займає область $\Omega \in \mathbb{R}^2$, $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ (рис. 1), де Ω_1 – поперечний переріз тіла, а Ω_2 – поперечний переріз включення. Вважаємо, що межа Γ перерізу тіла складається з таких частин: Γ_D – частина межі, на якій задано умови на переміщення;

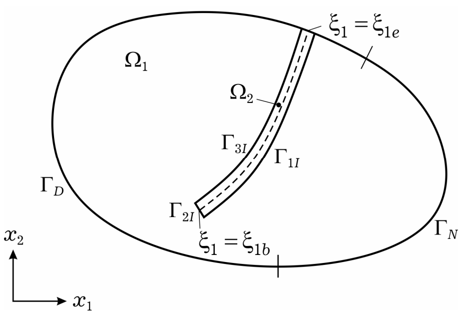

Рис. 1. Тіло з тонким включенням.

Γ_N – частина межі, на якій задані умови на напруження; $\Gamma_I = \Gamma_{1I} \cup \Gamma_{2I} \cup \cup \Gamma_{3I}$ – частина межі, яка є спільною для тіла та включення.

Позначимо через $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))$ вектор переміщень у точці $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ тіла Ω_1; через $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}))$ – вектор об'ємних сил, що діють у точці $\mathbf{x}$ тіла Ω_1; через e_{ij}, $i, j = 1, 2$, та σ_{ij}, $i, j = 1, 2$, – відповідно компоненти тензора деформацій і тензора напружень у тілі Ω_1; λ_1, μ_1 – коефіцієнти Ляме для тіла Ω_1, які визначаються співвідношеннями

$$\lambda_1 = \frac{E_1 \nu_1}{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)}, \qquad \mu_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)},$$

де E_1 – модуль Юнґа матеріалу тіла, ν_1 – коефіцієнт Пуассона.

Для опису напружено-деформованого стану в області Ω_1 використаємо співвідношення класичної теорії пружності

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i, \qquad i = 1, 2, \tag{1}$$

де

$$\sigma_{12} = \mu_1 e_{12}, \qquad \sigma_{ii} = 2\mu_1 e_{ii} + \lambda_1 (e_{11} + e_{22}), \qquad i = 1, 2,$$

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \qquad e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right), \qquad e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}. \tag{2}$$

Надалі без втрати загальності будемо вважати, що $f_1(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) \equiv 0$.

Виберемо такі крайові умови на зовнішній межі тіла:

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = 0 \qquad \text{на} \qquad \Gamma_D \tag{3}$$

та

$$\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 = t_{01}, \qquad \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 = t_{02} \qquad \text{на} \qquad \Gamma_N, \tag{4}$$

де $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі тіла Ω_1; t_{01}, t_{02} – задані зусилля.

Для опису напружено-деформованого стану у включенні Ω_2 застосуємо рівняння теорії оболонок Тимошенка [4]

$$-\frac{1}{A_1} \frac{dT_{11}}{d\xi_1} - k_1 T_{13} = p_1, \tag{5}$$

$$-\frac{1}{A_1} \frac{dT_{13}}{d\xi_1} + k_1 T_{11} = p_3, \tag{6}$$

$$-\frac{1}{A_1} \frac{dM_{11}}{d\xi_1} + T_{13} = m_1, \qquad \xi_{1b} \le \xi_1 \le \xi_{1e}, \tag{7}$$

де T_{11}, T_{13}, M_{11} – зусилля і момент в оболонці; $A_1 = A_1(\xi_1)$, $k_1 = k_1(\xi_1)$ – параметр Ляме та кривизна серединної лінії оболонки.

Зауважимо, що рівняння теорії оболонок (5)–(7) є рівняннями плоскої задачі, які відповідають випадку циліндричної оболонки, нескінченної у напрямку ξ_2 у криволінійній системі координат ξ_1, ξ_2, ξ_3, яка є пов'язаною із серединною поверхнею.

Відомо, що фізичні співвідношення між деформаціями та силами і моментом у теорії оболонок (закон Гука) мають вигляд [4]

$$T_{11} = \frac{E_2 h}{1-\nu_2^2}\varepsilon_{11}, \qquad T_{13} = k' G' h \varepsilon_{13}, \qquad M_{11} = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_2^2)}\chi_{11},$$

де E_2 – модуль Юнґа для оболонки, ν_2 – коефіцієнт Пуассона; h – товщина оболонки; G' – модуль зсуву; k' – коефіцієнт зсуву. Деформації ε_{11}, ε_{13}, χ_{11} в оболонці, в свою чергу, виражаються відповідно через тангенціальні v_1 та нормальні w переміщення точок серединної лінії і кут повороту γ_1:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{dv_1}{d\xi_1} + k_1 w, \qquad \varepsilon_{13} = \frac{1}{A_1}\frac{dw}{d\xi_1} + \gamma_1 - k_1 v_1, \qquad \chi_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{d\gamma_1}{d\xi_1}.$$

Функції навантаження на оболонку за відсутності масових сил мають вигляд

$$p_1 = \left(1 + k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{13}^{+} + \left(1 - k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{13}^{-}, \tag{8}$$

$$p_3 = \left(1 + k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{33}^{+} - \left(1 - k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{33}^{-}, \tag{9}$$

$$m_1 = \frac{h}{2}\left(\left(1 + k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{13}^{+} - \left(1 - k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{13}^{-}\right), \tag{10}$$

де σ_{ij}^{+}, σ_{ij}^{-}, $i, j = 1, 3$, – компоненти вектора поверхневих сил на зовнішній ($\xi_3 = h/2$) і внутрішній ($\xi_3 = -h/2$) поверхнях оболонки; m_1 – момент зовнішнього поверхневого навантаження.

Зазначимо, що для ізотропного тіла $G' = \dfrac{E_2}{2(1+\nu_2)}$, $k' = \dfrac{5}{6}$.

На межі $\xi_1 = \xi_{1e}$ запишемо наступні крайові умови:

$$v_1 = 0, \qquad w = 0, \qquad \gamma_1 = 0. \tag{11}$$

Поділимо спільну межу Γ_I тіла Ω_1 та включення Ω_2 на такі частини (рис. 1):

$$\Gamma_{1I} = \left\{\xi = (\xi_1, \xi_3) : \xi_{1b} \le \xi_1 \le \xi_{1e},\ \xi_3 = -\frac{h}{2}\right\},$$

$$\Gamma_{2I} = \left\{\xi = (\xi_1, \xi_3) : \xi_1 = \xi_{1b},\ -\frac{h}{2} \le \xi_3 \le \frac{h}{2}\right\},$$

$$\Gamma_{3I} = \left\{\xi = (\xi_1, \xi_3) : \xi_{1b} \le \xi_1 \le \xi_{1e},\ \xi_3 = \frac{h}{2}\right\}.$$

На спільних межах основного тіла та оболонки задамо умови спряження (ідеальний механічний контакт), запропоновані в [7, 15]

– *на межі* Γ_{1I}:

$$u_n = w, \qquad u_\tau = -v_1 + \frac{h}{2}\gamma_1, \tag{12}$$

$$\sigma_{nn} = -\sigma_{33}^{-}, \qquad \sigma_{n\tau} = -\sigma_{13}^{-}; \tag{13}$$

– *на межі* Γ_{2I}:

$$u_n = v_1 + \xi_3\gamma_1, \qquad u_\tau = w, \tag{14}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{nn}\, d\xi_3 = T_{11}, \qquad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{n\tau}\, d\xi_3 = T_{13}, \qquad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{nn}\xi_3\, d\xi_3 = M_{11}; \tag{15}$$

– *на межі* Γ_{3I}:

$$u_n = -w, \qquad u_\tau = v_1 + \frac{h}{2}\gamma_1, \tag{16}$$

$$\sigma_{nn} = -\sigma_{33}^+, \qquad \sigma_{n\tau} = \sigma_{13}^+, \tag{17}$$

де $u_n = u_1 n_1 + u_2 n_2$, $u_\tau = u_1\tau_1 + u_2\tau_2$, а τ_1, τ_2 – компоненти одиничного вектора дотичної до межі Γ.

Зауважимо, що крайові задачі в підобластях Ω_1, Ω_2 є коректними [2, 3, 7–9], тобто існує і є єдиним їх узагальнений розв'язок.

2. Алгоритм декомпозиції області (послідовна схема Діріхле – Неймана). Опишемо ітераційний алгоритм декомпозиції області (послідовну схему Діріхле – Неймана), який використаємо для знаходження напружено-деформованого стану тіла з включенням.

Шуканий розв'язок задачі позначимо як

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}, \lambda_{31}, \lambda_{32}).$$

Ітераційний алгоритм декомпозиції області сформулюємо у такому вигляді.

Крок 1. Вибрати початкове наближення $\boldsymbol{\lambda}^0$ для невідомих переміщень на спільній межі Γ_I, задати точність $\varepsilon > 0$ та параметр релаксації $\theta > 0$.

Крок 2. Для $k = 0,1\ldots$ розв'язати крайову задачу теорії пружності в тілі Ω_1 із заданими переміщеннями $\boldsymbol{\lambda}^k$ на спільній межі Γ_I та отримати наближення для сил T_{11}, T_{13} і моменту M_{11} у включенні Ω_2.

Крок 3. Розв'язати крайову задачу теорії оболонок в Ω_2, задавши на межі Γ_I сили і момент, визначені на ***кроці 2***, і знайти переміщення u_n^{2k} та u_τ^{2k} на межі Γ_I.

Крок 4. Розрахувати нові переміщення за формулами

– *на* Γ_{1I}:

$$\lambda_{11}^{k+1} = (1-\theta)\lambda_{11}^k + \theta u_n^{2k}\big|_{\Gamma_{1I}},$$

$$\lambda_{12}^{k+1} = (1-\theta)\lambda_{12}^k + \theta u_\tau^{2k}\big|_{\Gamma_{1I}};$$

– *на* Γ_{2I}:

$$\lambda_{21}^{k+1} = (1-\theta)\lambda_{21}^k + \theta v_1^k\big|_{\xi_1=\xi_{1b}},$$

$$\lambda_{22}^{k+1} = (1-\theta)\lambda_{22}^k + \theta w^k\big|_{\xi_1=\xi_{1b}},$$

$$\lambda_{23}^{k+1} = (1-\theta)\lambda_{23}^k + \theta \gamma_1^k\big|_{\xi_1=\xi_{1b}};$$

– *на* Γ_{3I}:

$$\lambda_{31}^{k+1} = (1-\theta)\lambda_{31}^k + \theta u_n^{2k}\big|_{\Gamma_{3I}},$$

$$\lambda_{32}^{k+1} = (1-\theta)\lambda_{32}^k + \theta u_\tau^{2k}\big|_{\Gamma_{3I}}.$$

Крок 5. Якщо $\dfrac{\left\|\boldsymbol{\lambda}^{k+1}-\boldsymbol{\lambda}^{k}\right\|}{\left\|\boldsymbol{\lambda}^{k+1}\right\|} \geq \varepsilon$, то перейти на ***крок 2***, інакше − кінець алгоритму (***крок 6***).

Крок 6. Кінець.

3. Дослідження операторів задачі та збіжності ітераційних методів декомпозиції області. Припустимо, що на спільній межі двох областей задано деяку функцію $\boldsymbol{\varphi} \in \Lambda$, де Λ − лінійний простір вигляду

$$\Lambda = \{\boldsymbol{\varphi} : \boldsymbol{\varphi} = (\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \boldsymbol{\varphi}_3),\ \boldsymbol{\varphi}_1 = (\varphi_{11}, \varphi_{12}),\ \boldsymbol{\varphi}_2 = (\varphi_{21}, \varphi_{22}, \varphi_{23}),$$

$$\boldsymbol{\varphi}_3 = (\varphi_{31}, \varphi_{32}),\ \varphi_{ij} \in H^1(\Gamma_{iI}),\ i = 1,3,\ j = 1,2,\ \varphi_{2j} \in H^{1/2}(\Gamma_{2I}),$$

$$\varphi_{2j} = \mathrm{const},\ j = 1,2,3, \quad \text{на} \quad \Gamma_{2I}\}.$$

Задамо в Λ норму та скалярний добуток у наступному вигляді:

$$(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})_\Lambda = \int\limits_{\Gamma_{1I}} \left(\frac{d\varphi_{11}}{d\xi_1}\frac{d\psi_{11}}{d\xi_1} + \frac{d\varphi_{12}}{d\xi_1}\frac{d\psi_{12}}{d\xi_1} + \varphi_{11}\psi_{11} + \varphi_{12}\psi_{12}\right) d\Gamma_{1I} +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_{2I}} (\varphi_{21}\psi_{21} + \varphi_{22}\psi_{22} + \varphi_{23}\psi_{23})\, d\Gamma_{2I} +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_{3I}} \left(\frac{d\varphi_{31}}{d\xi_1}\frac{d\psi_{31}}{d\xi_1} + \frac{d\varphi_{32}}{d\xi_1}\frac{d\psi_{32}}{d\xi_1} + \varphi_{31}\psi_{31} + \varphi_{32}\psi_{32}\right) d\Gamma_{3I},$$

$$\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \in \Lambda,$$

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_\Lambda = (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi})_\Lambda^{1/2}, \qquad \boldsymbol{\varphi} \in \Lambda.$$

Зв'язок між елементами φ_{ij} та переміщеннями в областях Ω_1 та Ω_2 можна подати у вигляді

− *на* Γ_{1I}: $\quad \varphi_{11} = u_n, \quad \varphi_{12} = u_\tau$;

− *на* Γ_{2I}: $\quad \varphi_{21} = v_1, \quad \varphi_{22} = w, \quad \varphi_{23} = \gamma_1$;

− *на* Γ_{3I}: $\quad \varphi_{31} = u_n, \quad \varphi_{32} = u_\tau$.

Позначимо через $\mathbf{S} : \Lambda \to \Lambda^*$ оператор Стєклова − Пуанкаре для задачі (1)−(17), $\mathbf{S}_i : \Lambda \to \Lambda^*$, $i = 1,2$, − локальні оператори Стєклова − Пуанкаре, які відповідають областям Ω_i, де Λ^* − простір, спряжений до Λ. Зауважимо, що оператор Стєклова − Пуанкаре для крайової задачі − це оператор, що переводить граничні умови одного типу у граничні умови іншого типу. У нашому випадку вважатимемо, що оператор Стєклова − Пуанкаре переміщення на межі переводить у зусилля. Вибір простору та гладкості функцій пов'язаний з тим, що переміщення v_1, w і кут повороту γ_1 моделі теорії оболонок Тимошенка належать до класу H^1, тобто за теоремою про вкладення просторів Соболєва є неперервними на серединній лінії області Ω_2, звідки випливає, що переміщення u_1, u_2 у тілі Ω_2 також є неперервними.

Домноживши умови спряження (13) на $A_1(1 - k_1 h/2)$, умови (15) − на $1/h$, а умови (17) − на $A_1(1 + k_1 h/2)$, отримаємо

$$\{\mathbf{S}\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}\}_{\Gamma_I} = \{\mathbf{S}_1\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}\}_{\Gamma_I} + \{\mathbf{S}_2\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}\}_{\Gamma_I},$$

де

$$\{\mathbf{S}_1\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\}_{\Gamma_I} = \left\langle -A_1\left(1-k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{nn}(\boldsymbol{\varphi}),\psi_{11}\right\rangle_{\Gamma_{1I}} +$$

$$+\left\langle -A_1\left(1-k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{n\tau}(\boldsymbol{\varphi}),\psi_{12}\right\rangle_{\Gamma_{1I}} +$$

$$+\left\langle -A_1\left(1+k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{nn}(\boldsymbol{\varphi}),\psi_{31}\right\rangle_{\Gamma_{3I}} +$$

$$+\left\langle -A_1\left(1+k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{n\tau}(\boldsymbol{\varphi}),\psi_{32}\right\rangle_{\Gamma_{3I}} +$$

$$+\left\langle -\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_{nn}(\boldsymbol{\varphi})\,d\xi_3,\psi_{21}\right\rangle_{\Gamma_{2I}} +$$

$$+\left\langle -\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_{n\tau}(\boldsymbol{\varphi})\,d\xi_3,\psi_{22}\right\rangle_{\Gamma_{2I}} +$$

$$+\left\langle -\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma_{nn}(\boldsymbol{\varphi})\xi_3\,d\xi_3,\psi_{23}\right\rangle_{\Gamma_{2I}},$$

$$\{\mathbf{S}_2\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\}_{\Gamma_I} = \left\langle -A_1\left(1-k_1\frac{h}{2}\right)\overset{-}{\sigma}_{33}(\boldsymbol{\varphi}),\psi_{11}\right\rangle_{\Gamma_{1I}} +$$

$$+\left\langle -A_1\left(1+k_1\frac{h}{2}\right)\overset{+}{\sigma}_{33}(\boldsymbol{\varphi}),\psi_{31}\right\rangle_{\Gamma_{3I}} +$$

$$+\left\langle -A_1\left(1-k_1\frac{h}{2}\right)\overset{-}{\sigma}_{13}(\boldsymbol{\varphi}),\psi_{12}\right\rangle_{\Gamma_{1I}} +$$

$$+\left\langle A_1\left(1+k_1\frac{h}{2}\right)\overset{+}{\sigma}_{13}(\boldsymbol{\varphi}),\psi_{32}\right\rangle_{\Gamma_{3I}} + \left\langle \frac{1}{h}T_{11}(\boldsymbol{\varphi}),\psi_{21}\right\rangle_{\Gamma_{2I}} +$$

$$+\left\langle \frac{1}{h}T_{13}(\boldsymbol{\varphi}),\psi_{22}\right\rangle_{\Gamma_{2I}} + \left\langle \frac{1}{h}M_{11}(\boldsymbol{\varphi}),\psi_{23}\right\rangle_{\Gamma_{2I}}.$$

Тут $\langle u,v\rangle_{\Gamma_I}$ − білінійна форма, яку формально можна записати у вигляді

$$\langle u,v\rangle_{\Gamma_{iI}} = \int\limits_{\Gamma_{iI}} uv\,d\Gamma_{iI} \quad \forall v\in H^{1/2}(\Gamma_{iI}), \quad \forall u\in \left(H^{1/2}(\Gamma_{iI})\right)^*.$$

Позначимо через $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ відповідні оператори-передумовлювачі алгоритму декомпозиції за підобластями [12], які у випадку послідовного алгоритму Діріхле − Неймана співпадають з відповідними операторами Стєклова − Пуанкаре:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2,$$

$$\{\mathbf{Q}_1\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\}_{\Gamma_I} = \{\mathbf{S}_1\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\}_{\Gamma_{1I}} + \{\mathbf{S}_1\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\}_{\Gamma_{2I}} + \{\mathbf{S}_1\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\}_{\Gamma_{3I}},$$

$$\{\mathbf{Q}_2\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\}_{\Gamma_I} = \{\mathbf{S}_2\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\}_{\Gamma_{1I}} + \{\mathbf{S}_2\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\}_{\Gamma_{2I}} + \{\mathbf{S}_2\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\}_{\Gamma_{3I}}.$$

Розглянемо властивості операторів Стєклова – Пуанкаре $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}_1$ та $\mathbf{S}_2$.

Зауважимо, що лінійність оператора $\mathbf{S}_2$ випливає з лінійності відповідного оператора в Ω_2^* та є очевидною (Ω_2^* – серединна лінія області Ω_2, тобто проекція області Ω_2 на криву $\xi_3 = 0$).

Доведемо тепер симетричність і додатну визначеність оператора $\mathbf{S}_2$. Виразивши φ_{ij} через відповідні переміщення на частинах спільної межі та врахувавши форму меж Γ_{1I}, Γ_{3I} і серединної лінії Ω_2^*, можемо записати

$$
\begin{aligned}
\{\mathbf{S}_2\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\}_{\Gamma_I} &= \left(A_1\left(\left(1+k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{33}^{+}-\left(1-k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{33}^{-}\right),w\right)_{\Omega_2^*}+\\
&+\left(A_1\left(\left(1+k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{13}^{+}+\left(1-k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{13}^{-}\right),v_1\right)_{\Omega_2^*}+\\
&+\left(A_1\frac{h}{2}\left(\left(1+k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{13}^{+}-\left(1-k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{13}^{-}\right),\gamma_1\right)_{\Omega_2^*}+\\
&+\left\langle\frac{1}{h}T_{11},v_1\right\rangle_{\Gamma_{2I}}+\left\langle\frac{1}{h}T_{13},w\right\rangle_{\Gamma_{2I}}+\left\langle\frac{1}{h}M_{11},\gamma_1\right\rangle_{\Gamma_{2I}}, \qquad (18)
\end{aligned}
$$

де $(u,v)_{\Omega_2^*} = \int\limits_{\xi_{1b}}^{\xi_{1e}} uv\,d\xi_1$, $u,v\in L_2(\Omega_2^*)$.

Підставимо замість виразів, що містять σ_{ij}^{+}, σ_{ij}^{-}, $i,j=1,3$, відповідні вирази зі співвідношень (8)–(10) і замінимо p_1, p_3, m_1 на ліві частини системи рівнянь (5)–(7) для оболонки, попередньо домноживши кожне з рівнянь (5)–(7) на A_1. Проінтегрувавши частинами, можемо звести симетричність і додатну визначеність локального оператора Стєклова – Пуанкаре $\mathbf{S}_2$ до симетричності та додатної визначеності оператора слабкого формулювання задачі на серединній лінії. Зауважимо, що симетричність і додатна визначеність оператора теорії оболонок (5)–(7) доведена в працях [2, 3, 7].

Таким чином, маємо

$$
\{\mathbf{S}_2\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\}_{\Gamma_I} \ge c^2\int\limits_{\xi_{1b}}^{\xi_{1e}}\left(\left(\frac{dv_1}{d\xi_1}\right)^2+\left(\frac{dw}{d\xi_1}\right)^2+\left(\frac{d\gamma_1}{d\xi_1}\right)^2+v_1^2+w^2+\gamma_1^2\right)d\xi_1,
$$

$$c \ne 0.$$

Звідси з урахуванням теореми про сліди [9] випливає, що

$$
\begin{aligned}
\{\mathbf{S}_2\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\}_{\Gamma_I} &\ge c_1^2\int\limits_{\xi_{1b}}^{\xi_{1e}}\left(\left(\frac{dw}{d\xi_1}\right)^2+\left(-\frac{dv_1}{d\xi_1}+\frac{h}{2}\frac{d\gamma_1}{d\xi_1}\right)^2+w^2+\right.\\
&\left.+\left(-v_1+\frac{h}{2}\gamma_1\right)^2\right)d\xi_1+c_2^2\,\|\boldsymbol{\varphi}_2\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_{2I})}+\\
&+c_3^2\int\limits_{\xi_{1b}}^{\xi_{1e}}\left(\left(\frac{dw}{d\xi_1}\right)^2+\left(\frac{dv_1}{d\xi_1}+\frac{h}{2}\frac{d\gamma_1}{d\xi_1}\right)^2+w^2+\left(v_1+\frac{h}{2}\gamma_1\right)^2\right)d\xi_1,
\end{aligned}
$$

$$c_i > 0, \qquad i = 1,2,3.$$

Отже, додатну визначеність оператора $\mathbf{S}_2$ в просторі Λ доведено.

Доведемо тепер неперервність оператора $\mathbf{S}_2$. Зауважимо, що неперервність оператора теорії оболонок (5)–(7) доведена у праці [8].

З урахуванням неперервності оператора теорії оболонок (5)–(7) маємо

$$\{\mathbf{S}_2\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\}_{\Gamma_I} \le C\left(\int\limits_{\xi_{1b}}^{\xi_{1e}}\left(\left(\frac{dv_1}{d\xi_1}\right)^2+\left(\frac{dw}{d\xi_1}\right)^2+\left(\frac{d\gamma_1}{d\xi_1}\right)^2+v_1^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,w^2+\gamma_1^2\right)d\xi_1\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\xi_{1b}}^{\xi_{1e}}\left(\left(\frac{d\tilde{v}_1}{d\xi_1}\right)^2+\left(\frac{d\tilde{w}}{d\xi_1}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{d\tilde{\gamma}_1}{d\xi_1}\right)^2+\tilde{v}_1^2+\tilde{w}^2+\tilde{\gamma}_1^2\right)d\xi_1\right)^{1/2}, \quad C>0.$$

Звідси випливає, що

$$\{\mathbf{S}_2\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\}_{\Gamma_{iI}} \le C_i\left(\int\limits_{\xi_{1b}}^{\xi_{1e}}\left(\left(\frac{dv_1}{d\xi_1}\right)^2+\left(\frac{dw}{d\xi_1}\right)^2+\left(\frac{d\gamma_1}{d\xi_1}\right)^2+v_1^2+w^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,\gamma_1^2\right)d\xi_1\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\xi_{1b}}^{\xi_{1e}}\left(\left(\frac{d\tilde{v}_1}{d\xi_1}\right)^2+\left(\frac{d\tilde{w}}{d\xi_1}\right)^2+\left(\frac{d\tilde{\gamma}_1}{d\xi_1}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,\tilde{v}_1^2+\tilde{w}^2+\tilde{\gamma}_1^2\right)d\xi_1\right)^{1/2}, \quad C_i>0, \quad i=1,2,3.$$

Тому одержимо

$$\{\mathbf{S}_2\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\}_{\Gamma_{1I}} \le C_1\left(\int\limits_{\xi_{1b}}^{\xi_{1e}}\left(\frac{dw}{d\xi_1}\right)^2+\left(\left(-\frac{dv_1}{d\xi_1}+\frac{h}{2}\frac{d\gamma_1}{d\xi_1}\right)^2+w^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(-v_1+\frac{h}{2}\gamma_1\right)^2\right)d\xi_1\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\xi_{1b}}^{\xi_{1e}}\left(\frac{d\tilde{w}}{d\xi_1}\right)^2+\left(\left(-\frac{d\tilde{v}_1}{d\xi_1}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{h}{2}\frac{d\tilde{\gamma}_1}{d\xi_1}\right)^2+\tilde{w}^2+\left(-\tilde{v}_1+\frac{h}{2}\tilde{\gamma}_1\right)^2\right)d\xi_1\right)^{1/2}, \quad C_1>0,$$

$$\{\mathbf{S}_2\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\}_{\Gamma_{3I}} \le C_3\left(\int\limits_{\xi_{1b}}^{\xi_{1e}}\left(\frac{dw}{d\xi_1}\right)^2+\left(\left(\frac{dv_1}{d\xi_1}+\frac{h}{2}\frac{d\gamma_1}{d\xi_1}\right)^2+w^2+\left(v_1+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{h}{2}\gamma_1\right)^2\right)d\xi_1\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\xi_{1b}}^{\xi_{1e}}\left(\frac{d\tilde{w}}{d\xi_1}\right)^2+\left(\left(\frac{d\tilde{v}_1}{d\xi_1}+\frac{h}{2}\frac{d\tilde{\gamma}_1}{d\xi_1}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,\tilde{w}^2+\left(\tilde{v}_1+\frac{h}{2}\tilde{\gamma}_1\right)^2\right)d\xi_1\right)^{1/2}, \quad C_3>0.$$

Отже, враховуючи теорему про оператор сліду для $H^{1/2}(\Gamma_{2I})$ [9], неперервність оператора $\mathbf{S}_2$ доведено.

Розглянемо тепер локальний оператор Стєклова – Пуанкаре $\mathbf{S}_1$, що відповідає системі (1):

$$\{\mathbf{S}_1\varphi,\varphi\}_{\Gamma_I} = \{\mathbf{S}_1\varphi,\varphi\}_{\Gamma_{1I}} + \{\mathbf{S}_1\varphi,\varphi\}_{\Gamma_{2I}} + \{\mathbf{S}_1\varphi,\varphi\}_{\Gamma_{3I}} =$$

$$= \left\langle -A_1\left(1-k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{\nu\nu}(\varphi), u_\nu \right\rangle_{\Gamma_{1I}} + \left\langle -A_1\left(1-k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{\nu\tau}(\varphi), u_\tau \right\rangle_{\Gamma_{1I}} +$$

$$+ \left\langle \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\nu\nu}(\varphi)\,d\xi_3, u_\nu \right\rangle_{\Gamma_{2I}} + \left\langle -\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\nu\tau}(\varphi)\,d\xi_3, u_\tau \right\rangle_{\Gamma_{2I}} +$$

$$+ \left\langle -A_1\left(1+k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{\nu\nu}(\varphi), u_\nu \right\rangle_{\Gamma_{3I}} + \left\langle -A_1\left(1+k_1\frac{h}{2}\right)\sigma_{\nu\tau}(\varphi), u_\tau \right\rangle_{\Gamma_{3I}}.$$

Ураховуючи лінійність, симетричність, додатну визначеність і неперервність оператора Стєклова – Пуанкаре для задачі класичної теорії пружності [9], вважаючи при цьому, що на Γ_{2I} задано напруження

$$\left(\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{nn}(\varphi)\,d\xi_3, -\frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{n\tau}(\varphi)\,d\xi_3\right),$$

отримаємо, що оператор $\mathbf{S}_1$ є лінійним, неперервним, симетричним і додатно визначеним для $\varphi_{ij} \in H^{1/2}(\Gamma_{iI})$ [9]. Скористаємося тепер компактним неперервним включенням $H^1(\Gamma_{iI}) \subset\subset H^{1/2}(\Gamma_{iI})$ [9]. Отримаємо, що оператор $\mathbf{S}_1$ є лінійним, неперервним, симетричним і додатним для $\varphi_{ij} \in H^1(\Gamma_{iI})$, і, як наслідок, лінійним, неперервним, симетричним і додатним у просторі Λ.

Очевидно, що оператор $\mathbf{S}$ буде лінійним, неперервним, симетричним і додатно визначеним у просторі Λ.

Згідно з теоремою Лакса – Мілграма, ці властивості забезпечують існування і єдиність розв'язку рівняння Стєклова – Пуанкаре.

З урахуванням уже доведених властивостей операторів $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ можна зробити висновок, що оператори $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ є лінійними, симетричними та неперервними. Крім того, оператори $\mathbf{Q}$ і $\mathbf{Q}_2$ є додатно визначеними, а оператор $\mathbf{Q}_1$ – додатним.

Наведемо теорему про збіжність методів декомпозиції області [12].

Теорема 1 (**про збіжність алгоритму декомпозиції області**) [**12**]. *Нехай оператори* $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}_1$ *і* $\mathbf{Q}_2$ *мають такі властивості*:

(***i***) *оператор* $\mathbf{Q}_2$ *є неперервним і додатно визначеним у деякому гільбертовому просторі* X;

(***ii***) *оператор* $\mathbf{Q}_1$ *є неперервним у* X;

(***iii***) *оператор* $\mathbf{Q}_2$ *є симетричним, а оператор* $\mathbf{Q}$ *є додатно визначеним у* X.

Тоді для будь-якого $\boldsymbol{\lambda}^0 \in X$ *ітераційний процес вигляду*

$$\boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \boldsymbol{\lambda}^k + \theta\mathbf{Q}_2^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda}^k) \qquad (19)$$

є збіжним у просторі X *до розв'язку рівняння*

$$\mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{G}$$

для будь-якого θ, *що задовольняє умову* $0 < \theta < \theta_{\max}$.

Зауважимо, що $\mathbf{G} \in X^*$ є заданим. У припущенні про відсутність масових і поверхневих сил, що діють на тіло, одержимо, що $\mathbf{G} = \mathbf{0}$. Використовуючи це припущення, ітераційний процес (19) у випадку послідовного алгоритму Діріхле − Неймана запишемо у формі

$$\boldsymbol{\lambda}^{k+1} = (1-\theta)\boldsymbol{\lambda}^{k} - \theta \mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{S}_1\boldsymbol{\lambda}^{k}, \qquad \mathbf{S}_i : \Lambda \to \Lambda^*, \qquad \boldsymbol{\lambda}^{k} \in \Lambda .$$

Тому за теоремою 1 про збіжність методів декомпозиції області запропонований у **п. 2** послідовний метод Діріхле − Неймана буде збіжним при деякому значенні параметра релаксації θ $(0 < \theta < \theta_{\max})$.

4. Числові експерименти. Розглянемо числовий приклад, що ілюструє застосування запропонованого алгоритму для наближеного визначення напружено-деформованого стану тіла з включенням.

Нехай область $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$ − прямокутник з вершинами у точках (x_{1b}, x_{2b}), (x_{1b}, x_{2e}), (x_{1e}, x_{2e}), (x_{1e}, x_{2b}), а область Ω_2 − прямокутник з вершинами у точках (x_{1m}, x_{2m_1}), (x_{1m}, x_{2m_2}), (x_{1e}, x_{2m_2}), (x_{1e}, x_{2m_1}), де $x_{1b} = 0.05$, $x_{1m} = 0.55$, $x_{1e} = 1.55$, $x_{2b} = 0.05$, $x_{2e} = 1.05$ (рис. 2). Тут усі розміри тіл віднесено до одиниць розмірності.

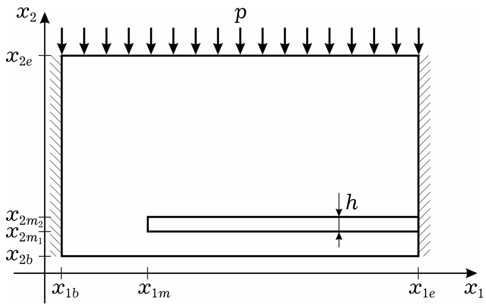

Рис. 2. Прямокутне тіло з тонким включенням (покриттям).

З метою порівняння результатів розглянемо декілька випадків.

1°. Область Ω_1 містить покриття Ω_2 товщини $h = 0.05$, прикріплене на краю $x_2 = x_{2b}$ уздовж усієї межі, тобто $x_{1m} = x_{1b}$, $x_{2m_1} = x_{2b}$, $x_{2m_2} = 0.05$.

2°. Область Ω_1 містить покриття Ω_2 товщини $h = 0.05$, прикріплене на частині краю $x_2 = x_{2b}$ (від x_{1m} до x_{1e}), тобто $x_{1m} \neq x_{1b}$, $x_{2m_1} = x_{2b}$, $x_{2m_2} = 0.05$.

3°. Область Ω_1 містить включення Ω_2 товщини $h = 0.05$ ($x_{1m} \neq x_{1b}$, $x_{2m_1} = 0.1$, $x_{2m_2} = 0.15$).

4°. Область Ω_1 без включення чи покриття, тобто $\Omega = \Omega_1$, $\Omega_2 = \varnothing$.

Уздовж прямих $x_1 = x_{1b}$ і $x_1 = x_{1e}$ конструкція є закріпленою, а вздовж прямої $x_2 = x_{2e}$ − навантаженою рівномірним нормальним зусиллям $p = -1$ МПа, нижня межа $x_2 = x_{2b}$ області Ω є вільною.

Модуль Юнґа матеріалу тіла Ω_1 дорівнює $E_1 = 3300$ МПа, що відповідає акрилу, матеріал включення Ω_2 − скловолокно з $E_2 = 80000$ МПа. Коефіцієнти Пуассона матеріалів тіла Ω_1 і включення (покриття) Ω_2 відповідно дорівнюють $\nu_1 = 0.37$ і $\nu_2 = 0.22$.

На рис. 3 наведено графіки переміщень u_2 на нижній межі $x_2 = x_{2b}$, а на рис. 4 − графіки напруження σ_{11} на нижній межі $x_2 = x_{2b}$. Криві *1*−*4* на цих рисунках відповідають результатам, отриманим для випадків ***1°*−*4°***.

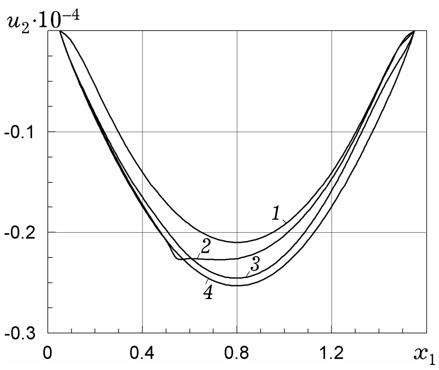

Рис. 3. Переміщення u_2 на нижній межі області Ω_1.

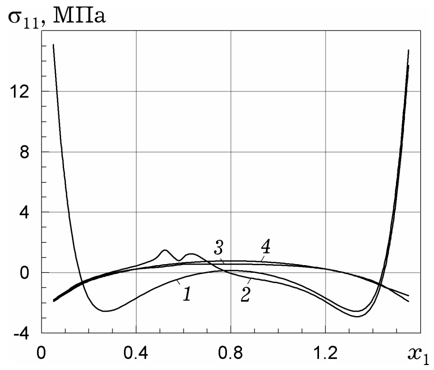

Рис. 4. Напруження σ_{11} на нижній межі області Ω.

Для наближеного розв'язання задачі для тіла з включенням (рис. 2) у включенні Ω_2 використано метод скінченних елементів з 16 елементами. За базисні функції вибрано функції «бульбашки» четвертого порядку.

Для основного тіла Ω_1 застосовано метод граничних елементів з 132 квадратичними елементами, згущеними в околі торця з абсцисою $x_1 = x_{1m}$. Обидві задачі поєднано за допомогою ітераційного методу декомпозиції області (послідовної схеми Діріхле – Неймана) [12]. Зауважимо, що сітка МГЕ для тіла Ω_1 є сумісною з сіткою МСЕ для включення Ω_2.

За критерій зупинки методу декомпозиції області вибрано

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{N}\sum_{j}\left|\lambda_{ij}^{k+1} - \lambda_{ij}^{k}\right|^2}}{\sqrt{\sum_{i=0}^{N}\sum_{j}\left|\lambda_{ij}^{k+1}\right|^2}} < \varepsilon ,$$

де λ_{ij}^{k} – значення j-ї компоненти переміщення у відповідному вузлі на k-й ітерації, $k = 0,1,\ldots$; N – загальна кількість вузлів на всіх спільних межах; $\varepsilon > 0$ – деяка задана точність. Для обчислень у розглянутому прикладі приймали $\varepsilon = 10^{-4}$. Збіжність методу декомпозиції області у випадку покриття досягалася за декілька десятків ітерацій, у випадку включення для досягнення збіжності необхідно було провести близько сотні ітерацій залежно від вибраної точності та параметра релаксації $\theta > 0$. При цьому з урахуванням лінійності задачі задачу в області Ω_1 наближено розв'язували тільки на першій ітерації, а на наступних ітераціях наближений розв'язок МГЕ будували як лінійну комбінацію уже відомих розв'язків. За початкове наближення вибирали розв'язок для однорідного тіла. Параметр релаксації θ вибирали з емпіричних міркувань. У випадку включення $\theta = 0.00283$, а у випадку покриття $\theta = 0.00375$.

З отриманих графіків можна зробити висновок, що наявність включення чи покриття суттєво впливає на переміщення u_2 і на напруження σ_{11} на нижній межі тіла Ω. Зокрема, у випадку включення ці переміщення і напруження є меншими порівняно з випадком однорідного тіла.

Достовірність отриманих результатів перевіряли шляхом проведення розрахунків на різних сітках, а також шляхом порівняння з результатами числових експериментів, одержаних за допомогою пакету COMSOL (www.comsol.com).

Висновки. Запропонований у статті підхід до числового аналізу задачі про знаходження напружено-деформованого стану пружного тіла з тонким включенням дозволяє розв'язувати незалежно задачі на основі різних математичних моделей: в матриці із застосуванням МГЕ, а у включенні – із застосуванням МСЕ. Використання декомпозиції області дозволяє зберігати структури матриць систем лінійних алгебраїчних рівнянь МГЕ та МСЕ. Моделювання включення за допомогою теорії оболонок Тимошенка враховує малу товщину включення, а також усуває проблеми, пов'язані з вибором сіток у числових методах, що застосовуються у масивній області та у тонкому включенні.

Теоретичне обґрунтування алгоритму, а також аналіз числових результатів, отриманих на його основі, дають підставу стверджувати, що запропонований підхід можна застосовувати до розв'язування інших різномасштабних крайових задач.

1. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – Москва: Наука, 1983. – 487 с.
2. *Винницька Л. І.* Математичне моделювання механіки деформування пружних тіл з тонкими м'якими включеннями: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02. – Львів, 2009. – 153 с.
3. *Винницька Л., Савула Я.* Напружено-деформований стан тіла з тонким включенням // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2008. – Вип. 7. – С. 21–29.
4. *Пелех Б. Л.* Обобщенная теория оболочек. – Львов: Вища шк., 1978. – 156 с.
5. *Савула Я. Г., Дыяк И. И., Дубовик А. В.* Применение комбинированной модели для расчета напряженно-деформированного состояния пространственных конструкций // Прикл. механика. – 1989. – **25**, № 9. – С. 62–67.

   Те саме: *Savula Ya. G., Dyyak I. I., Dubovik A. V.* Use of a combination model to calculate the stress-strain state of three-dimensional structures // Int. Appl. Mech. – 1989. – **25**, No. 9. – P. 904–909.
6. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-видавн. центр НТШ, 2007. – 716 с.
7. *Dyyak I. I., Savula Ya. H.* *D*-adaptive mathematical model of solid body with thin coating // Мат. студії. – 1997. – **7**, № 1. – С. 103–109.
8. *Dyyak I., Savula Ya., Styahar A.* Numerical investigation of a plain strain state for a body with thin cover using domain decomposition // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2012. – №. 3 (109). – С. 23–33.
9. *Hsiao G. C., Wendland W. L.* Boundary integral equations. – Berlin: Springer, 2008. – xx+618 p.
10. *Makar I., Savula Ya., Styahar A.* Numerical analysis of a multiscale model of the elastic body with the thin cover // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2012. – Вип. 15. – С. 49–55.
11. *Pasternak Ia., Sulym H.* Stress state of solids containing thin elastic crooked inclusions // J. Eng. Math. – 2013. – **78**, No. 1. – P. 167–180.
12. *Quarteroni A., Valli A.* Domain decomposition methods for partial differential equations. – Oxford: Oxford Univ. Press, 1999. – 360 p.
13. *Riederer K., Duenser C., Beer G.* Simulation of the linear inclusions with the BEM // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2009. – **33**, No. 7. – P. 959–965.
14. *Savula Ya. H., Dyyak I. I., Krevs V. V.* Heterogeneous mathematical models in numerical analysis of structures // Comput. Math. Appl. – 2001. – **42**, No. 8-9. – P. 1201–1216.
15. *Savula Ya., Mang H., Dyyak I., Pauk N.* Coupled boundary and finite element analysis of a special class of two-dimensional problems of the theory of elasticity // Comput. Struct. – 2000. – **75**, No. 2. – P. 157–165.
16. *Savula Ya., Styahar A.* Numerical simulation of the bodies with thin covers and inclusions using FEM/BEM coupling with domain decomposition algorithm // VIII Int. Conf. Porous Materials: Theory and Experiment (INTERPOR' 12, 18-22 Sept. 2012, Lviv–Briukhovychi, Ukraine). – Lviv, 2012. – P. 105–106.
17. *Štok B., Mole N.* Coupling FEM and BEM for computationally efficient solutions of multi-physics and multi-domain problems // Eng. Comput. – 2005. – **22**, No. 5/6. – P. 711–738.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛА С ТОНКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ

Рассмотрена математическая модель упругого тела с тонким включением или покрытием в виде тонкой упругой оболочки. Показано, что соответственный оператор Стеклова – Пуанкаре математической модели имеет свойства, обеспечивающие существование и единственность слабого решения краевой задачи. Предложен метод решения, базирующийся на алгоритме декомпозиции области с использованием методов граничных и конечных элементов. Доказана сходимость итерационного метода декомпозиции области и приведены результаты численных экспериментов.

NUMERICAL ANALYSIS OF THE STRESS-STRAIN STATE FOR THE BODY WITH THIN INCLUSION USING DOMAIN DECOMPOSITION METHOD

The mathematical model for the body with thin inclusion or cover is considered. The properties of the corresponding Steklov – Póincare operator of mathematical model, that guarantee both existence and uniqueness of the weak solution of the boundary value problem, are established. A method for the solution of the problem, based on the domain decomposition algorithm with the use of boundary element method and finite element method is proposed. The convergence of this iterative domain decomposition method is proved. The results of numerical experiments are given.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
11.09.13