

МОДЕЛЮВАННЯ І ВИЗНАЧЕННЯ НЕУСТАЛЕНОГО ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ДВОШАРОВОЇ ТЕРМОЧУТЛИВОЇ ПЛАСТИНИ

На основі моделі термочутливого тіла визначено розподіл неусталеного температурного поля та зумовленого ним термопружного стану в двошаровій пластині. Розв'язок нелінійної нестационарної задачі теплопровідності побудовано з використанням перетворення Кірхгофа, методу лінеаризувального параметра та інтегрального перетворення Лапласа за часом. Проведено числові дослідження впливу температурної залежності теплофізичних і механічних характеристик матеріалів шарів на величину і характер розподілу температури та зумовлених нею напружень в пластині.

Визначення і дослідження термопружної поведінки сучасних шаруватих елементів конструкцій, що експлуатуються в умовах високотемпературного нагрівання, на основі узагальненої математичної моделі, яка враховує температурну залежність термомеханічних характеристик матеріалу, має важливе теоретичне і практичне значення. Математична модель, що описує розподіл неусталеного температурного поля в шаруватих тілах із урахуванням залежності від температури коефіцієнта теплопровідності та об'ємної теплоємності, є нелінійною. У зв'язку з математичними труднощами аналітичні розв'язки нелінійних нестационарних крайових задач теплопровідності побудовані лише для окремих часткових випадків. Для отримання їх розв'язків часто використовують ітераційні, числові чи інші наближені методи [2, 4–7].

У цій роботі на основі нелінійної моделі теплового стану запропоновано методику визначення розподілу неусталеного температурного поля в двошаровій термочутливій пластині. Суть методики, у припущенні, що коефіцієнти температуропровідності є сталими, полягає в поетапній лінеаризації вихідної задачі за допомогою введення інтегральних змінних Кірхгофа та лінеаризувального параметра. Розв'язок лінеаризованої задачі побудовано з використанням інтегрального перетворення Лапласа за часом. Отримавши аналітичні вирази для обчислення змінних Кірхгофа (як функцій координати, часу та лінеаризувального параметра), знаходимо розподіл температурного поля в пластині за заданою температурною залежністю коефіцієнтів теплопровідності матеріалів шарів. При цьому значення лінеаризувального параметра для кожного моменту часу уточнюємо з умови рівності температур на межі контакту шарів. Розглядаємо випадок задання на обмежуючих поверхнях пластины сталих температур.

Отже, розглянемо задачу про визначення неусталеного термопружного стану вільної від зовнішніх навантажень двошарової нескінченної пластины товщини b

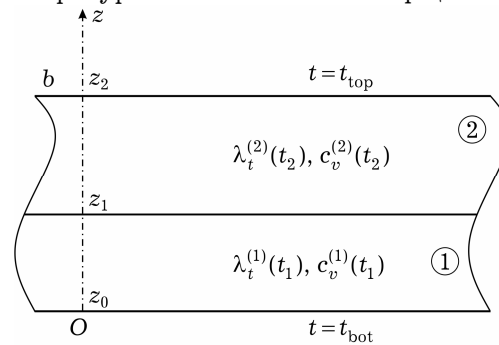


Рис. 1

(див. рис. 1), яка має початкову температуру t_p . Обмежуючі поверхні пластины $z = z_0 = 0$ та $z = z_2 = b$ підтримуються при сталих температурах t_{bot} і t_{top} відповідно. Вважаємо, що коефіцієнти теплопровідності $\lambda_t^{(i)}$, об'ємні теплоємності $c_v^{(i)}$, модулі пружності E_i , коефіцієнти лінійного теплового

розширення $\alpha_t^{(i)}$ та коефіцієнти Пуассона ν_i , $i = 1, 2$, матеріалів шарів залежать від температури t_i . На межі контакту шарів $z = z_1$ виконуються умови рівності температур і теплових потоків. За таких умов задача розпадається на дві незалежні: перша задача – про визначення температурного поля, а друга – про визначення спричиненого цим полем напруженого стану.

Розподіл нестационарного температурного поля у такій пластині описується нелінійною математичною моделлю:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial z} \right) = c_v^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial \tau}, \quad \begin{array}{ll} 0 < z < z_1, & i = 1, \\ z_1 < z < z_2 = b, & i = 2, \end{array} \quad (1)$$

$$t_1|_{z=0} = t_{\text{bot}}, \quad t_2|_{z=b} = t_{\text{top}}, \quad (2)$$

$$t_1|_{z=z_1} = t_2|_{z=z_1}, \quad \lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = \lambda_t^{(2)}(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial z} \Big|_{z=z_1}, \quad (3)$$

$$t_i|_{\tau=0} = t_p, \quad (4)$$

де z – координата в напрямі товщини пластини, τ – час.

Подамо $\lambda_t^{(i)}(t_i)$ і $c_v^{(i)}(t_i)$ у вигляді $\chi^{(i)}(t_i) = \chi_0^{(i)} \chi_i^*(\bar{T}_i)$, де $\bar{T}_i = T_i - T_p$ – приріст безрозмірної температури, $\{T_i, T_p\} = \{t_i, t_p\}/t_0$ – безрозмірні температури, t_0 – вибрана опорна температура (причому $\chi_i^*(T_p) = 1$). Введемо безрозмірні координату $\bar{z} = z/b$ та час $\text{Fo} = a_0^{(1)} \tau / b^2$. У введених безрозмірних величинах задача (1)–(4) набуде вигляду

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\lambda_t^*(\bar{T}_1) \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{z}} \right) = c_v^*(\bar{T}_1) \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \text{Fo}}, \quad 0 < \bar{z} < \bar{z}_1, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\lambda_t^*(\bar{T}_2) \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \bar{z}} \right) = K_a^{(2)} c_v^*(\bar{T}_2) \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \text{Fo}}, \quad \bar{z}_1 < \bar{z} < 1, \quad (6)$$

$$\bar{T}_1|_{\bar{z}=0} = \bar{T}_{\text{bot}}, \quad \bar{T}_2|_{\bar{z}=1} = \bar{T}_{\text{top}}, \quad (7)$$

$$\bar{T}_1|_{\bar{z}=\bar{z}_1} = \bar{T}_2|_{\bar{z}=\bar{z}_1}, \quad (8)$$

$$\lambda_{t_0}^{(1)} \lambda_t^*(\bar{T}_1) \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=\bar{z}_1} = \lambda_{t_0}^{(2)} \lambda_t^*(\bar{T}_2) \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=\bar{z}_1}, \quad (9)$$

$$\bar{T}_i|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

де $K_a^{(i)} = \frac{a_0^{(1)}}{a_0^{(i)}}$, $a_0^{(i)} = \frac{\lambda_{t_0}^{(i)}}{c_v^{(i)}}$, $i = 1, 2$, $\bar{T}_{\text{bot}} = \frac{t_{\text{bot}}}{t_0} - T_p$, $\bar{T}_{\text{top}} = \frac{t_{\text{top}}}{t_0} - T_p$.

Частково лінеаризуємо задачу (5)–(10) за допомогою введення змінних Кірхгофа

$$\theta_i = \int_0^{\bar{T}_i} \lambda_{ti}^*(\xi) d\xi, \quad (11)$$

припускаючи при цьому, що коефіцієнти температуропровідності $a^{(i)}$ матеріалів шарів пластини є сталими величинами, $a^{(i)} \approx \text{const}$, а для лінеаризації умови (8) рівності температур на межі контакту шарів вводимо лінеаризувальний параметр μ [2]. В результаті отримуємо лінійну задачу на

змінні Кірхгофа θ_i :

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \bar{z}^2} = K_a^{(i)} \frac{\partial \theta_i}{\partial F_0}, \quad \begin{array}{l} 0 < \bar{z} < \bar{z}_1, \quad i = 1, \\ \bar{z}_1 < \bar{z} < 1, \quad i = 2, \end{array} \quad (12)$$

$$\theta_1|_{\bar{z}=0} = \theta_{\text{bot}}, \quad \theta_2|_{\bar{z}=1} = \theta_{\text{top}}, \quad (13)$$

$$\theta_1|_{\bar{z}=\bar{z}_1} = \mu \theta_2|_{\bar{z}=\bar{z}_1}, \quad \lambda_{t0}^{(1)} \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=\bar{z}_1} = \lambda_{t0}^{(2)} \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{z}} \Big|_{\bar{z}=\bar{z}_1}, \quad (14)$$

$$\theta_i|_{F_0=0} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

$$\text{де } \theta_{\text{bot}} = \int_0^{\bar{T}_{\text{bot}}} \lambda_t^*(\xi) d\xi, \quad \theta_{\text{top}} = \int_0^{\bar{T}_{\text{top}}} \lambda_t^*(\xi) d\xi.$$

Для знаходження розв'язку задачі (12)–(15) скористаємось інтегральним перетворенням Лапласа за часовою безрозмірною змінною F_0 . Застосувавши до рівнянь (12) перетворенням Лапласа

$$\tilde{\theta}_i = \int_0^{\infty} \theta_i e^{-s F_0} dF_0,$$

де s – параметр перетворення, загальний розв'язок отриманого рівняння запишемо у вигляді

$$\tilde{\theta}_i = A_i \cos(\beta_i \bar{z}) + B_i \sin(\beta_i \bar{z}), \quad (16)$$

де $\beta_i = \sqrt{-s/K_i}$, $i = 1, 2$, $K_i = 1/K_a^{(i)}$. Сталі інтегрування A_i , B_i визначимо із системи рівнянь, яку отримуємо з граничних умов (13), (14), застосувавши до них перетворення Лапласа:

$$A_1 = \frac{\theta_{\text{bot}}}{s}, \quad A_2 \cos(\beta_2) + B_2 \sin(\beta_2) = \frac{\theta_{\text{top}}}{s}, \quad (17)$$

$$A_1 \cos(\beta_1 \bar{z}_1) + B_1 \sin(\beta_1 \bar{z}_1) - \mu [A_2 \cos(\beta_2 \bar{z}_1) + B_2 \sin(\beta_2 \bar{z}_1)] = \frac{\theta_{\text{top}}}{s}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{t0}^{(1)} \beta_1 [A_1 \sin(\beta_1 \bar{z}_1) + B_1 \cos(\beta_1 \bar{z}_1)] + \\ & + \lambda_{t0}^{(2)} \beta_2 [A_2 \sin(\beta_2 \bar{z}_1) - B_2 \cos(\beta_2 \bar{z}_1)] = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Розв'язавши (17)–(19), знаходимо, що

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\theta_{\text{bot}}}{s}, \quad B_1 = \frac{2\mu \theta_{\text{top}} \lambda_{t0}^{(2)} \beta_2 - \theta_{\text{bot}} (\lambda_{t0}^{(2)} \beta_2 p_1^+ + \mu \lambda_{t0}^{(1)} \beta_1 p_1^-)}{s \Delta}, \\ A_2 &= \frac{2\theta_{\text{bot}} \lambda_{t0}^{(1)} \beta_1 \sin(\beta_2) + \theta_{\text{top}} (\lambda_{t0}^{(2)} \beta_2 p_2^+ - \mu \lambda_{t0}^{(1)} \beta_1 p_2^-)}{s \Delta}, \\ B_2 &= \frac{-2\theta_{\text{bot}} \lambda_{t0}^{(1)} \beta_1 \cos(\beta_2) - \theta_{\text{top}} (\lambda_{t0}^{(2)} \beta_2 p_1^- - \mu \lambda_{t0}^{(1)} \beta_1 p_1^+)}{s \Delta}, \end{aligned} \quad (20)$$

де

$$\begin{aligned} p_1^\pm &= \cos(\beta_1 \bar{z}_1 + \beta_2 (1 - \bar{z}_1)) \pm \cos(\beta_1 \bar{z}_1 - \beta_2 (1 - \bar{z}_1)), \\ p_2^\pm &= \sin(\beta_1 \bar{z}_1 + \beta_2 (1 - \bar{z}_1)) \pm \sin(\beta_1 \bar{z}_1 - \beta_2 (1 - \bar{z}_1)), \\ \Delta &= \lambda_{t0}^{(2)} \beta_2 p_2^+ + \mu \lambda_{t0}^{(1)} \beta_1 p_2^-. \end{aligned}$$

Підставивши у (16) вирази (20) для A_i , B_i , отримуємо формули для зображень Лапласа змінних Кірхгофа $\tilde{\theta}_i$:

$$\tilde{\theta}_1 = \frac{\theta_{\text{bot}} \operatorname{ch} \sqrt{s} \bar{z}}{s} - \frac{\operatorname{sh} \sqrt{s} \bar{z} [\theta_{\text{bot}} (f_2^+(s) + \mu K_\lambda K_2 f_2^-(s)) + 2\mu \theta_{\text{top}}]}{s(f_1^+(s) + \mu K_\lambda K_2 f_1^-(s))}, \quad (21)$$

$$\tilde{\theta}_2 = \frac{2\theta_{\text{bot}} K_\lambda K_2 \operatorname{sh} (1 - \bar{z}) \sqrt{\frac{s}{K_2}} + \theta_{\text{top}} [f^+(s, \bar{z}) - \mu K_\lambda K_2 f^-(s, \bar{z})]}{s(f_1^+(s) + \mu K_\lambda K_2 f_1^-(s))}. \quad (22)$$

Тут позначено

$$f_1^\pm(s) = \operatorname{sh}(m^+ \sqrt{s}) \pm \operatorname{sh}(m^- \sqrt{s}), \quad f_2^\pm(s) = \operatorname{ch}(m^+ \sqrt{s}) \pm \operatorname{ch}(m^- \sqrt{s}),$$

$$f^\pm(s, \bar{z}) = \operatorname{sh}(n^+ \bar{z} \sqrt{s}) \pm \operatorname{sh}(n^- \bar{z} \sqrt{s}),$$

$$m^\pm = \bar{z}_1 \pm \frac{1}{\sqrt{K_2}}, \quad n^\pm(\bar{z}) = \bar{z}_1 \pm \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}}{\sqrt{K_2}}.$$

Для здійснення оберненого перетворення Лапласа, поділивши чисельник і знаменник виразу $\tilde{\theta}_2$ та другого доданка виразу $\tilde{\theta}_1$ на \sqrt{s} , перетворимо їх до вигляду, коли можна застосувати теорему розкладу Ващенко-Захарченка [3]. В результаті для змінних Кірхгофа знаходимо такі формули:

$$\theta_1 = \frac{\theta_{\text{bot}} (\bar{z}_1 - \bar{z}) + \mu (\theta_{\text{bot}} K_\lambda (1 - \bar{z}_1) + \theta_{\text{top}} \bar{z})}{\bar{z}_1 + \mu K_\lambda (1 - \bar{z}_1)} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{\text{top}} \mu K_2^{-1/2} \sin \frac{\bar{z}}{\bar{z}_1} s_n + \theta_{\text{bot}} f_1(s_n)}{s_n f(s_n)} e^{-s_n^2 \operatorname{Fo} / \bar{z}_1^2}, \quad (23)$$

$$\theta_2 = \frac{\theta_{\text{bot}} K_\lambda (1 - \bar{z}) + \theta_{\text{top}} \bar{z} - \nu \theta_{\text{top}} K_\lambda (\bar{z}_1 - \bar{z})}{\bar{z}_1 + \nu K_\lambda (1 - \bar{z}_1)} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_{\text{bot}} K_\lambda \sin K_2^{-1/2} \frac{1 - \bar{z}}{\bar{z}_1} s_n + \theta_{\text{top}} f_2(s_n)}{s_n f(s_n)} e^{-s_n^2 \operatorname{Fo} / \bar{z}_1^2}, \quad (24)$$

де

$$f_1(s_n) = K_2^{-1/2} \sin \left(1 - \frac{\bar{z}}{\bar{z}_1} \right) s_n \cos K_z K_2^{-1/2} s_n + \mu K_\lambda \cos \left(1 - \frac{\bar{z}}{\bar{z}_1} \right) s_n \sin K_z K_2^{-1/2} s_n,$$

$$f_2(s_n) = K_2^{-1/2} \sin s_n \cos K_2^{-1/2} \left(1 - \frac{\bar{z}}{\bar{z}_1} \right) s_n - \mu K_\lambda \cos s_n \sin K_2^{-1/2} \left(1 - \frac{\bar{z}}{\bar{z}_1} \right) s_n,$$

$$f(s_n) = (1 + K_z K_2^{-1/2}) (K_2^{-1/2} + \mu K_\lambda) \cos (1 + K_z K_2^{-1/2}) s_n + (1 - K_z K_2^{-1/2}) (K_2^{-1/2} - \mu K_\lambda) \cos (1 - K_z K_2^{-1/2}) s_n,$$

$$\theta_{\text{bot}} = \int_0^{\bar{T}_{\text{bot}}} \lambda_t^*(\xi) d\xi, \quad \theta_{\text{top}} = \int_0^{\bar{T}_{\text{top}}} \lambda_t^*(\xi) d\xi,$$

$$K_2 = \frac{a_0^{(2)}}{a_0^{(1)}}, \quad K_z = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}, \quad K_\lambda = \frac{\lambda_{t0}^{(1)}}{\lambda_{t0}^{(2)}}.$$

Тут s_n – корені рівняння

$$\sin \mu \cos K_2^{-1/2} K_z s + \mu K_2^{-1/2} K_\lambda \sin K_2^{-1/2} K_z s \cos s = 0. \quad (25)$$

Зазначимо, що корені рівняння (25) є одночасно коренями рівняння $\text{ctg} K_2^{-1/2} K_z s + \mu K_2^{-1/2} K_\lambda \text{ctg} s = 0$ та спільними коренями рівнянь

$$\sin s = 0, \quad \sin K_2^{-1/2} K_z s = 0. \quad (26)$$

Система рівнянь (26) має розв'язок, коли $K_2^{-1/2} K_z$ є правильним дробом, тобто, коли $K_2^{-1/2} K_z = \frac{\zeta}{c}$, де $\zeta < c$ і $\zeta, c \in \mathbb{N}$. Тоді $K_2^{-1/2} K_z s_n = \frac{\zeta}{c} s_n = n\pi$, $s_n = \frac{cn\pi}{\zeta} = cm\pi$. Отже, в цьому випадку розв'язки (23), (24) необхідно доповнити відповідно виразами

$$\frac{2}{c\pi(1 + \mu K_z K_\lambda)} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\mu \theta_{\text{top}} \sin \frac{\bar{z}}{\bar{z}_1} cm\pi + \theta_{\text{bot}} \sin \left(1 - \frac{\bar{z}}{\bar{z}_1} \right) cm\pi \right] \frac{1}{m} e^{-c^2 m^2 \pi^2 \text{Fo} / \bar{z}_1^2}, \quad (27)$$

$$\frac{2K_\lambda \sqrt{K_2}}{c\pi(1 + \mu K_z K_\lambda)} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\mu \theta_{\text{top}} \sin K_2^{-1/2} \left(1 - \frac{\bar{z}}{\bar{z}_1} \right) cm\pi + \theta_{\text{bot}} \sin K_2^{-1/2} \left(\frac{1 - \bar{z}}{\bar{z}_1} \right) cm\pi \right] \frac{1}{m} e^{-c^2 m^2 \pi^2 \text{Fo} / \bar{z}_1^2}. \quad (28)$$

За лінійної температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності матеріалів шарів $\lambda_t^*(T_i) = 1 + k_i \bar{T}_i$ температуру в пластині обчислюємо за формулою

$$T_i = \frac{(\sqrt{1 + 2k_i \theta_i} - 1)}{k_i} + T_p. \quad (29)$$

Значення лінеаризувального параметра μ уточнюємо з умови (8) рівності температур на межі контакту шарів.

Подаючи механічні характеристики матеріалів шарів $E_i(t)$, $\alpha_t^{(i)}(t)$ і $\nu_i(t)$ у вигляді $\chi^{(i)}(t) = \chi_0^{(i)} \chi_i^*(\bar{T}_i)$, дві ненульові компоненти тензора напружень $\sigma_{xx}^{(i)} = \sigma_{yy}^{(i)} = \sigma^{(i)}(z)$ у шарах пластини, зумовлені знайденим температурним полем, обчислюємо за формулою [1, 2]

$$\bar{\sigma}^{(i)}(\bar{z}) = \frac{E_i^*(T)}{1 - \nu_0^{(i)} \nu_i^*(T)} \left[\frac{(A_*^{(i)} N_t^{*(i)} - B_*^{(i)} M_t^{*(i)}) \bar{z} + A_*^{(i)} M_t^{*(i)} - C_*^{(i)} N_t^{*(i)}}{(A_*^{(i)})^2 - B_*^{(i)} C_*^{(i)}} - \Phi_*^{(i)}(T) \right], \quad (30)$$

де $\bar{\sigma}^{(i)}(\bar{z}) = \sigma^{(i)}(\bar{z}) / E_0^{(i)} \alpha_{t0}^{(i)} t_0$, $E_i^*(T)$, $\alpha_{ti}^*(T)$, $\nu_i^*(T)$ мають вигляд

$$\chi_i^*(T) = \chi_1^*(\bar{T}_1) + (\chi_2^*(\bar{T}_2) - \chi_1^*(\bar{T}_1))S(\bar{z} - \bar{z}_1), \quad \begin{array}{l} 0 < \bar{z} < \bar{z}_1, \quad i = 1, \\ \bar{z}_1 < \bar{z} < 1, \quad i = 2, \end{array}$$

$S(z)$ – одинична функція,

$$\begin{aligned} A_*^{(i)} &= \sum_{i=1}^2 \int_{\bar{z}_{i-1}}^{\bar{z}_i} \frac{\bar{z} E_i^*(T_i)}{1 - v_0^{(i)} v_i^*(T_i)} d\bar{z}, & B_*^{(i)} &= \sum_{i=1}^2 \int_{\bar{z}_{i-1}}^{\bar{z}_i} \frac{E_i^*(T_i)}{1 - v_0^{(i)} v_i^*(T_i)} d\bar{z}, \\ C_*^{(i)} &= \sum_{i=1}^2 \int_{\bar{z}_{i-1}}^{\bar{z}_i} \frac{\bar{z}^2 E_i^*(T_i)}{1 - v_0^{(i)} v_i^*(T_i)} d\bar{z}, & N_t^{*(i)} &= \sum_{i=1}^2 \int_{\bar{z}_{i-1}}^{\bar{z}_i} \frac{E_i^*(T_i) \Phi_*^{(i)}(T_i)}{1 - v_0^{(i)} v_i^*(T_i)} d\bar{z}, \\ M_t^{*(i)} &= \sum_{i=1}^2 \int_{\bar{z}_{i-1}}^{\bar{z}_i} \frac{E_i^*(T_i) \Phi_*^{(i)}(T_i)}{1 - v_0^{(i)} v_i^*(T_i)} \bar{z} d\bar{z}, & \Phi_*^{(i)}(T_i) &= \int_0^{\bar{T}_i} \alpha_{ti}^{(i)}(T_i) dT. \end{aligned}$$

Напруження $\bar{\sigma}^{(i)}(\bar{z})$ задовольняють умови

$$\int_0^1 \sigma^{(i)}(z) dz = \int_0^1 z \sigma^{(i)}(z) dz = 0. \quad (31)$$

Числові дослідження. Як числовий приклад розглянуто вільну від силових навантажень двошарову пластину. За матеріали шарів вибрано кераміку ZrO_2 (шар 1) і титановий сплав $Ti-6Al-4V$ (шар 2) з такими температурними залежностями теплофізичних і механічних характеристик з діапазону температур $300 \div 1100$ К [7]

– для ZrO_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_t(t) &= (1.71 + 0.21 \cdot 10^{-3} t + 0.116 \cdot 10^{-6} t^2) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})], \\ c_v(t) &= c_p(t) \rho(t), \end{aligned} \quad (32)$$

$$c_p(t) = (2.74 \cdot 10^2 + 7.95 \cdot 10^{-1} t - 6.19 \cdot 10^{-4} t^2 + 1.71 \cdot 10^{-7} t^3) [\text{кДж}/\text{кг} \cdot \text{К}], \quad (33)$$

$$\rho = 3657.0 / (1.0 + \alpha_t(t)(t - 300.0))^3 [\text{кг}/\text{м}^3], \quad (34)$$

$$\alpha_t(t) = (13.31 \cdot 10^{-6} - 18.9 \cdot 10^{-9} t + 12.7 \cdot 10^{-12} t^2) [\text{К}^{-1}], \quad (35)$$

$$E(t) = (132.2 - 50.3 \cdot 10^{-3} t - 8.1 \cdot 10^{-6} t^2) [\text{ГПа}], \quad \nu = 0.333; \quad (36)$$

– для $Ti-6Al-4V$:

$$\lambda_t(t) = (1.1 + 0.017t) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})], \quad c_v(t) = c_p(t) \rho(t), \quad (37)$$

$$c_p(t) = (3.5 \cdot 10^2 + 8.78 \cdot 10^{-1} t - 9.74 \cdot 10^{-4} t^2 + 4.43 \cdot 10^{-7} t^3) [\text{кДж}/\text{кг} \cdot \text{К}], \quad (38)$$

$$\rho = 4420.0 / (1.0 + \alpha_t(t)(t - 300.0))^3 [\text{кг}/\text{м}^3], \quad (39)$$

$$\alpha_t(t) = (7.43 \cdot 10^{-6} + 5.56 \cdot 10^{-9} t - 2.69 \cdot 10^{-12} t^2) [\text{К}^{-1}], \quad (40)$$

$$E(t) = (122.7 - 0.0565t) [\text{ГПа}], \quad \nu(t) = 0.2888 + 32.0 \cdot 10^{-6} t. \quad (41)$$

Температуру поверхні пластини $z = z_2 = b$ вибрано за опорну: $t_{\text{top}} = t_0 = 1100$ К, а температура поверхні $z = z_0 = 0$ дорівнює початковій температурі пластини $t_{\text{bot}} = t_p = 300$ К. Усі обчислення проведено в безрозмірних величинах. Результати числових досліджень наведено у вигляді графі-

ків на рис. 2 – рис. 4, де суцільні лінії відповідають значенням температури та напружень, отриманим з урахуванням температурних залежностей термомеханічних характеристик матеріалів шарів пластини згідно з (32)–(41) (значення коефіцієнтів теплопровідності кераміки і титанового сплаву та коефіцієнт Пуассона кераміки вибрано за початкової температури), а штрихові – за сталих значень усіх теплофізичних і механічних характеристик, взятих за початкової температури $t_p = 300$ К.

На рис. 2 зображено графіки залежностей від координати \bar{z} приросту температури \bar{T} для значень часу $Fo = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 1.0$. При $Fo > 1$ температура в пластині виходить на стаціонарний режим. На межі контакту шарів температура неперервна. Залежність приросту температури \bar{T} від Fo на межі контакту шарів $\bar{z} = \bar{z}_1$ наведено на рис. 3.

Максимальна розбіжність між значеннями температури в пластині з урахуванням залежностей від температури коефіцієнтів теплопровідності та об'ємної теплосмості з вибраного діапазону температури і при сталих їхніх значеннях, вибраних при початковій температурі, не перевищує 22 %.

На рис. 4 зображено графіки залежностей компонент тензора напружень $\bar{\sigma}(\bar{z})$ від координати \bar{z} для значень $Fo = 0.05, 0.1, 1.0$. Залежність компонент тензора напружень від Fo на поверхнях пластини $\bar{z} = 0, \bar{z} = 1$ та при наблизненні до межі контакту шарів наведено на рис. 5.

На межі контакту шарів $\bar{z} = \bar{z}_1$ напруження розривні (рис. 4). Як видно з графіків на рис. 5, зі зростанням часу напруження на поверхнях пластини та в околі контакту шарів зростають за абсолютною величиною, досягають максимальних значень і, спадаючи, виходять на усталений режим. Зі зростанням часу при наблизненні до межі контакту в шарі 1 з кераміки додатні напруження, спадаючи, прямують до нуля, а у шарі 2 з титанового сплаву – змінюють знак з додатних на від'ємні.

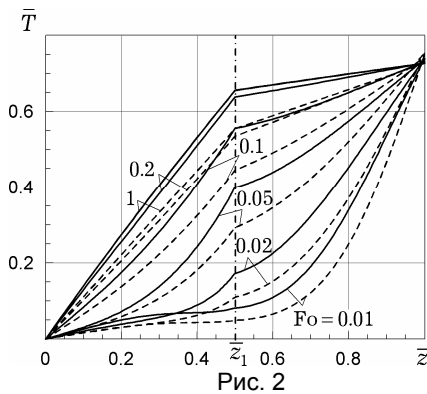


Рис. 2

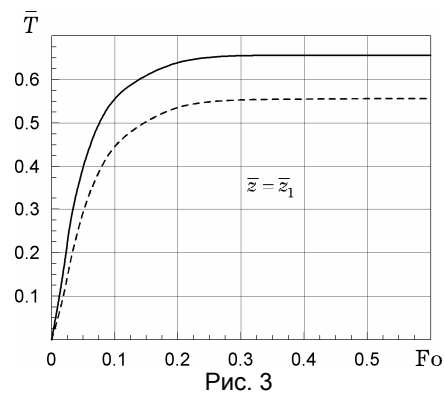


Рис. 3

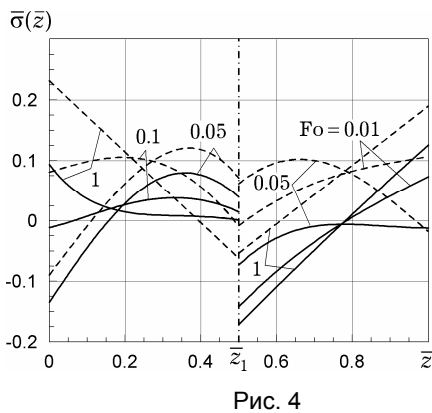


Рис. 4

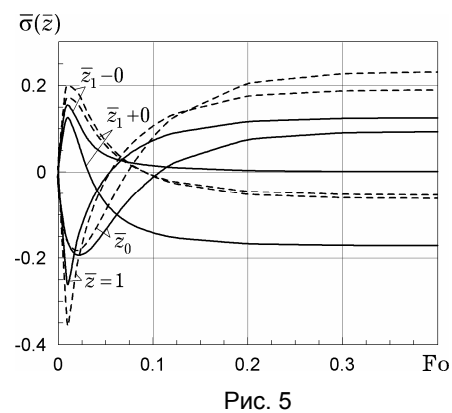


Рис. 5

Розбіжність між значеннями напружень, обчисленими за формулою (30) з урахуванням залежності від температури коефіцієнтів теплопровідності, об'ємних теплоємностей, модулів пружності, коефіцієнтів лінійного теплового розширення, коефіцієнта Пуассона шару з титанового сплаву, та їх значеннями, обчисленими за сталих характеристик, вибраних за початкової температури, в приповерхневій області за малих часів ($F_0 < 0.05$) не перевищує 33% у шарі з кераміки та 50% – у шарі з титанового сплаву. На межі контакту шарів ці напруження відрізняються більше ніж у два рази.

Отже, проведені дослідження засвідчують, що нехтування температурною залежністю теплофізичних і механічних характеристик матеріалів може призводити до істотно відмінних від істинних розподілів температурного поля і визначеного за ним термопружного стану тіла.

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – Москва: Мир, 1964. – 517 с.
Te same: Boley B. A., Weiner J. H. Theory of thermal stresses. – New York – London: J. Wiley & Sons, Inc., 1960. – 586 p.
2. Кушнір Р. М., Попович В. С. Термопружність термочувливих тіл. – Львів: Сполом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 599 с.
4. Процюк Б. В. Квазистатические температурные напряжения в многослойной пластине при нагреве тепловым потоком // Теорет. и прикл. механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 63–69.
5. Kushnir R. M., Popovych V. S. Heat conduction problems of thermosensitive solids under complex heat exchange // In: Heat conduction – Basic research / V. S. Vikhrenko (ed.). – Rijeka: InTech (Croatia), 2011. – 350 p. – (Chap. 6. – P. 131–154.)
6. Noda N. Thermal stress in functionally graded materials // J. Therm. Stresses. – 1999. – 22, No. 4-5. – P. 477–512.
7. Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N. Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // J. Therm. Stresses. – 1996. – 19, No. 1. – P. 77–102.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

На основе модели термочувствительного тела определено распределение неустановившегося температурного поля и обусловленного им термоупругого состояния в двухслойной пластине. Решение нелинейной нестационарной задачи теплопроводности построено с использованием преобразования Кирхгофа, метода линеаризующего параметра и интегрального преобразования Лапласа по времени. Проведены численные исследования влияния температурной зависимости теплофизических и механических характеристик материалов слоев на величину и характер распределения температуры и обусловленных ею напряжений в пластине.

MODELING AND DETERMINATION OF THE UNSTEADY THERMOELASTIC STATE OF A DOUBLE-LAYER THERMOSENSITIVE PLATE

Based on the model of thermosensitive body, the distributions of unsteady temperature field and thermoelastic state caused by it in double-layer plate are determined. A solution to the nonlinear nonstationary heat conduction problem is constructed using the Kirchhoff transformation, the method of linearizing parameter and the integral Laplace transform over time. The effect of the temperature dependence of thermal and mechanical characteristics of the layers material on the values and the nature of the temperature and thermal stresses distributions caused by it in the plate is analyzed numerically.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
14.10.13