УДК 517.983

Ю. С. Лінчук

УЗАГАЛЬНЕНИЙ ОПЕРАТОР ДАНКЛА – ОПДАМА ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ У ПРОСТОРАХ ФУНКЦІЙ, АНАЛІТИЧНИХ В ОБЛАСТЯХ

Означено узагальнений оператор Данкла – Опдама та вивчено деякі його властивості в просторі $\mathcal{H}(G)$ функцій, аналітичних у довільній області G. Досліджується також можливість продовження на простір $\mathcal{H}(G)$ діагонального оператора, побудованого за тейлорівськими коефіцієнтами узагальненої гіпергеометричної функції.

Нехай G − довільна область комплексної площини і $\mathcal{H}(G)$ − простір усіх аналітичних в G функцій, що наділений топологією компактної збіжності, а $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ − множина всіх лінійних неперервних операторів, що діють в $\mathcal{H}(G)$. Через $\mathcal{H}'(G)$ позначатимемо спряжений простір до $\mathcal{H}(G)$. У випадку, якщо область G є симетричною відносно початку координат і α − довільне комплексне число, то оператор Данкла Λ_α діє в просторі $\mathcal{H}(G)$ за правилом

$$(\Lambda_\alpha f)(z) = f'(z) + \alpha \frac{f(z) - f(-z)}{z}.$$

Цей оператор був означений у [8, 9] і відіграє важливу роль у різних задачах математики та фізики (див., наприклад, [11]). Оператор Данкла та деякі його модифікації у просторах аналітичних функцій вивчалися в працях [2−6, 12].

Нехай m − фіксоване натуральне число, $m \ge 2$, $\omega = \exp\frac{2\pi i}{m}$, G − довільна m-симетрична область комплексної площини (тобто $\omega G = G$), яка містить початок координат. Для довільних комплексних чисел α_j, $j = 0, \dots, m-1$, через Λ позначимо оператор, який лінійно та неперервно діє в просторі $\mathcal{H}(G)$ за правилом

$$(\Lambda f)(z) = f'(z) + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \frac{f(\omega^j z) - f(0)}{z} \tag{1}$$

при $z \ne 0$ і $(\Lambda f)(0) = f'(0)\left(1 + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \omega^j\right)$.

У випадку, коли $\alpha_j = \omega^j$, $j = 0, \dots, m-1$, оператор (1) вивчався у просторі цілих функцій $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ у [5]. У роботі [10] означено оператор Данкла − Опдама, який є узагальненням оператора Данкла і який в одновимірному випадку має вигляд

$$D = \frac{d}{dz} + \frac{1}{z} \sum_{t=1}^{m-1} k_t \sum_{j=0}^{m-1} \omega^{-jt} \tau^j ,$$

де $(\tau f)(z) = f(\omega z)$, а k_t, $t = 1, \dots, m-1$, − довільні комплексні числа. Оператор D можна записати у вигляді

$$D = \frac{d}{dz} + \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{m-1} c_j \tau^j ,$$

де $c_j = \sum_{t=1}^{m-1} k_t \omega^{-jt}$, $j = 0, \dots, m-1$. Оскільки $\sum_{j=0}^{m-1} c_j = 0$, то для довільної

ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2014. − 57, № 4. − С. 7-17.

функції $f \in \mathcal{H}(G)$ при $z \in G$ маємо, що

$$(Df)(z) = f'(z) + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{f(\omega^j z) - f(0)}{z}.$$

Тому оператор Данкла – Опдама D є частковим випадком операторів вигляду (1). Навпаки, легко перевірити, що при виконанні умови $\sum\limits_{j=0}^{m-1} \alpha_j = 0$ оператор (1) є оператором Данкла – Опдама. Таким чином, оператор вигляду (1) є оператором Данкла – Опдама тоді й тільки тоді, коли $\sum\limits_{j=0}^{m-1} \alpha_j = 0$.

У цій статті вивчаються деякі властивості узагальненого оператора Данкла – Опдама (1) у просторі $\mathcal{H}(G)$.

1. Дослідимо спочатку деякі властивості діагональних операторів, що побудовані за тейлорівськими коефіцієнтами узагальненої гіпергеометричної функції, у просторах функцій, аналітичних у довільних областях. Одержані результати будуть істотно використовуватися при вивченні властивостей узагальненого оператора Данкла – Опдама. У випадку $0 \in G$ формулою $(\Delta f)(z) = \dfrac{f(z) - f(0)}{z}$ при $z \neq 0$ і $(\Delta f)(0) = f'(0)$ означується оператор Помм'є Δ, який лінійно та неперервно діє в $\mathcal{H}(G)$. Для комплексного числа a і цілого невід'ємного числа n через $(a)_n$ позначимо символ Похгаммера: $(a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1)$, $n \geq 1$, $(a)_0 = 1$. Нагадаємо, що область комплексної площини називається зірковою відносно початку координат, якщо для довільної точки з цієї області відрізок, який з'єднує початок координат і цю точку, міститься в цій області.

Теорема 1. *Нехай G – довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини і $a \in \mathbb{C}$, причому $a \neq -n$, $n = 0,1,\ldots$. Тоді діагональний оператор P_a, який на степенях z визначається формулами $P_a z^n = \dfrac{(a)_n}{n!} z^n$, продовжується до ізоморфізму з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$.*

Д о в е д е н н я. Спочатку покажемо, що для довільного $a \in \mathbb{C}$ оператор P_a продовжується до лінійного неперервного оператора, що діє в $\mathcal{H}(G)$. Використовуючи формулу зв'язку між символом Похгаммера і ґамма-функцією Ейлера $(z)_n = \dfrac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{-n : n = 0,1,\ldots\}$, одержимо, що при $0 < \operatorname{Re} a < 1$ і $n = 0,1,\ldots$

$$\frac{(a)_n}{n!} z^n = \frac{(a)_n}{(1)_n} z^n = \frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(a)\Gamma(n+1)} z^n = \frac{B(n+a, 1-a)}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} z^n =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{-a} (zt)^n \, dt.$$

Тому при $0 < \operatorname{Re} a < 1$ продовження оператора P_a до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ здійснюється формулою

$$(P_a f)(z) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{-a} f(zt)\, dt. \tag{2}$$

Якщо ж $\operatorname{Re} a = 1$, то аналогічне продовження здійснюється формулою

$$(P_a f)(z) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(2-a)}\left(U_z \frac{d}{dz} + E\right)\left(\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{1-a} f(zt)\,dt\right), \tag{3}$$

де U_z − оператор множення на незалежну змінну, а E − одиничний оператор. Таким чином, формулами (2) і (3) оператор P_a продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ для $a \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} a \le 1$. Припустимо, що для деякого натурального k оператор P_a при $a \in \mathbb{C} : k-1 < \operatorname{Re} a \le k$ продовжується до лінійного неперервного оператора, який діє в $\mathcal{H}(G)$. Тоді формулою

$$P_a = \frac{1}{a-1}\left(U_z \frac{d}{dz} + (a-1)E\right)P_{a-1}$$

оператор P_a продовжується до лінійного неперервного оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ при $a \in \mathbb{C} : k < \operatorname{Re} a \le k+1$. Звідси випливає, що оператор P_a для довільного $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a > 0$, продовжується до лінійного неперервного оператора, що діє в $\mathcal{H}(G)$.

Припустимо, що оператор P_a продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ для довільного $a \in \mathbb{C}$, для якого $\operatorname{Re} a > -k$, де k − деяке фіксоване ціле невід'ємне число. Нехай тепер $a \in \mathbb{C}$, причому $\operatorname{Re} a > -k-1$. За припущенням індукції оператор P_{a+1} продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Нехай $\mathcal{J}$ − оператор інтегрування, який діє в $\mathcal{H}(G)$ за правилом $(\mathcal{J} f)(z) = \int_0^z f(t)\,dt$ і $\delta_0 \in \mathcal{H}'(G)$, причому $\delta_0(f) = f(0)$. Оскільки для довільного цілого невід'ємного n виконується рівність $P_a z^n = (a\mathcal{J} P_{a+1}\Delta + \delta_0)z^n$, то формулою

$$P_a = a\mathcal{J} P_{a+1}\Delta + \delta_0 \tag{4}$$

оператор P_a продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Тому за принципом математичної індукції для довільного числа $a \in \bigcup_{k=0}^{\infty}\{a \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} a > -k\} = \mathbb{C}$ оператор P_a продовжується до лінійного неперервного оператора, який діє в $\mathcal{H}(G)$.

Нехай тепер $a \in \mathbb{C} \setminus \{-n : n = 0,1,\ldots\}$. Покажемо, що тоді оператор P_a є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$. Розглянемо оператор $\tilde{P}_a$, який на степені z діє за правилом $\tilde{P}_a z^n = \frac{n!}{(a)_n} z^n$, $n = 0,1,\ldots$. Перевіримо спочатку, що оператор $\tilde{P}_a$ при $a \in \mathbb{C} \setminus \{-n : n = 0,1,\ldots\}$ продовжується до лінійного неперервного оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. При $a \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a > 0$, це продовження здійснюється формулою

$$(\tilde{P}_a f)(z) = \left(U_z \frac{d}{dz} + aE\right)\int_0^1 (1-t)^{a-1} f(tz)\,dt.$$

Далі, аналогічно, як і для оператора P_a, індукцією за k для $a \in \mathbb{C} \setminus \{-n : n = 0,1,\ldots\}$, $\operatorname{Re} a > -k$, неважко перевірити, що оператор $\tilde{P}_a$ продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. При цьому замість формули (4) потрібно використати співвідношення

$$\tilde{P}_a = \frac{1}{a}\left(U_z \frac{d}{dz} + aE\right)\tilde{P}_{a+1}.$$

Таким чином, оператор $\tilde{P}_a$ при $a \in \mathbb{C} \setminus \{-n : n = 0,1,\ldots\}$ дійсно продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Зрозуміло, що $(P_a\tilde{P}_a)z^n = (\tilde{P}_a P_a)z^n = z^n$ при $n = 0,1,\ldots$. Оскільки система $(z^n)_{n=0}^{\infty}$ є повною в $\mathcal{H}(G)$, то звідси випливає, що оператор P_a є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$, причому $P_a^{-1} = \tilde{P}_a$. Теорему доведено. ♦

Лема 1. *Нехай G − довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини, ℓ − фіксоване натуральне число, $a = (a_j)_{j=1}^{\ell}$, $b = (b_j)_{j=1}^{\ell} \in \mathbb{C}^{\ell}$, причому $a_j, b_j \neq -k$, $k = 0,1,\ldots$, при $j = 1,\ldots,\ell$. Тоді діагональний оператор $S_{a,b}$, який на степенях z визначається формулами*

$$S_{a,b}z^n = \frac{(a_1)_n(a_2)_n\ldots(a_\ell)_n}{(b_1)_n(b_2)_n\ldots(b_\ell)_n}z^n, \qquad n = 0,1,\ldots,$$

продовжується до ізоморфізму з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$.

Д о в е д е н н я. Перевіримо правильність твердження леми при $\ell = 1$. Маємо $S_{a,b} = S_{a_1,b_1} = P_{a_1}P_{b_1}^{-1}$. Отже, при $\ell = 1$ твердження леми 1 є правильним, оскільки у цьому випадку оператор $S_{a,b}$ подається у вигляді добутку ізоморфізмів простору $\mathcal{H}(G)$. Далі правильність твердження леми доводиться індукцією за ℓ. ♦

Нехай G − зіркова відносно початку координат m-симетрична область комплексної площини. Через $\mathcal{H}_k(G)$, $k = 0,\ldots,m-1$, позначимо замкнуті підпростори простору $\mathcal{H}(G)$, які визначаються таким чином:

$$\mathcal{H}_k(G) = \{f \in \mathcal{H}(G) : f(\omega z) = \omega^k f(z)\ \forall z \in G,\ k = 0,\ldots,m-1\}.$$

Тоді простір $\mathcal{H}(G)$ є прямою сумою підпросторів $\mathcal{H}_k(G)$, $k = 0,\ldots,m-1$:

$$\mathcal{H}(G) = \mathcal{H}_0(G) \oplus \mathcal{H}_1(G) \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_{m-1}(G).$$

Доведення цього твердження наведено в [7], де встановлено, що довільна функція $f \in \mathcal{H}(G)$ єдиним чином зображається у вигляді $f(z) = \sum_{j=0}^{m-1} f_j(z)$, де $f_j \in \mathcal{H}_j(G)$, $j = 0,\ldots,m-1$, при цьому

$$f_j(z) = (P_j f)(z) = \frac{1}{m}\sum_{\ell=0}^{m-1}\omega^{-j\ell}f(\omega^\ell z).$$

Оператори P_j є проекторами в просторі $\mathcal{H}(G)$, причому $\mathcal{H}_j(G) = P_j(\mathcal{H}(G))$, $j = 0,\ldots,m-1$. Таким чином, довільну функцію $f \in \mathcal{H}(G)$ можна зобразити у вигляді

$$f(z) = \sum_{j=0}^{m-1}(P_j f)(z). \tag{5}$$

Через G^m позначимо множину $\{z^m : z \in G\}$. Зрозуміло, що G^m є зірковою відносно точки $z = 0$ областю комплексної площини, оскільки такою є область G. У роботі [1] встановлено, що кожен з підпросторів $\mathcal{H}_j(G)$,

$j = 0,\dots,m-1$, є ізоморфним до простору $\mathcal{H}(G^m)$, причому ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G^m)$ на простір $\mathcal{H}_j(G)$ є оператор U_j, який діє за правилом $(U_j g)(z) = z^j g(z^m)$, $j = 0,\dots,m-1$. Із цих тверджень випливає правильність твердження наступної леми.

Лема 2. *Нехай G − довільна зіркова відносно початку координат та m-симетрична область комплексної площини. Тоді довільну функцію $f \in \mathcal{H}(G)$ можна єдиним способом зобразити у вигляді*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{m-1} z^j f_j(z^m), \qquad z \in G, \tag{6}$$

де $f_j \in \mathcal{H}(G^m)$, $j = 0,\dots,m-1$.

Теорема 2. *Нехай G − довільна зіркова відносно початку координат та m-симетрична область комплексної площини, а $c^{(r)}$, $a_j^{(r)}$, $b_j^{(r)}$, $r = 0,\dots,m-1$, $j = 1,\dots,m$, − довільні комплексні числа, для яких виконуються умови $c^{(r)} \ne 0$, $a_j^{(r)} \ne -n$, $b_j^{(r)} \ne -n$, $n = 0,1,\dots$. Тоді діагональний оператор T, який на степенях z визначається рівностями*

$$Tz^{mn+r} = c^{(r)} \frac{(a_1^{(r)})_n (a_2^{(r)})_n \dots (a_m^{(r)})_n}{(b_1^{(r)})_n (b_2^{(r)})_n \dots (b_m^{(r)})_n} z^{mn+r},$$

$$r = 0,\dots,m-1, \qquad n = 0,1,\dots, \tag{7}$$

продовжується до ізоморфізму простору $\mathcal{H}(G)$.

Д о в е д е н н я. Позначимо

$$\gamma_{mn+r} = c^{(r)} \frac{(a_1^{(r)})_n (a_2^{(r)})_n \dots (a_m^{(r)})_n}{(b_1^{(r)})_n (b_2^{(r)})_n \dots (b_m^{(r)})_n}, \quad r = 0,\dots,m-1, \quad n = 0,1,\dots. \tag{8}$$

Доведемо спочатку, що оператор T продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Для кожного $r = 0,\dots,m-1$ через T_r позначимо діагональний оператор, який на степенях z діє за правилом $T_r(z^n) = \gamma_{mn+r} z^n$, $n = 0,1,\dots$. Із формул (8) і леми 1 випливає, що кожен з операторів T_r, $r = 0,\dots,m-1$, є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G^m)$. Виберемо довільну функцію $f \in \mathcal{H}(G)$ і подамо її у вигляді (6), де $f_j \in \mathcal{H}(G^m)$, $j = 0,\dots,m-1$. Розглянемо оператор $\tilde{T}$, який визначається формулою

$$(\tilde{T} f)(z) = \sum_{j=0}^{m-1} z^j (T_j f_j)(z^m), \qquad z \in G.$$

Оскільки $T_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G^m))$, $j = 0,\dots,m-1$, то оператор $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. При $r = 0,\dots,m-1$ і $n = 0,1,\dots$ виконується рівність $\tilde{T} z^{mn+r} = \gamma_{mn+r} z^{mn+r}$. Тому оператор $\tilde{T}$ є продовженням оператора T до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Оскільки послідовність $\left(\frac{1}{\gamma_n}\right)_{n=0}^{\infty}$ має таку ж саму структуру, як і послідовність $(\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$, то оператор T', який на степенях z визначається формулою $T' z^n = \frac{1}{\gamma_n} z^n$, $n = 0,1,\dots$, також продовжується до оператора з класу

$\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Оскільки $(TT')(z^n) = (T'T)(z^n) = z^n$, $n = 0, 1, \ldots$, то оператор T' є оберненим до оператора T, і тому T є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$. ♦

Оператори T, досліджені в теоремі 2, при певних обмеженнях на параметри можна зобразити у вигляді добутку інтегральних операторів.

Теорема 3. *Нехай G − довільна зіркова відносно початку координат та m-симетрична область комплексної площини, а a_r, b_r, c_r − деякі комплексні числа, причому* $\operatorname{Re}\left(a_r - \dfrac{r}{m}\right) > 0$, $\operatorname{Re}(b_r - a_r) > 0$, $r = 0, \ldots, m-1$. *Тоді оператор A, визначений на степенях z рівностями*

$$A(z^{mn+r}) = c_r \frac{(a_r)_n}{(b_r)_n} z^{mn+r}, \qquad r = 0, \ldots, m-1, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{9}$$

формулою

$$(Af)(z) = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{\ell=0}^{m-1} \omega^{-r\ell} c_r d_r \int_0^1 \tau^{ma_r - r - 1} (1 - \tau^m)^{b_r - a_r - 1} f(\omega^\ell z\tau)\, d\tau, \tag{10}$$

де $d_r = B^{-1}(a_r, b_r - a_r)$, продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Тут $B(\cdot,\cdot)$ − значення бета-функції Ейлера у відповідних точках.

Д о в е д е н н я. Використовуючи формулу зв'язку між символом Похгаммера і гамма-функцією Ейлера $(z)_n = \dfrac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{-n : n = 0, 1, \ldots\}$, перетворимо праву частину (9):

$$A(z^{mn+r}) = c_r \frac{\Gamma(a_r + n)\Gamma(b_r)}{\Gamma(a_r)\Gamma(b_r + n)} z^{mn+r} =$$

$$= c_r B^{-1}(a_r, b_r - a_r) B(a_r + n, b_r - a_r) z^{mn+r} =$$

$$= c_r B^{-1}(a_r, b_r - a_r) z^{mn+r} \int_0^1 t^{a_r + n - 1} (1 - t)^{b_r - a_r - 1}\, dt =$$

$$= m c_r B^{-1}(a_r, b_r - a_r) \int_0^1 (z\tau)^{mn+r} \tau^{ma_r - r - 1} (1 - \tau^m)^{b_r - a_r - 1}\, d\tau.$$

Таким чином,

$$A(z^{mn+r}) = m c_r B^{-1}(a_r, b_r - a_r) \int_0^1 (z\tau)^{mn+r} \tau^{ma_r - r - 1} (1 - \tau^m)^{b_r - a_r - 1}\, d\tau,$$

$$r = 0, \ldots, m-1, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Для кожного $r = 0, \ldots, m-1$ через A_r позначимо оператор з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, який діє за правилом

$$(A_r f)(z) = m c_r B^{-1}(a_r, b_r - a_r) \int_0^1 (P_r f)(z\tau) \tau^{ma_r - r - 1} (1 - \tau^m)^{b_r - a_r - 1}\, d\tau.$$

Для довільного фіксованого r і довільного $n = 0, 1, \ldots$ виконується рівність $A_r(z^{mn+r}) = A(z^{mn+r})$. Тому формулою

$$(Af)(z) = m c_r B^{-1}(a_r, b_r - a_r) \int_0^1 (P_r f)(z\tau) \tau^{ma_r - r - 1} (1 - \tau^m)^{b_r - a_r - 1}\, d\tau$$

оператор A продовжується до оператора на підпросторі $\mathcal{H}_r(G)$, $r = 0,\dots,m-1$.

Таким чином, для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$ при $z \in G$ виконується рівність

$$(AP_r f)(z) = mc_r B^{-1}(a_r, b_r - a_r)\int_0^1 (P_r f)(z\tau)\tau^{ma_r - r - 1}(1-\tau^m)^{b_r - a_r - 1}\,d\tau\,. \quad (11)$$

Використовуючи подання (5) і рівність (11), одержимо, що формулою

$$(Af)(z) = \sum_{r=0}^{m-1} mc_r B^{-1}(a_r, b_r - a_r)\int_0^1 (P_r f)(z\tau)\tau^{ma_r - r - 1}(1-\tau^m)^{b_r - a_r - 1}\,d\tau$$

оператор A продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Використовуючи рівність $(P_r f)(z) = \dfrac{1}{m}\sum_{\ell=0}^{m-1}\omega^{-r\ell} f(\omega^\ell z)$, одержимо, що оператор A зображається у вигляді (10). Теорему доведено. ♦

Зауваження 1. З теореми 2 випливає, що при виконанні умов теореми 3 і додаткової умови $c_r \neq 0$, $r = 0,\dots,m-1$, оператор A, який визначається формулою (10), є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$.

Зауваження 2. Оскільки область G є однозв'язною, то система $\{z^n : n = 0,1,\dots\}$ є повною в $\mathcal{H}(G)$. Тому продовження оператора A, яке здійснюється в теоремі 3, можливе лише єдиним способом.

Наслідок 1. *Нехай G − довільна зіркова відносно початку координат та m-симетрична область комплексної площини, а $c^{(r)}$, $a_j^{(r)}$, $b_j^{(r)}$, $r = 0,\dots,m-1$, $j = 1,\dots,m$, − довільні комплексні числа, для яких виконуються умови* $\mathrm{Re}\left(a_j^{(r)} - \dfrac{r}{m}\right) > 0$, $\mathrm{Re}\left(b_j^{(r)} - a_j^{(r)}\right) > 0$, $r = 0,\dots,m-1$, $j = 1,\dots,m$. *Тоді діагональний оператор T, який на степенях z визначається рівностями* (7), *формулою $A = A_1 A_2 \dots A_m$ продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$.*

Тут A_j, $j = 1,\dots,m$, − оператори з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, які визначаються рівностями

$$(A_j f)(z) = \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{\ell=0}^{m-1}\omega^{-r\ell} c_{r,j} d_{r,j}\int_0^1 \tau^{ma_j^{(r)} - r - 1}(1-\tau^m)^{b_j^{(r)} - a_j^{(r)} - 1} f(\omega^\ell z\tau)\,d\tau\,, \quad (12)$$

де $d_{r,j} = B^{-1}\left(a_j^{(r)}, b_j^{(r)} - a_j^{(r)}\right)$, $j = 1,\dots,m$, $c_{r,1} = c^{(r)}$, $c_{r,j} = 1$, $j = 2,\dots,m$, $r = 0,\dots,m-1$.

2. Нехай m − фіксоване натуральне число, $m \geq 2$, $\omega = \exp\dfrac{2\pi i}{m}$, G − довільна m-симетрична область комплексної площини і α_j, $j = 0,\dots,m-1$, − довільні комплексні числа. Вивчимо умови, при яких узагальнений оператор Данкла − Опдама (1) у просторі $\mathcal{H}(G)$ є еквівалентним до оператора диференціювання.

Оператор Λ є оператором зваженого зворотного зсуву, причому

$$\Lambda z^n = \lambda_n z^{n-1}\,,$$

де $\lambda_n = n + \sum_{j=0}^{m-1}\alpha_j \omega^{jn}$, $n = 1,2,\dots$, і $\Lambda 1 = 0$.

Теорема 4. *Нехай G − довільна зіркова відносно початку координат та m-симетрична область комплексної площини. Для того щоб оператор Λ був еквівалентним до оператора $\frac{d}{dz}$ у просторі $\mathcal{H}(G)$, необхідно та достатньо, щоб*

$$\lambda_n \neq 0, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{13}$$

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай оператор Λ є еквівалентним до оператора $\frac{d}{dz}$ у просторі $\mathcal{H}(G)$. Припустимо, що умова (13) не виконується. Тоді існує натуральне $n \geq 1$, для якого $\lambda_n = 0$, і для цього n маємо, що $\Lambda z^n = 0$. Крім того, $\Lambda 1 = 0$. Тому $\dim \mathrm{Ker}(\Lambda) \geq 2$. Оскільки $\dim \mathrm{Ker}\left(\frac{d}{dz}\right) = 1$, то оператор Λ не є еквівалентним до оператора $\frac{d}{dz}$ у просторі $\mathcal{H}(G)$. Одержали суперечність.

Достатність. Розглянемо діагональний оператор T, який на степенях z визначається рівностями

$$T(z^n) = \gamma_n z^n,$$

де $\gamma_0 = 1$ і $\gamma_n = \dfrac{n!}{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n}$, $n \geq 1$.

Покажемо, що оператор T продовжується до ізоморфізму простору $\mathcal{H}(G)$. Для довільних $r = 0, \ldots, m-1$ і $n = 0, 1, \ldots$ маємо

$$\gamma_{mn+r} = \frac{(mn+r)!}{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r \prod\limits_{s=0}^{m-1} \prod\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_{mk+s+r+1}}$$

(вважаємо, що $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r = 1$ при $r = 0$ і $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_{mk+s+r+1} = 1$ при $n = 0$). Для довільного цілого невід'ємного p позначимо $q(p) = \dfrac{1}{m} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \alpha_j \omega^{jp}$. Зрозуміло, що $q(p+m) = q(p)$ для довільного $p = 0, 1, \ldots$. Перетворимо формулу для γ_{mn+r}. Оскільки для довільних $r, s = 0, \ldots, m-1$ та $n = 0, 1, \ldots$ є правильними рівності

$$\prod_{k=0}^{n-1} \lambda_{mk+s+r+1} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(mk + s + r + 1 + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \omega^{j(s+r+1)} \right) =$$

$$= m^n \prod_{k=0}^{n-1} \left(k + \frac{s+r+1}{m} + q(s+r+1) \right) =$$

$$= m^n \left(\frac{s+r+1}{m} + q(s+r+1) \right)_n,$$

$$(mn+r)! = r!\, m^{mn} \left(\frac{r+1}{m} \right)_n \left(\frac{r+2}{m} \right)_n \ldots \left(\frac{r+m}{m} \right)_n,$$

то

$$\gamma_{mn+r} = \frac{r!}{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r} \times$$

$$\times \frac{\left(\frac{r+1}{m}\right)_n \left(\frac{r+2}{m}\right)_n \cdots \left(\frac{r+m}{m}\right)_n}{\left(\frac{r+1}{m}+q(r+1)\right)_n \left(\frac{r+2}{m}+q(r+2)\right)_n \cdots \left(\frac{r+m}{m}+q(r+m)\right)_n}.$$

Позначимо $c^{(r)} = \frac{r!}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r}$, $a_j^{(r)} = \frac{r+j}{m}$, $b_j^{(r)} = \frac{r+j}{m} + q(r+j)$, $r = 0,\ldots,m-1$, $j = 1,\ldots,m$. Тоді значення Tz^{mn+r} оператора T на степенях z зображаються формулою (7). Оскільки виконується умова (13), то за теоремою 2 оператор T є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$. Для довільного цілого невід'ємного n виконується рівність $\left(T\frac{d}{dz}\right)(z^n) = (\Lambda T)(z^n)$. Оскільки $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і область G є однозв'язною, то з використанням теореми Рунґе одержуємо, що $T\frac{d}{dz} = \Lambda T$. Але T є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$. Тому оператор Λ є еквівалентним до оператора $\frac{d}{dz}$ у просторі $\mathcal{H}(G)$. ♦

За допомогою теореми 4 можна одержати опис комутанта оператора Λ, а також встановити його гіперциклічність і хаотичність [6] у просторі $\mathcal{H}(G)$, подібно до того, як це зроблено в [2] для оператора Данкла.

При певних обмеженнях на параметри узагальненого оператора Данкла – Опдама Λ оператор перетворення T можна зобразити у вигляді добутку інтегральних операторів. Нехай виконується умова (13) і T – діагональний оператор, побудований при доведенні достатності умов теореми 4. Через T_j, $j = 1,\ldots,m$, позначимо діагональний оператор, який діє за правилом

$$T_j(z^{mn+r}) = c_{j,r}\frac{(a_j^{(r)})_n}{(b_j^{(r)})_n} z^{mn+r}, \quad r = 0,\ldots,m-1, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{14}$$

де $c_{1,r} = \frac{r!}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r}$ і $c_{j,r} = 1$ при $j = 2,\ldots,m$, $r = 0,\ldots,m-1$. При $r = 0,\ldots,$ $\ldots,m-1$ маємо, що $\mathrm{Re}\left(a_j^{(r)} - \frac{r}{m}\right) = \frac{j}{m} > 0$ і $b_j^{(r)} - a_j^{(r)} = q(r+j)$. Оскільки функція $q(s)$ є періодичною з періодом m, то умова $\mathrm{Re}\left(b_j^{(r)} - a_j^{(r)}\right) > 0$, $r = 0,\ldots,m-1$, рівносильна умові $\mathrm{Re}\,(q(s)) > 0$ при $s = 0,\ldots,m-1$, тобто умові

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k\omega^{ks}\right) > 0, \qquad s = 0,\ldots,m-1. \tag{15}$$

За теоремою 3 при виконанні умови (15) оператори T_j при $j = 1,\ldots,m$ зображаються у вигляді

$$(T_jf)(z) = \sum_{r=0}^{m-1}\sum_{\ell=0}^{m-1}\omega^{-r\ell}t_{j,r}\int_0^1 \tau^{j-1}(1-\tau^m)^{q(r+j)-1}f(\omega^\ell z\tau)\,d\tau, \tag{16}$$

де $t_{1,r} = \frac{r!}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r}B^{-1}\left(\frac{r+1}{m}, q(r+1)\right)$ і $t_{j,r} = B^{-1}\left(\frac{r+j}{m}, q(r+j)\right)$ при $j =$ $= 2,\ldots,m$, а $q(r+j) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k\omega^{k(r+j)}$, $r = 0,\ldots,m-1$, $j = 1,\ldots,m$. Зазначимо, що умова (15) не залежить від індексу оператора T_j, а також, що з умови (15) випливає умова (13). Тому є правильною така

Теорема 5. *Нехай G – довільна зіркова відносно початку координат та m-симетрична область комплексної площини, а комплексні числа α_j, $j=0,\ldots,m-1$, задовольняють умову* (15). *Тоді оператор $T=T_1T_2\ldots T_m$, де T_j, $j=1,\ldots,m$, визначаються рівностями* (16), *є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$ і для нього виконується рівність $T\dfrac{d}{dz}=\Lambda T$.*

Зауваження 3. Оператори T_i та T_j при $i,j=1,\ldots,m$ є переставними між собою, оскільки кожен з них є діагональним і вони належать до класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$.

Зауваження 4. Вибір множників T_j у зображенні оператора T рівністю $T=T_1T_2\ldots T_m$ можна здійснити різними способами. Загальний спосіб такого зображення є таким. Нехай для кожного фіксованого числа $r=0,\ldots,m-1$ множина $\{i_j^{(r)}:j=1,\ldots,m\}$ є деякою перестановкою чисел $j=1,\ldots,m$. Тоді оператори $\tilde{T}_j$, $j=1,\ldots,m$, можна означити формулою

$$\tilde{T}_j(z^{mn+r})=c_{j,r}\frac{\left(a^{(r)}_{i_j^{(r)}}\right)_n}{\left(b_j^{(r)}\right)_n}z^{mn+r},\quad r=0,\ldots,m-1,\quad n=0,1,\ldots. \tag{17}$$

При виконанні умов $\operatorname{Re}\left(a^{(r)}_{i_j^{(r)}}-\dfrac{r}{m}\right)>0$ та $\operatorname{Re}\left(b_j^{(r)}-a^{(r)}_{i_j^{(r)}}\right)>0$, $r=0,\ldots,m-1$, $j=1,\ldots,m$, згідно з теоремою 3 кожен з операторів $\tilde{T}_j$ зображається в інтегральній формі формулою вигляду (10). Тоді одержуємо, що $T=\tilde{T}_1\tilde{T}_2\ldots\tilde{T}_m$.

1. *Березовская Г. М., Березовский Н. И.* Описание изоморфизмов пространства голоморфных функций, перестановочных с кратным умножением // Укр. мат. журн. – 1984. – **36,** № 5. – С. 611–615.
   Те саме: *Berezovskaya G. M., Berezovskii N. I.* Description of the isomorphisms of spaces of holomorphic functions that commute with powers of a multiplication operator // Ukr. Math. J. – 1984. – **36,** No. 5. – P. 456–459.
2. *Братищев А. В.* Хаотичность коммутирующих с дифференцированием Данкла преобразований пространства аналитических функций // Вестн. Донск. гос. техн. ун-та. – 2009. – **9,** № 2. – С. 196–207.
3. *Забирова К. Р., Напалков В. В.* Операторы свертки Данкла и их свойства // Докл. РАН. – 2013. – **449,** № 6. – С. 632–634.
   Те саме: *K. R. Zabirova, V. V. Napalkov* Dunkl convolution operators and their properties // Doklady Math. – 2013. – **87,** No. 2. – P. 218–219.
4. *Ким В. Э., Напалков В. В.* Обобщение оператора Данкла на пространстве целых функций // Докл. РАН. – 2008. – **420,** № 2. – С. 166–167.
   Те саме: *Kim V. É., Napalkov V. V.* Generalization of the Dunkl operator on the space of entire functions // Doklady Math. – 2008. – **77,** No. 3. – P. 365–367.
5. *Напалков В. В., Напалков В. В.* (*мл.*) Операторы Данкла как операторы свёртки // Докл. РАН. – 2008. – **423,** № 3. – С. 300–302.
   Те саме: *Napalkov V. V., Napalkov V. V.* (*Jr.*) Dunkl operators as convolutions // Doklady Math. – 2008. – **78,** No. 3. – P. 856–858.
6. *Betancor J. J., Sifi M., Trimèche K.* Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with the Dunkl operator on $\mathbb{C}$ // Acta Math. Hungar. – 2005. – **106,** No. 1–2. – P. 101–116.
7. *Dimovski I. H.* Convolutional calculus. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1990. – 208 p.

8. *Dunkl C. F.* Differential-difference operators associated to reflection groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – **311**. – P. 167–183.
9. *Dunkl C. F.* Integral kernels with reflection group invariance // Canad. J. Math. – 1991. – **43**. – P. 1213–1227.
10. *Dunkl C. F., Opdam E. M.* Dunkl operators for complex reflection groups // Proc. London Math. Soc. – 2003. – **86,** No. 1. – P. 70–108.
11. *Rösler M.* Dunkl operators: theory and applications // Lect. Notes Math. Orthogonal Polynomials and Special Functions. – 2003. – **1817**. – P. 93–135.
12. *Salem N. B., Kallel S.* Integro-differential-difference equations associated with the Dunkl operator and entire functions // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 2004. – **45,** No. 4. – P. 699–725.

ОБОБЩЁННЫЙ ОПЕРАТОР ДАНКЛА – ОПДАМА И ЕГО СВОЙСТВА В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ОБЛАСТЯХ

Определён обобщенный оператор Данкла – Опдама и изучены некоторые его свойства в пространстве $\mathcal{H}(G)$ функций, аналитических в произвольной области G. Исследуется также возможность продолжения на пространство $\mathcal{H}(G)$ диагонального оператора, построенного по тейлоровским коэффициентам обобщенной гипергеометрической функции.

GENERALIZED DUNKL – OPDAM OPERATOR AND ITS PROPERTIES IN THE SPACES OF ANALYTIC FUNCTIONS IN DOMAINS

The generalized Dunkl – Opdam operator is defined and some of its properties in the space $\mathcal{H}(G)$ of all analytic functions in G are studied. The possibility of an extension of a diagonal operator, constructed by Taylor coefficients of a generalized hypergeometric function on the space $\mathcal{H}(G)$, is also investigated.

Чернів. нац. ун-т
імені Юрія Федьковича, Чернівці

Одержано
13.02.14