

## ВИЗНАЧЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ КУСКОВО-НЕОДНОРІДНИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ З ЦИЛІНДРИЧНИМИ ПОВЕРХНЯМИ ПОДІЛУ

Запропоновано метод визначення термопружного стану, зумовленого плоскими осесиметричними температурними полями та поверхневими навантаженнями, у шаруватих ізотропних тілах із циліндричними поверхнями поділу з урахуванням залежності від температури і координати модуль пружності, температурних коефіцієнтів лінійного розширення і коефіцієнтів Пуассона. Метод передбачає розв'язання систем інтегро-алгебричних рівнянь відносно радіальних переміщень. Для циліндра такі системи отримано з інтегрального подання розв'язку задачі для звичайного диференціального рівняння з узагальненими похідними. При цьому використано функцію Гріна задачі пружності для однорідного циліндра. Для шаруватих простору з циліндричною порожниною, суцільних циліндра і простору відповідні системи та решту необхідних співвідношень для визначення термопружного стану отримано шляхом граничних переходів. Наведено співвідношення для визначення термонапружень у відповідних одношарових тілах. Числові дослідження виконано для тришарового циліндра з функціонально-градієнтним шаром.

Для розв'язання одновимірних задач пружності і термопружності для одно- та багатошарових циліндричних тіл зі змінними фізико-механічними характеристиками (ФМХ) широко використовують аналітичні та аналітично-числові методи [1–10, 12, 13, 15, 17–23], у тому числі методи, за допомогою яких відповідні задачі зводять до розв'язання інтегральних рівнянь стосовно напружень. У цій роботі запропоновано метод визначення термопружного стану, зумовленого плоскими осесиметричними температурними полями та поверхневими навантаженнями, в ізотропних термочутливих неоднорідних і кусково-неоднорідних тілах із циліндричними поверхнями поділу, який передбачає розв'язання систем інтегро-алгебричних рівнянь відносно радіальних переміщень, причому в інтегральних операторах шукані функції є лише під одинарними інтегралами. Метод ґрунтується на використанні узагальнених функцій і функції Гріна задачі пружності для однорідного циліндра.

**Формулювання задачі термопружності.** Розглянемо пружне тіло, складене з ідеально контактуючих концентрично розташованих кругових порожнистих ізотропних циліндрів з різними ФМХ. Вважаємо, що обмежувальні циліндричні поверхні тіла перебувають під дією рівномірно прикладених навантажень  $\sigma_0$ ,  $\sigma_n$  відповідно, торцеві – під дією навантажень, рівнодіюча яких дорівнює  $P$ , а саме тіло перебуває в температурному полі, яке описується функцією

$$t(r) = t_1(r) + \sum_{i=1}^{n-1} [t_{i+1}(r) - t_i(r)]S(r - r_i), \quad (1)$$

де  $t_p(r)$ ,  $p = 1, \dots, n$ , – відомі розподіли температур при  $r_{p-1} < r < r_p$ ;  $r$ ,  $r_0$  і  $r_p$  – віднесені до характерного лінійного розміру  $\ell$  відповідно радіальна координата, внутрішній радіус першого і зовнішній радіус  $p$ -го шару;  $n$  – кількість шарів;  $S(\zeta)$  – функція Гевісайда.

Визначимо термопружний стан тіла за припущення, що ФМХ складових залежать від температури і координати. Для цього використаємо рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \quad (2)$$

та співвідношення

$$\begin{aligned}\sigma_r &= c(r) \frac{du}{dr} + v^*(r)c(r) \left( \frac{u}{r} + \varepsilon_z \right) - c^*(r)\Phi(r), \\ \sigma_\varphi &= v^*(r)c(r) \left( \frac{du}{dr} + \varepsilon_z \right) + c(r) \frac{u}{r} - c^*(r)\Phi(r), \\ \sigma_z &= c(r)\varepsilon_z + v^*(r)c(r) \left( \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right) - c^*(r)\Phi(r),\end{aligned}\quad (3)$$

де віднесене до  $\ell$  радіальне переміщення  $u(r)$  задовольняє рівняння із узагальненими похідними

$$\frac{d}{dr} \left[ c(r) \frac{du}{dr} \right] + \frac{d}{dr} \left[ \lambda(r) \frac{u}{r} \right] + 2\mu(r) \frac{d}{dr} \left( \frac{u}{r} \right) = \frac{d}{dr} [c^*(r)\Phi(r)] - \varepsilon_z \frac{d\lambda(r)}{dr} \quad (4)$$

і граничні умови

$$\sigma_r|_{r=r_0} = -\sigma_0, \quad \sigma_r|_{r=r_n} = -\sigma_n. \quad (5)$$

Тут функції  $c(r) = \lambda(r) + 2\mu(r)$ ,  $\lambda(r) = \frac{E(t, r)v(t, r)}{[1 + v(t, r)][1 - 2v(t, r)]}$ ,  $\mu(r) = \frac{E(t, r)}{2[1 + v(t, r)]}$ ,

$v^*(r) = \frac{v(t, r)}{1 - v(t, r)}$ ,  $c^*(r) = \frac{E(t, r)}{1 - 2v(t, r)}$  мають вигляд (1); функції  $E(t, r)$ ,  $v(t, r)$  і  $\Phi(r)$  у межах  $p$ -го шару співпадають відповідно з модулями пружності

$E_p(t_p, r)$ , коефіцієнтами Пуассона  $\nu_p(t_p, r)$  і  $\Phi_p(r) = \int_0^{t_p(r)} \alpha_{tp}(\zeta, r) d\zeta$ ;

$\alpha_{tp}(t_p, r)$  – температурні коефіцієнти лінійного розширення  $p$ -го шару;

$\varepsilon_z = \text{const}$  – осьова деформація (невідомий поки що параметр).

**Інтегральне подання розв'язку.** Перейдемо від диференціального формулювання задачі про визначення переміщень до її формулювання в інтегральній формі за допомогою отриманої як частковий випадок [11] функції Гріна

$$G(r, \rho) = \frac{1}{2c_0} \left\{ \frac{r}{\rho} S(\rho - r) + \frac{\rho}{r} S(r - \rho) + \frac{\rho}{r_n^2 - r_0^2} \left[ r\Psi_0^+(\rho) + \frac{kr_0^2\Psi_n^+(\rho)}{r} \right] \right\}, \quad (6)$$

яка є розв'язком задачі

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} - \frac{G}{r^2} = -\frac{1}{c_0\rho} \delta(r - \rho), \quad (7)$$

$$\tau_r|_{r=r_0} = \tau_r|_{r=r_n} = 0. \quad (8)$$

Тут і далі  $\Psi_m^\pm(\rho) = 1 - 2\nu_0 \pm \frac{r_m^2}{\rho^2}$ ,  $m = 0, n$ ;  $\tau_r = c_0 \frac{\partial G(r, \rho)}{\partial r} + \lambda_0 \frac{G(r, \rho)}{r}$ ;  $k = 1/(1 - 2\nu_0)$ ;  $c_0 = \lambda_0 + 2\mu_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$ ,  $\nu_0$  – значення з інтервалу зміни  $\lambda_1(r)$ ,  $\mu_1(r)$ ,  $\nu_1(t_1, r)$  відповідно;  $\delta(\zeta)$  – дельта-функція Дірака.

Помножимо (4) на  $rG(r, \rho)$ . Інтегруючи отримане рівняння з урахуванням (7) у межах від  $r_0$  до  $r_n$ , одержуємо

$$\begin{aligned}\frac{c(\rho)u(\rho)}{c_0} &= \left\{ rG\sigma_r - \left[ r \frac{\partial G}{\partial r} c(r) + \lambda(r)G \right] u \right\} \Big|_{r_0}^{r_n} + \\ &+ \int_{r_0}^{r_n} \left[ r \frac{\partial G}{\partial r} \left( \frac{dc(r)}{dr} \right)_{cl} + G \left( \frac{d\lambda(r)}{dr} \right)_{cl} \right] u dr +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{n-1} \left( K_{ci} r_i \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r=r_i} + K_{\lambda i} G \Big|_{r=r_i} \right) u_i(r_i) + \\
& + \int_{r_0}^{r_n} \frac{\partial}{\partial r} (rG) c^*(r) \Phi(r) dr - \varepsilon_z \int_{r_0}^{r_n} \frac{\partial}{\partial r} (rG) \lambda(r) dr, \quad (9)
\end{aligned}$$

де  $K_{ci} = c_{i+1}(r_i) - c_i(r_i)$ ,  $K_{\lambda i} = K_{ci} - 2K_{\mu i}$ ,  $K_{\mu i} = \mu_{i+1}(r_i) - \mu_i(r_i)$ ; індекс «сl» означає, що відповідна похідна є класичною.

**Система інтегро-алгебричних рівнянь для визначення переміщень.** Замінивши в (9) інтеграли по товщині циліндра сумою інтегралів по товщині шарів, після відповідних перетворень з урахуванням граничних умов (5) і функції Гріна (6) приходимо до такої системи інтегро-алгебричних рівнянь відносно переміщень  $p$ -го шару  $u_p(\rho)$ :

$$\begin{aligned}
c_p(\rho) u_p(\rho) &= u_{tp}(\rho) + \frac{1}{\rho} V_{cp}(\rho) + \rho V_{\mu p}(\rho) + \rho \frac{\beta_{up} \Psi_n^+(\rho) + \beta_{up}^* \Psi_0^+(\rho)}{r_n^2 - r_0^2} + \\
&+ \rho U(\rho) + \sum_{i=1}^{n-1} g_{up}^{(i)}(\rho) u_i(r_i) + u_y(\rho) - \varepsilon_z u_{\varepsilon p}(\rho), \quad r_{p-1} < \rho < r_p, \quad (10)
\end{aligned}$$

де

$$u_{\alpha p}(\rho) = \frac{V_{\alpha p}(\rho)}{\rho} + \rho \frac{\beta_{\alpha p} \Psi_n^+(\rho) + \beta_{\alpha p}^* \Psi_0^+(\rho)}{r_n^2 - r_0^2},$$

$$V_{\alpha p}(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} r \Lambda_{\alpha p}(r) dr, \quad \alpha = t, \varepsilon,$$

$$\Lambda_{tp}(r) = c_p^*(r) \Phi_p(r), \quad \Lambda_{\varepsilon p}(r) = \lambda_p(r),$$

$$\beta_{\alpha p} = \sum_{i=1}^{p-1} V_{\alpha i}(r_i), \quad \beta_{\alpha p}^* = \sum_{i=p}^n V_{\alpha i}(r_i),$$

$$V_{cp}(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} r y_{1p}(r) u_p(r) dr, \quad V_{\mu p}(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} \frac{1}{r} y_{2p}(r) u_p(r) dr,$$

$$y_{1p}(r) = \frac{d}{dr} \left[ \frac{\mu_p(r)}{1 - 2\nu_p(t_p, r)} \right], \quad y_{2p}(r) = \frac{d\mu_p(r)}{dr},$$

$$\beta_{up} = \sum_{i=1}^{p-1} V_{ci}(r_i) - k r_0^2 \sum_{i=1}^{p-1} V_{\mu i}(r_i),$$

$$\beta_{up}^* = \sum_{i=p}^n V_{ci}(r_i) - k r_n^2 \sum_{i=p}^n V_{\mu i}(r_i),$$

$$U(\rho) = \frac{\gamma_n r_n u_n(r_n) \Psi_0^+(\rho) - \gamma_0 r_0 u_1(r_0) \Psi_n^+(\rho)}{r_n^2 - r_0^2},$$

$$u_y(\rho) = \rho \frac{r_0^2 \sigma_0 \Psi_n^+(\rho) - r_n^2 \sigma_n \Psi_0^+(\rho)}{k_0 (r_n^2 - r_0^2)},$$

$$\gamma_0 = \frac{2\mu_1(r_0)}{k_0} - c_1(r_0), \quad \gamma_n = \frac{2\mu_n(r_n)}{k_0} - c_n(r_n), \quad k_0 = \frac{1 - 2\nu_0}{1 - \nu_0},$$

$$g_{up}^{(i)}(\rho) = \frac{r_i \rho}{r_n^2 - r_0^2} \begin{cases} b_{ni} \Psi_0^+(\rho), & p \leq i, \\ b_{0i} \Psi_n^+(\rho), & p > i, \end{cases}$$

$$b_{ni} = K_{ci} - kK_{\mu i} \Psi_n^+(r_i), \quad b_{0i} = K_{ci} - kK_{\mu i} \Psi_0^+(r_i).$$

З огляду на структуру рівнянь (10) їх розв'язок шукаємо у вигляді суми

$$u_p(\rho) = u_p^t(\rho) + u_p^y(\rho) - \varepsilon_z u_p^\varepsilon(\rho), \quad (11)$$

де (з урахуванням змінності ФМХ) перший доданок описує переміщення, зумовлені температурним полем, другий – поверхневими навантаженнями  $\sigma_0$ ,  $\sigma_n$  у циліндрі з закріпленими торцями.

Підставивши (11) в (10), для знаходження кожної із функцій  $u_p^s(\rho)$ ,  $s = t, y, \varepsilon$ , одержимо відповідні системи рівнянь

$$u_p^s(\rho) - \frac{1}{c_p(\rho)} \left[ \frac{V_{cp}^s(\rho)}{\rho} + \rho V_{\mu p}^s(\rho) + \rho \frac{d_{0p}^s \Psi_n^+(\rho) + d_{np}^s \Psi_0^+(\rho)}{r_n^2 - r_0^2} + \sum_{i=1}^{n-1} g_{up}^{(i)}(\rho) u_i^s(r_i) \right] = \frac{u_{0p}^s(\rho)}{c_p(\rho)}, \quad (12)$$

де

$$d_{0p}^s = \beta_{up}^s - \gamma_0 r_0 u_1^s(r_0), \quad d_{np}^s = \beta_{up}^{*s} + \gamma_n r_n u_n^s(r_n),$$

$$\beta_{up}^s = \sum_{i=1}^{p-1} V_{ci}^s(r_i) - k r_0^2 \sum_{i=1}^{p-1} V_{\mu i}^s(r_i), \quad \beta_{up}^{*s} = \sum_{i=p}^n V_{ci}^s(r_i) - k r_n^2 \tilde{\beta}_{up}^{*s},$$

$$\tilde{\beta}_{up}^{*s} = \sum_{i=p}^n V_{\mu i}^s(r_i),$$

$$V_{cp}^s(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} r y_{1p}(r) u_p^s(r) dr, \quad V_{\mu p}^s(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} \frac{1}{r} y_{2p}(r) u_p^s(r) dr,$$

$$u_{0p}^t(\rho) = u_{tp}(\rho), \quad u_{0p}^y(\rho) = u_y(\rho), \quad u_{0p}^\varepsilon(\rho) = u_{\varepsilon p}(\rho). \quad (13)$$

**Співвідношення для визначення деформацій і напружень.** Вважаючи, що розв'язок рівнянь (12) знайдено, запишемо співвідношення для інших компонент напружено-деформованого стану.

Продиференціювавши (10), з урахуванням (11), (13) дістанемо вираз для радіальної деформації

$$c_p(\rho) \varepsilon_{rp}(\rho) = \varepsilon_{rp}^t(\rho) + \varepsilon_{rp}^y(\rho) - \varepsilon_z \varepsilon_{rp}^\varepsilon(\rho), \quad (14)$$

де

$$\varepsilon_{rp}^s(\rho) = e_p^s(\rho) - \frac{1}{\rho^2} V_{cp}^s(\rho) + V_{\mu p}^s(\rho) + \frac{d_{0p}^s \Psi_n^-(\rho) + d_{np}^s \Psi_0^-(\rho)}{r_n^2 - r_0^2} + \sum_{i=1}^{n-1} g_{\varepsilon p}^{(i)}(\rho) u_i^s(r_i),$$

$$e_p^\alpha(\rho) = -\frac{1}{\rho^2} V_{\alpha p}(\rho) + \Lambda_{\alpha p}(\rho) + \frac{\beta_{\alpha p} \Psi_n^-(\rho) + \beta_{\alpha p}^* \Psi_0^-(\rho)}{r_n^2 - r_0^2}, \quad \alpha = t, \varepsilon,$$

$$e_p^y(\rho) = \frac{r_0^2 \sigma_0 \Psi_n^-(\rho) - r_n^2 \sigma_n \Psi_0^-(\rho)}{k_0(r_n^2 - r_0^2)}, \quad g_{\varepsilon p}^{(i)}(\rho) = \frac{r_i}{r_n^2 - r_0^2} \begin{cases} b_{ni} \Psi_0^-(\rho), & p \leq i, \\ b_{0i} \Psi_n^-(\rho), & p > i. \end{cases}$$

Підставляючи (10), (14) в отримані на основі (3) залежності для  $p$ -го шару, матимемо

$$\sigma_{\gamma p}(\rho) = \sigma_{\gamma p}^t(\rho) + \sigma_{\gamma p}^y(\rho) - \varepsilon_z \sigma_{\gamma p}^\varepsilon(\rho), \quad \gamma = r, \varphi, z, \quad (15)$$

де

$$\sigma_{rp}^s(\rho) = \sigma_p^{s-}(\rho), \quad \sigma_{\varphi p}^s(\rho) = \sigma_p^{s+}(\rho),$$

$$\sigma_p^{s\mp}(\rho) = f_p^{s\mp}(\rho) \mp \frac{k_{0p}(\rho) V_{cp}^s(\rho)}{\rho^2} + k_p(\rho) V_{\mu p}^s(\rho) + \frac{d_{0p}^s \tilde{\Psi}_{np}^\mp(\rho) + d_{np}^s \tilde{\Psi}_{0p}^\mp(\rho)}{r_n^2 - r_0^2} + \sum_{i=1}^{n-1} g_p^{(i)\mp}(\rho) u_i^s(r_i),$$

$$k_{0p}(\rho) = \frac{1 - 2v_p(t_p, \rho)}{1 - v_p(t_p, \rho)}, \quad k_p(\rho) = \frac{1}{1 - v_p(t_p, \rho)},$$

$$g_p^{(i)\mp}(\rho) = \frac{r_i}{r_n^2 - r_0^2} \begin{cases} b_{ni} \tilde{\Psi}_{0p}^\mp(\rho), & p \leq i, \\ b_{0i} \tilde{\Psi}_{np}^\mp(\rho), & p > i, \end{cases}$$

$$f_p^{\alpha\mp}(\rho) = \mp \frac{k_{0p}(\rho)}{\rho^2} V_{\alpha p}(\rho) - \frac{1}{2} k_{0p}(\rho) (1 \mp 1) \Lambda_{\alpha p}(\rho) + \frac{\beta_{\alpha p} \tilde{\Psi}_{np}^\mp(\rho) + \beta_{\alpha p}^* \tilde{\Psi}_{0p}^\mp(\rho)}{r_n^2 - r_0^2}, \quad \alpha = t, \varepsilon,$$

$$f_p^{y\mp}(\rho) = \frac{r_0^2 \sigma_0 \tilde{\Psi}_{np}^\mp(\rho) - r_n^2 \sigma_n \tilde{\Psi}_{0p}^\mp(\rho)}{k_0(r_n^2 - r_0^2)},$$

$$\tilde{\Psi}_{mp}^\mp(\rho) = (1 - 2v_0) k_p(\rho) \mp k_{0p}(\rho) \frac{r_m^2}{\rho^2}, \quad m = 0, n,$$

$$\sigma_{zp}^t(\rho) = -\zeta_p(\rho) \Phi_p(\rho) + 2v_p^*(\rho) [A_p^t + V_{\mu p}^t(\rho)],$$

$$\sigma_{zp}^y(\rho) = 2v_p^*(\rho) [A_p^y + V_{\mu p}^y(\rho)],$$

$$\sigma_{zp}^\varepsilon(\rho) = -\zeta_p^*(\rho) + 2v_p^*(\rho) [A_p^\varepsilon + V_{\mu p}^\varepsilon(\rho)],$$

$$kA_p^s = \frac{1}{r_n^2 - r_0^2} \left[ \beta_{s1}^* + \beta_{up}^s + \beta_{up}^{*s} + \gamma_n r_n u_n^s(r_n) - \gamma_0 r_0 u_1^s(r_0) + \sum_{i=1}^{n-1} g_{zp}^{(i)} u_i^s(r_i) \right],$$

$$\zeta_p(\rho) = \frac{E_p(t_p, \rho)}{1 - v_p(t_p, \rho)}, \quad \zeta_p^*(\rho) = \frac{E_p(t_p, \rho)}{1 - v_p^2(t_p, \rho)},$$

$$g_{zp}^{(i)} = r_i \begin{cases} b_{ni}, & p \leq i, \\ b_{0i}, & p > i, \end{cases} \quad \beta_{y1}^* = \frac{r_0^2 \sigma_0 - r_n^2 \sigma_n}{k_0}.$$

Осьову деформацію визначаємо з умови

$$\int_{r_0}^{r_n} \rho \sigma_{zz}(\rho) d\rho = \sum_{p=1}^n \int_{r_{p-1}}^{r_p} \rho \sigma_{zp}(\rho) d\rho = \frac{P}{2\pi}.$$

З урахуванням (15) знаходимо

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z^P + \varepsilon_z^t + \varepsilon_z^y, \quad (16)$$

де

$$\varepsilon_z^P = \frac{P}{2\pi d_\varepsilon}, \quad \varepsilon_z^t = \frac{1}{d_\varepsilon} \left( \sum_{p=1}^n \eta_{tp} - 2 \sum_{p=1}^n \eta_{\mu p}^t - \sum_{p=1}^n A_p^t \eta_{\nu p} \right),$$

$$\varepsilon_z^y = -\frac{1}{d_\varepsilon} \left( 2 \sum_{p=1}^n \eta_{\mu p}^y + \sum_{p=1}^n A_p^y \eta_{\nu p} \right),$$

$$d_\varepsilon = \sum_{p=1}^n \eta_p - 2 \sum_{p=1}^n \eta_{\mu p}^\varepsilon - \sum_{p=1}^n A_p^\varepsilon \eta_{\nu p}, \quad \eta_{tp} = \int_{r_{p-1}}^{r_p} \rho \zeta_p(\rho) \Phi_p(\rho) d\rho,$$

$$\eta_{\mu p}^s = \int_{r_{p-1}}^{r_p} \rho v_p^*(\rho) V_{\mu p}^s(\rho) d\rho, \quad \eta_{\nu p} = \int_{r_{p-1}}^{r_p} \rho v_p^*(\rho) d\rho, \quad \eta_p = \int_{r_{p-1}}^{r_p} \rho \zeta_p^*(\rho) d\rho.$$

**Часткові випадки.** Якщо в (12)–(15) спрямувати  $r_n$  до безмежності і прийняти  $\varepsilon_z = 0$ ,  $\sigma_n = 0$ , то дістанемо відповідні співвідношення для шаруватого простору з циліндричною порожниною. Системи інтегро-алгебричних рівнянь, які у цьому випадку будуть відносно переміщень  $u_p^s(\rho)$ ,  $s = t, y$ , матимуть вигляд

$$u_p^s(\rho) - \frac{1}{c_p(\rho)} \left[ \frac{V_{cp}^s(\rho) + d_{0p}^s}{\rho} + \rho V_{\mu p}^s(\rho) - k \tilde{\beta}_{\mu p}^{*s} \rho \Psi_0^+(\rho) + \sum_{i=1}^{n-1} g_{\mu p}^{(i)}(\rho) u_i^s(r_i) \right] = \frac{u_{0p}^s(\rho)}{c_p(\rho)}, \quad (17)$$

а доданки у формулах (14), (15) визначатимуться так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rp}^s(\rho) &= c_p^s(\rho) + V_{\mu p}^s(\rho) - k \tilde{\beta}_{\mu p}^{*s} \Psi_0^-(\rho) - \frac{V_{cp}^s(\rho) + d_{0p}^s}{\rho^2} + \sum_{i=1}^{n-1} g_{\varepsilon p}^{(i)}(\rho) u_i^s(r_i), \\ \sigma_p^{s\mp}(\rho) &= f_p^{s\mp}(\rho) \mp k_{0p}(\rho) \frac{V_{cp}^s(\rho) + d_{0p}^s}{\rho^2} + k_p(\rho) V_{\mu p}^s(\rho) - \\ &\quad - k \tilde{\beta}_{\mu p}^{*s} \tilde{\Psi}_{0p}^\mp(\rho) + \sum_{i=1}^{n-1} g_p^{(i)\mp}(\rho) u_i^s(r_i), \\ \sigma_{zp}^t(\rho) &= -\zeta_p(\rho) \Phi_p(\rho) + 2v_p^*(\rho) \left[ -\tilde{\beta}_{\mu p}^{*t} + \sum_{i=1}^{n-1} g_{zp}^{(i)} u_i^t(r_i) + V_{\mu p}^t(\rho) \right], \\ \sigma_{zp}^y(\rho) &= 2v_p^*(\rho) \left[ -\tilde{\beta}_{\mu p}^{*y} + \sum_{i=1}^{n-1} g_{zp}^{(i)} u_i^y(r_i) + V_{\mu p}^y(\rho) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Тут

$$\begin{aligned}
u_{0p}^t(\rho) &= \frac{1}{\rho} [V_{tp}(\rho) + \beta_{tp}], & u_{0p}^y(\rho) &= \frac{r_0^2 \sigma_0}{k_0 \rho}, \\
\tilde{\beta}_{un}^{*s} &= \int_{r_{n-1}}^{\infty} \frac{1}{r} y_{2n}(r) u_n^s(r) dr, \\
e_p^t(\rho) &= -\frac{V_{tp}(\rho) + \beta_{tp}}{\rho^2} + c_p^*(\rho) \Phi_p(\rho), & e_p^y(\rho) &= -\frac{r_0^2 \sigma_0}{k_0 \rho^2}, \\
f_p^{t\mp}(\rho) &= \mp k_{0p}(\rho) \left[ \frac{V_{tp}(\rho) + \beta_{tp}}{\rho^2} - \frac{1}{2} (1 \mp 1) c_p^*(\rho) \Phi_p(\rho) \right], \\
f_p^{y\mp}(\rho) &= \mp \frac{r_0^2 \sigma_0}{k_0 \rho^2} k_{0p}(\rho), \\
g_{up}^{(i)}(\rho) &= \begin{cases} -k K_{\mu i} \rho \Psi_0^+(\rho) / r_i, & p \leq i, \\ b_{0i} r_i / \rho, & p > i, \end{cases} \\
g_{\varepsilon p}^{(i)}(\rho) &= \begin{cases} -k K_{\mu i} \Psi_0^-(\rho) / r_i, & p \leq i, \\ -b_{0i} r_i / \rho^2, & p > i, \end{cases} \\
g_p^{(i)\mp}(\rho) &= \begin{cases} -k K_{\mu i} \tilde{\Psi}_{0p}^{\mp}(\rho) / r_i^2, & p \leq i, \\ \mp b_{0i} k_{0p}(\rho) / \rho^2, & p > i, \end{cases} & g_{zp}^{(i)} &= \begin{cases} -k K_{\mu i} / r_i, & p \leq i, \\ 0, & p > i. \end{cases}
\end{aligned}$$

Інші позначення такі ж, як і для шаруватого порожнистого циліндра.

Прийнявши  $n = 1$ , з (12)–(18) одержимо відповідні співвідношення для визначення компонент термопружного стану в односкладових порожнистих неоднорідних термочутливих

– *циліндри*:

$$\begin{aligned}
u^s(\rho) - \frac{1}{c(\rho)} \left[ \frac{1}{\rho} V_c^s(\rho) + \rho V_\mu^s(\rho) + \rho \frac{d_1^s \Psi_0^+(\rho) - \gamma_0 r_0 u^s(r_0) \Psi_1^+(\rho)}{r_1^2 - r_0^2} \right] &= \frac{u_0^s(\rho)}{c(\rho)}, \\
s &= t, y, \varepsilon, \\
\varepsilon_r^s(\rho) &= e^s(\rho) - \frac{1}{\rho^2} V_c^s(\rho) + V_\mu^s(\rho) + \frac{d_1^s \Psi_0^-(\rho) - \gamma_0 r_0 u^s(r_0) \Psi_1^-(\rho)}{r_1^2 - r_0^2}, \\
\sigma_r^s(\rho) &= f_r^s(\rho) - \frac{k_{01}(\rho)}{\rho^2} V_c^s(\rho) + k_1(\rho) V_\mu^s(\rho) + \frac{d_1^s \tilde{\Psi}_0^-(\rho) - \gamma_0 r_0 u^s(r_0) \tilde{\Psi}_1^-(\rho)}{r_1^2 - r_0^2}, \\
\sigma_\phi^s(\rho) &= f_\phi^s(\rho) + \frac{k_{01}(\rho)}{\rho^2} V_c^s(\rho) + k_1(\rho) V_\mu^s(\rho) + \frac{d_1^s \tilde{\Psi}_0^+(\rho) - \gamma_0 r_0 u^s(r_0) \tilde{\Psi}_1^+(\rho)}{r_1^2 - r_0^2}, \\
\sigma_z^t(\rho) &= -\zeta(\rho) \Phi(\rho) + 2v^*(\rho) [A^t + V_\mu^t(\rho)], \\
\sigma_z^y(\rho) &= 2v^*(\rho) [A^y + V_\mu^y(\rho)], & \sigma_z^\varepsilon(\rho) &= -\zeta^*(\rho) + 2v^*(\rho) [A^\varepsilon + V_\mu^\varepsilon(\rho)], \quad (19)
\end{aligned}$$

де

$$u_0^t(\rho) = \frac{1}{\rho} V_t(\rho) + \frac{V_t(r_1)}{r_1^2 - r_0^2} \rho \Psi_0^+(\rho), \quad u_0^y(\rho) = \rho \frac{r_0^2 \sigma_0 \Psi_1^+(\rho) - r_1^2 \sigma_1 \Psi_0^+(\rho)}{k_0 (r_1^2 - r_0^2)},$$

$$u_0^\varepsilon(\rho) = \frac{V_\varepsilon(\rho)}{\rho} + \frac{V_\varepsilon(r_1)\rho\Psi_0^+(\rho)}{r_1^2 - r_0^2}, \quad V_t(\rho) = \int_{r_{p-1}}^{\rho} rc^*(r)\Phi(r) dr,$$

$$V_c^s(\rho) = \int_{r_0}^{\rho} r \frac{d}{dr} \left[ \frac{\mu(r)}{1 - 2v(t, r)} \right] u^s(r) dr, \quad V_\mu^s(\rho) = \int_{r_0}^{\rho} \frac{1}{r} \frac{d\mu(r)}{dr} u^s(r) dr,$$

$$d_1^s = V_c^s(r_1) - kr_1^2 V_\mu^s(r_1) + \gamma_1 r_1 u^s(r_1), \quad \gamma_0 = 2\mu(r_0)/k_0 - c(r_0),$$

$$\gamma_1 = 2\mu(r_1)/k_0 - c(r_1),$$

$$k_{01}(\rho) = \frac{1 - 2v(t, \rho)}{1 - v(t, \rho)}, \quad k_1(\rho) = \frac{1}{1 - v(t, \rho)},$$

$$\zeta(\rho) = \frac{E(t, \rho)}{1 - v(t, \rho)}, \quad \zeta^*(\rho) = \frac{E(t, \rho)}{1 - v^2(t, \rho)},$$

$$e^t(\rho) = -\frac{1}{\rho^2} V_t(\rho) + c^*(\rho)\Phi(\rho) + \frac{V_t(r_1)\Psi_0^-(\rho)}{r_1^2 - r_0^2},$$

$$e^y(\rho) = \frac{r_0^2 \sigma_0 \Psi_1^-(\rho) - r_1^2 \sigma_1 \Psi_0^-(\rho)}{k_0(r_1^2 - r_0^2)}, \quad e^\varepsilon(\rho) = -\frac{V_\varepsilon(\rho)}{\rho^2} + \lambda(\rho) + \frac{V_\varepsilon(r_1)\Psi_0^-(\rho)}{r_1^2 - r_0^2},$$

$$f_r^t(\rho) = -\frac{k_{01}(\rho)}{\rho^2} V_t(\rho) + \frac{V_t(r_1)\tilde{\Psi}_0^-(\rho)}{r_1^2 - r_0^2},$$

$$f_r^y(\rho) = \frac{r_0^2 \sigma_0 \tilde{\Psi}_1^-(\rho) - r_1^2 \sigma_1 \tilde{\Psi}_0^-(\rho)}{k_0(r_1^2 - r_0^2)},$$

$$f_r^\varepsilon(\rho) = -\frac{k_{01}(\rho)}{\rho^2} V_\varepsilon(\rho) + \frac{V_\varepsilon(r_1)\tilde{\Psi}_0^-(\rho)}{r_1^2 - r_0^2},$$

$$f_\varphi^t(\rho) = \frac{k_{01}(\rho)}{\rho^2} V_t(\rho) - k_{01}(\rho)c^*(\rho)\Phi(\rho) + \frac{V_t(r_1)\tilde{\Psi}_0^+(\rho)}{r_1^2 - r_0^2},$$

$$f_\varphi^\varepsilon(\rho) = \frac{k_{01}(\rho)}{\rho^2} V_\varepsilon(\rho) - k_{01}(\rho)\lambda(\rho) + \frac{V_\varepsilon(r_1)\tilde{\Psi}_0^+(\rho)}{r_1^2 - r_0^2},$$

$$f_\varphi^y(\rho) = \frac{r_0^2 \sigma_0 \tilde{\Psi}_1^+(\rho) - r_1^2 \sigma_1 \tilde{\Psi}_0^+(\rho)}{k_0(r_1^2 - r_0^2)},$$

$$A^s = \frac{V_s(r_1) + V_c^s(r_1) - kr_1^2 V_\mu^s(r_1) + \gamma_1 r_1 u^s(r_1) - \gamma_0 r_0 u^s(r_0)}{k(r_1^2 - r_0^2)},$$

$$V_y(\rho) = \frac{r_0^2 \sigma_0 - r_1^2 \sigma_1}{k_0},$$

$$\varepsilon_z^t = \frac{1}{d_\varepsilon} (\eta_t - 2\eta_\mu^t - A^t \eta_\nu), \quad \varepsilon_z^y = -\frac{1}{d_\varepsilon} (2\eta_\mu^y + A^y \eta_\nu),$$

$$d_\varepsilon = \eta - 2\eta_\mu^\varepsilon - A^\varepsilon \eta_\nu,$$



$$\eta_t = \int_{r_0}^{r_1} \rho \zeta(\rho) \Phi(\rho) d\rho, \quad \eta_\mu^s = \int_{r_0}^{r_1} \rho v^*(\rho) V_\mu^s(\rho) d\rho,$$

$$\eta_v = \int_{r_0}^{r_1} \rho v^*(\rho) d\rho, \quad \eta = \int_{r_0}^{r_1} \rho \zeta^*(\rho) d\rho;$$

– простори:

$$u^s(\rho) - \frac{1}{c(\rho)} \left[ \frac{V_c^s(\rho) - \gamma_0 r_0 u^s(r_0)}{\rho} + \rho V_\mu^s(\rho) - k \tilde{\beta}_u^{*s} \rho \psi_0^+(\rho) \right] = \frac{u_0^s(\rho)}{c(\rho)},$$

$$s = t, y,$$

$$\varepsilon_r^s(\rho) = e^s(\rho) + V_\mu^s(\rho) - k \tilde{\beta}_u^{*s} \psi_0^-(\rho) - \frac{V_c^s(\rho) - \gamma_0 r_0 u^s(r_0)}{\rho^2},$$

$$\sigma_r^s(\rho) = f_r^s(\rho) - \frac{k_{01}(\rho)}{\rho^2} [V_c^s(\rho) - \gamma_0 r_0 u^s(r_0)] + k_1(\rho) V_\mu^s(\rho) - k \tilde{\beta}_u^{*s} \tilde{\psi}_0^-(\rho),$$

$$\sigma_\varphi^s(\rho) = f_\varphi^s(\rho) + \frac{k_{01}(\rho)}{\rho^2} [V_c^s(\rho) - \gamma_0 r_0 u^s(r_0)] + k_1(\rho) V_\mu^s(\rho) - k \tilde{\beta}_u^{*s} \tilde{\psi}_0^+(\rho),$$

$$\sigma_z^t(\rho) = -\zeta(\rho) \Phi(\rho) + v^*(\rho) [-k \tilde{\beta}_u^{*t} + 2V_\mu^t(\rho)],$$

$$\sigma_z^y(\rho) = v^*(\rho) [-k \tilde{\beta}_u^{*y} + 2V_\mu^y(\rho)], \quad (20)$$

де

$$u_0^t(\rho) = \frac{1}{\rho} V_t(\rho), \quad u_0^y(\rho) = \frac{r_0^2 \sigma_0}{k_0 \rho}, \quad \tilde{\beta}_u^{*s} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{d\mu(r)}{dr} u^s(r) dr,$$

$$e^t(\rho) = -\frac{1}{\rho^2} V_t(\rho) + c^*(\rho) \Phi(\rho), \quad e^y(\rho) = -\frac{r_0^2 \sigma_0}{k_0 \rho^2},$$

$$f_r^t(\rho) = -\frac{k_{01}(\rho)}{\rho^2} V_t(\rho), \quad f_r^y(\rho) = -\frac{r_0^2 \sigma_0}{k_0 \rho^2} k_{01}(\rho),$$

$$f_\varphi^t(\rho) = k_{01}(\rho) \left\{ \frac{1}{\rho^2} V_t(\rho) - c^*(\rho) \Phi(\rho) \right\}, \quad \sigma_\varphi^y(\rho) = -\sigma_r^y(\rho).$$

Підставляючи  $r_0 = 0$  у формули для розглянутих порожнистих тіл, дістанемо відповідні формули для суцільних тіл. При цьому при  $\rho \rightarrow 0$ , тобто на їх осі, маємо

$$\frac{1}{\rho} V_{t1}(\rho) \rightarrow 0, \quad \frac{1}{\rho^2} V_{t1}(\rho) \rightarrow \frac{1}{2} c_1^*(0) \Phi_1(0), \quad \frac{1}{\rho} V_{c1}(\rho) \rightarrow 0,$$

$$\frac{1}{\rho^2} V_{c1}(\rho) \rightarrow 0, \quad V_{\mu 1}(\rho) \rightarrow 0, \quad \frac{1}{\rho} V_{\varepsilon 1}(\rho) \rightarrow 0, \quad \frac{1}{\rho^2} V_{\varepsilon 1}(\rho) \rightarrow \frac{1}{2} \lambda_1(0).$$

Зауважимо, що у випадку відповідних квазістатичних задач, час в отриманні співвідношення входить як параметр.

**Числові результати.** Досліджували за змінних і сталих ФМХ статичний термопружний стан порожнистого тришарового циліндра з закріпленими та вільними торцями, на внутрішній поверхні якого задано тепловий по-

тік  $q_0 = 6 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$ , навантаження  $\sigma_0 = 0.04947 \text{ ГПа}$ , а на зовнішній – температуру  $t_c = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  і навантаження  $\sigma_n = 0.02249 \text{ ГПа}$ . Залежності ФМХ першого і третього шарів брали у вигляді

$$\lambda_t^{(1)}(T_1) = (1.71 + 0.21 \cdot 10^{-3} T_1 + 0.116 \cdot 10^{-6} T_1^2) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})],$$

$$\alpha_t^{(1)}(T_1) = (13.3 \cdot 10^{-6} - 18.9 \cdot 10^{-9} T_1 + 12.7 \cdot 10^{-12} T_1^2) [\text{К}^{-1}],$$

$$E_1(T_1) = (132.2 - 50.3 \cdot 10^{-3} T_1 - 8.1 \cdot 10^{-6} T_1^2) [\text{ГПа}],$$

$$\lambda_t^{(3)}(T_3) = (14.3 + 0.014 T_3) [\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})],$$

$$\alpha_t^{(3)}(T_3) = (14.854 \cdot 10^{-6} + 0.0033 \cdot 10^{-6} T_3) [\text{К}^{-1}],$$

$$E_3(T_3) = (206.11 - 0.07 T_3) [\text{ГПа}],$$

а залежності ФМХ другого шару визначали на основі співвідношення [16]

$$p_2(T_2, \rho) = \frac{1}{2} [p_1(T_2) - p_3(T_2)] \cos\left(\pi \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\right) + \frac{1}{2} [p_1(T_2) + p_3(T_2)].$$

Тут  $p_1(T)$ ,  $p_3(T)$  – відповідні залежності першого і третього шарів;  $\lambda_t^{(i)}(T_i)$  – коефіцієнти теплопровідності;  $T_i = (t_i(\rho) + 273) \text{ }^\circ\text{C}$ .

Сталим ФМХ відповідали коефіцієнти Пуассона  $\nu_1 = 0.3$ ,  $\nu_2 = 0.23$ ,  $\nu_3 = 0.35$  (надалі комбінація  $I^\circ$  коефіцієнтів Пуассона) і такі середні значення наведених вище залежностей:

$$\lambda_t^{(1)} = \lambda_{s1} = 1.945 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{ }^\circ\text{C}), \quad \lambda_t^{(2)} = 13.18398 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{ }^\circ\text{C}),$$

$$\lambda_t^{(3)} = 24.42 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{ }^\circ\text{C}),$$

$$\alpha_t^{(1)} = \alpha_{s1} = 0.88457 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \quad \alpha_t^{(2)} = 1.30428 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1},$$

$$\alpha_t^{(3)} = 1.72399 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1},$$

$$E_1 = E_{s1} = 89.95874 \text{ ГПа}, \quad E_2 = 122.72937 \text{ ГПа}, \quad E_3 = 155.5 \text{ ГПа}.$$

Розподіли температур  $t_i(\rho)$  знаходили із системи інтегральних рівнянь [14]

$$\begin{aligned} t_3(\rho) &= t_c + t_s r_0 \int_{\rho}^{r_3} \frac{\lambda_{s1}}{\xi \lambda_t^{(3)}[t_3(\xi)]} d\xi, \\ t_2(\rho) &= t_3(r_2) + t_s r_0 \int_{\rho}^{r_2} \frac{\lambda_{s1}}{\xi \lambda_t^{(2)}[t_2(\xi), \xi]} d\xi, \\ t_1(\rho) &= t_2(r_1) + t_s r_0 \int_{\rho}^{r_1} \frac{\lambda_{s1}}{\xi \lambda_t^{(1)}[t_1(\xi)]} d\xi, \quad t_s = \frac{q_0 \ell}{\lambda_{s1}}, \end{aligned} \quad (21)$$

яку, як і системи (12) (з  $n = 3$ ), розв'язували методом послідовних наближень при  $r_0 = 0.8$ ,  $r_1 = 0.82$ ,  $r_2 = 0.9$ ,  $r_3 = 1$ ,  $\ell = 0.05 \text{ м}$ . За нульове наближення при розв'язуванні рівнянь (21) вибирали розв'язок задачі теплопровідності для тришарового циліндра зі сталими коефіцієнтами теплопровідності, а при розв'язуванні рівнянь (12) – праві частини відповідних рівнянь.

За сталих ФМХ у випадку закріплених торців ( $\varepsilon_z = 0$ ) у табл. 1 наведено значення на обмежувальних і серединних поверхнях шарів переміщення  $\tilde{u} = u/(\alpha_{s1}t_s)$ , деформації  $\tilde{\varepsilon}_r = \varepsilon_r/(\alpha_{s1}t_s)$  і напружень  $\tilde{\sigma}_j = \sigma_j/(E_{s1}\alpha_{s1}t_s)$ ,  $j = r, \varphi, z$ , зумовлених температурним полем, у табл. 2 – поверхневими навантаженнями, а у табл. 3 – третіх доданків у співвідношеннях (11), (14), (15) за одночасної дії теплового і поверхневого навантажень (випадок вільних торців). Тут для порівняння у других рядках (під рискою) подано результати обчислень, виконаних на основі точного розв’язку [11]. При цьому значення осрової деформації  $\varepsilon_z/(\alpha_{s1}t_s)$ , розрахованої на основі (16) і на основі точного розв’язку, становлять 0.0914444 і 0.0914443 відповідно. Це свідчить про високу точність визначення запропонованим методом величин, які характеризують термопружний стан.

Таблиця 1

$\rho$	$\tilde{u} \cdot 10$	$\tilde{\varepsilon}_r \cdot 10^2$	$\tilde{\sigma}_r \cdot 10^2$	$\tilde{\sigma}_\varphi \cdot 10$	$\tilde{\sigma}_z \cdot 10$
$r_0$	0.1370304 <u>0.1370305</u>	6.464131 <u>6.464130</u>	0.0 <u>0.0</u>	-0.3654808 <u>-0.3654807</u>	-0.4972408 <u>-0.4972408</u>
$\frac{r_0 + r_1}{2}$	0.1425442 <u>0.1425443</u>	4.5715737 <u>4.5715730</u>	-0.0360969 <u>-0.0360968</u>	-0.2198995 <u>-0.2198993</u>	-0.3552692 <u>-0.3552691</u>
$r_1 - 0$	0.1461890 <u>0.1461891</u>	2.7256009 <u>2.7256002</u>	-0.0537797 <u>-0.0537796</u>	-0.0779015 <u>-0.0779014</u>	-0.2150395 <u>-0.2150395</u>
$r_1 + 0$	0.1461890 <u>0.1461891</u>	3.909923 <u>3.909922</u>	-0.0537798 <u>-0.0537796</u>	-0.2413138 <u>-0.2413136</u>	-0.4390568 <u>-0.4390567</u>
$\frac{r_1 + r_2}{2}$	0.1590021 <u>0.1590022</u>	2.519231 <u>2.519230</u>	-0.1270620 <u>-0.1270616</u>	-0.0870617 <u>-0.0870615</u>	-0.2921329 <u>-0.2921392</u>
$r_2 - 0$	0.1665094 <u>0.1665095</u>	1.253597 <u>1.253597</u>	-0.1284402 <u>-0.1284398</u>	0.0533191 <u>0.0533193</u>	-0.1518898 <u>-0.1518898</u>
$r_2 + 0$	0.1665095 <u>0.1665095</u>	2.2012004 <u>2.2012001</u>	-0.1284405 <u>-0.1284398</u>	-0.0577990 <u>-0.0577988</u>	-0.2946906 <u>-0.2946905</u>
$\frac{r_2 + r_3}{2}$	0.1740122 <u>0.1740122</u>	0.8245205 <u>0.8245203</u>	-0.1048831 <u>-0.1048823</u>	0.1184741 <u>0.1184743</u>	-0.1160617 <u>-0.1160616</u>
$r_3$	0.1749795 <u>0.1749795</u>	-0.4170706 <u>-0.4170707</u>	0.0 <u>0.0</u>	0.2774502 <u>0.2774504</u>	0.0534025 <u>0.0534026</u>

Таблиця 2

$\rho$	$\tilde{u} \cdot 10^2$	$\tilde{\varepsilon}_r \cdot 10^2$	$\tilde{\sigma}_r \cdot 10^2$	$\tilde{\sigma}_\varphi \cdot 10^2$	$\tilde{\sigma}_z \cdot 10^2$
$r_0$	0.4845818 <u>0.4845822</u>	-0.5592011 <u>-0.5592013</u>	-0.4033127 <u>-0.4033127</u>	0.4927860 <u>0.4927865</u>	0.0268419 <u>0.0268421</u>
$\frac{r_0 + r_1}{2}$	0.4790617 <u>0.4790621</u>	-0.5449081 <u>-0.5449083</u>	-0.3923181 <u>-0.3923180</u>	0.4817913 <u>0.4817919</u>	0.0268419 <u>0.0268421</u>
$r_1 - 0$	0.4736819 <u>0.4736823</u>	-0.5311347 <u>-0.5311349</u>	-0.3817232 <u>-0.3817232</u>	0.4711965 <u>0.4711197</u>	0.0268419 <u>0.0268421</u>
$r_1 + 0$	0.4736819 <u>0.4736823</u>	-0.4139004 <u>-0.4139005</u>	-0.3817232 <u>-0.3817232</u>	0.7180916 <u>0.7180923</u>	0.0773647 <u>0.0773649</u>
$\frac{r_1 + r_2}{2}$	0.4580482 <u>0.4580486</u>	-0.3688538 <u>-0.3688539</u>	-0.3317587 <u>-0.3317586</u>	0.6681270 <u>0.6681277</u>	0.0773647 <u>0.0773649</u>
$r_2 - 0$	0.4440954 <u>0.4440958</u>	-0.3296789 <u>-0.3296790</u>	-0.2883068 <u>-0.2883067</u>	0.6246752 <u>0.6246759</u>	0.0773647 <u>0.0773649</u>
$r_2 + 0$	0.4440954 <u>0.4440958</u>	-0.3696206 <u>-0.3696208</u>	-0.2883069 <u>-0.2883067</u>	0.8167744 <u>0.8167753</u>	0.1849636 <u>0.1849639</u>
$\frac{r_2 + r_3}{2}$	0.4267500 <u>0.4267503</u>	-0.3253918 <u>-0.3253919</u>	-0.2316753 <u>-0.2316751</u>	0.7601428 <u>0.7601439</u>	0.1849636 <u>0.1849639</u>
$r_3$	0.4114487 <u>0.4114490</u>	-0.2876299 <u>-0.2876300</u>	-0.1833242 <u>-0.1833239</u>	0.7117917 <u>0.7117925</u>	0.1849636 <u>0.1849639</u>

Таблиця 3

$\rho$	$\tilde{u} \cdot 10$	$\tilde{\varepsilon}_r \cdot 10$	$\tilde{\sigma}_r \cdot 10^3$	$\tilde{\sigma}_\varphi \cdot 10$	$\tilde{\sigma}_z$
$r_0$	-0.22588481 -0.22588479	-0.2708948 -0.2708944	0.0 0.0	-0.0088162 -0.0088165	0.0911799 0.0911798
$\frac{r_0 + r_1}{2}$	-0.22859446 -0.22859445	-0.2710354 -0.2710351	-0.0108171 -0.0108174	-0.0087081 -0.0087083	0.0911799 0.0911798
$r_1 - 0$	-0.23130550 -0.23130548	-0.2711709 -0.2711706	-0.0212409 -0.0212416	-0.0086038 -0.0086041	0.0911799 0.0911798
$r_1 + 0$	-0.23130547 -0.23130548	-0.1890222 -0.1890220	-0.0212361 -0.0212416	-0.1034294 -0.1034298	0.1223724 0.1223723
$\frac{r_1 + r_2}{2}$	-0.23895293 -0.23895293	-0.1932498 -0.1932496	-0.4901579 -0.4901511	-0.0987403 -0.0987406	0.1223724 0.1223723
$r_2 - 0$	-0.24675812 -0.24675811	-0.1969264 -0.1969261	-0.8979445 -0.8979524	-0.0946624 -0.0946627	0.1223724 0.1223723
$r_2 + 0$	-0.24675812 -0.24675811	-0.3479965 -0.3479961	-0.8979451 -0.8979524	0.0855424 0.0855417	0.1607477 0.1607475
$\frac{r_2 + r_3}{2}$	-0.26406081 -0.26406079	-0.3442135 -0.3442131	-0.4135531 -0.4135634	0.0806985 0.0806978	0.1607477 0.1607475
$r_3$	-0.28118867 -0.28118862	-0.3409836 -0.3409832	0.0 0.0	0.0765628 0.0765622	0.1607477 0.1607475

Порівнювали також значення відносних переміщень, деформацій і напружень, обчислені на основі [12] і запропонованого методу при  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3$  (надалі комбінація 2° коефіцієнтів Пуассона) та наведених змінних ФМХ. Виявилось, що при семи наближеннях відповідні значення відрізнялися не більше ніж на  $10^{-5}$ . Зауважимо, що у випадку однакових сталих коефіцієнтів Пуассона та решти змінних ФМХ у [12] встановлено незалежність від осьової деформації радіальних і кільцевих напружень, а визначення термомпружного стану шаруватих циліндрів зведено до розв'язання систем інтегро-алгебричних рівнянь стосовно нормованих радіальних напружень.

Числові дані, отримані при комбінації 1° і такій комбінації 3°:  $\nu_1 = 0.3$ ,  $\nu_2 = 0.27$ ,  $\nu_3 = 0.33$ , коефіцієнтів Пуассона за одних і тих самих змінних інших ФМХ складових, засвідчили, що для досягнення тієї ж точності, що й у випадку комбінації 2°, необхідно відповідно 32 і 11 наближень. Найбільші різниці між максимальними значеннями переміщень, деформацій, радіальних, кільцевих і осьових напружень, які є у випадку комбінації 1° і комбінації 2° коефіцієнтів Пуассона, не перевищують відповідно 2, 9, 12, 20 і 3.7%. Зміну уздовж радіуса досліджуваних параметрів, зумовлену температурним полем у циліндрі з закріпленими торцями, для розглянутих трьох комбінацій 1°, 2°, 3° коефіцієнтів Пуассона характеризують відповідно криві 1, 2, 3 на рис. 1 – рис. 5. На цих же рисунках проілюстровано зумовлену температурним полем поведінку зазначених параметрів у циліндрі з вільними торцями для комбінації 1° коефіцієнтів Пуассона за змінних (штрихпунктирні лінії) і сталих (штрихові лінії) модулів пружності і температурних коефіцієнтів лінійного розширення. Бачимо, що в циліндрі з вільними торцями, на відміну від циліндра із закріпленими торцями, переміщення є від'ємними (рис. 1), тобто під дією температурного поля внутрішній і зовнішній діаметри розглядуваного порожнистого циліндра зменшуються, осьові напруження є розтягувальними (рис. 5). У випадку вільних і закріплених торців циліндра деформації радіальні і кільцеві напруження можуть відрізнятися більш ніж у два рази (рис. 2 – рис. 4). Врахування змінності ФМХ приводить, зокрема, до істотно іншого розподілу деформацій і кільцевих напружень у середньому шарі (рис. 2, рис. 4).

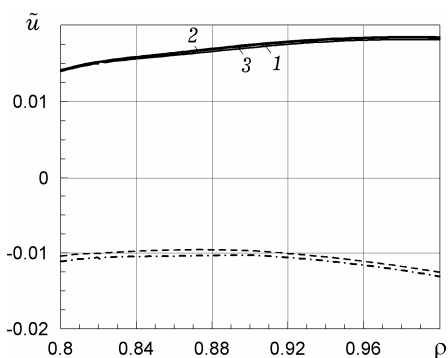


Рис. 1

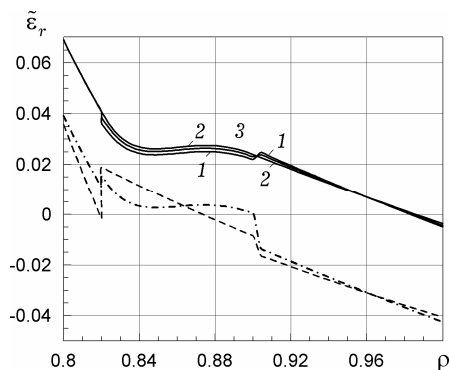


Рис. 2

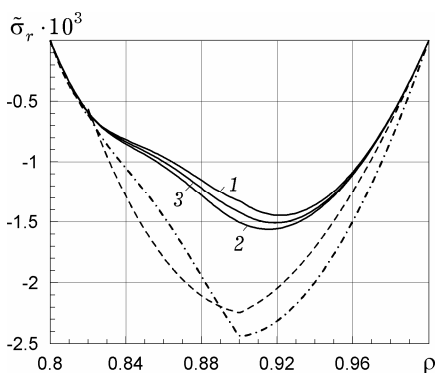


Рис. 3

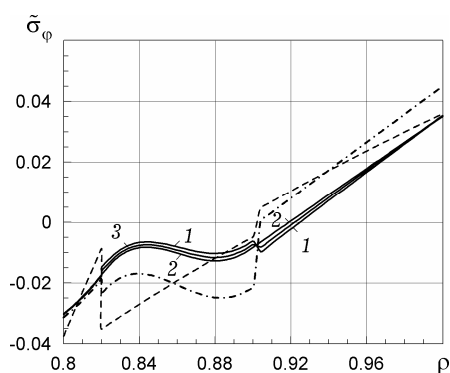


Рис. 4

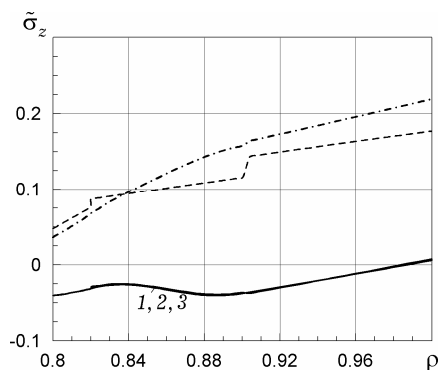


Рис. 5

**Висновки.** Визначення термопружного стану, зумовленого плоскими осесиметричними температурними полями та поверхневими навантаженнями в кусково-неоднорідних термочутливих ізотропних циліндричних тілах зведено до розв'язання відповідних систем інтегро-алгебричних рівнянь стосовно радіальних переміщень. Отримані при цьому співвідношення апробовано за змінних і сталих ФМХ на статичній задачі термопружності для порожнистого тришарового циліндра з закріпленими та вільними торцями. Показано високу точність визначення параметрів термопружного стану запропонованим методом та істотний вплив на їх термомеханічну поведінку урахування змінності ФМХ та умов на торцях.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки в рамках наукового проекту за спільним конкурсом НАН України і РФФД (№ держреєстрації 0112U005002).

1. Вігак В. М., Калиняк Б. М. Зведення одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних та термочутливих тіл до інтегральних рівнянь другого роду // Доп. НАН України. – 1998. – № 11. – С. 60–67.
2. Калиняк Б. М. Інтегрування рівнянь одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних циліндричних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 2. – С. 124–131.  
Te same: Kalynyak B. M. Integration of equations of one-dimensional problems of elasticity and thermoelasticity for inhomogeneous cylindrical bodies // J. Math. Sci. – 2000. – **99**, No. 5. – P. 1662–1670.
3. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
4. Кушнір Р. М., Попович В. С. Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Сполум, 2009. – 412 с. – (Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.)
5. Кушнір Р. М., Процюк Ю. Б. Термопружний стан шаруватих термочутливих тіл обертання за квадратичної залежності коефіцієнтів теплопровідності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 1. – С. 7–18.  
Te same: Kushnir R. M., Protsyuk Yu. B. Thermoelastic state of layered thermo-sensitive bodies of revolution for the quadratic dependence of the heat-conduction coefficients // Mater. Sci. – 2011. – **46**, No. 1. – P. 1–15.
6. Леонова Э. А. Температурные напряжения в круговом цилиндре с переменными термоупругими характеристиками // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1976. – № 1. – С. 161–166.
7. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. – Москва: Изд-во Моск. унта, 1976. – 367 с.
8. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
9. Постольник Ю. С., Огурцов А. П. Металургійна термомеханіка. – Дніпропетровськ: Системні технології, 2002. – 633 с.
10. Процюк Б. В. Визначення одновимірного термопружного стану шаруватих термочутливих тіл обертання з однаковими сталими коефіцієнтами Пуассона // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Під заг. ред. І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. – Львів: ІППММ НАН України, 2010. – С. 294–296.
11. Процюк Б. В. Застосування методу функцій Гріна до визначення термопружного стану шаруватих трансверсальноізотропних сферичних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 95–109.
12. Процюк Б. В. Квазістатичні задачі термопружності для кусково-неоднорідних термочутливих циліндричних тіл за однакових сталих коефіцієнтів Пуассона // Нестационарні процеси деформування елементів конструкцій, зумовлені дією полів різної фізичної природи / Під заг. ред. В. Д. Кубенка, Р. М. Кушніра, Д. В. Тарлаковського. – Львів: ІППММ НАН України, 2012. – С. 174–178.
13. Процюк Ю. Б. Осесиметричні задачі термопружності для шаруватих термочутливих циліндрів і куль за кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Під заг. ред. І. О. Луковського, Г. С. Кіта, Р. М. Кушніра. – Львів: ІППММ НАН України, 2010. – С. 297–299.
14. Процюк Ю. Б. Статичні задачі термопружності для шаруватих термочутливих плит за кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 4. – С. 151–161.  
Te same: Protsyuk Yu. B. Static thermoelasticity problems for layered thermo-sensitive plates with cubic dependence of the coefficients of heat conductivity on temperature // J. Math. Sci. – 2012. – **181**, No. 4. – P. 481–496.
15. Термопрочность деталей машин. Теория. Экспериментальные исследования. Расчет / Под ред. И. А. Биргера, Б. Ф. Шорра. – Москва: Машиностроение, 1975. – 455 с.
16. Ganczarski A., Skrzypek J. A study on coupled thermo-elasto-plastic-damage dissipative phenomena: models and application to some innovative materials // J. Therm. Stresses. – 2009. – **32**, No. 6-7. – P. 698–751.
17. Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M. R. Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads // Int. J. Pres. Ves. Pip. – 2002. – **79**, No. 7. – P. 493–497.

18. Kushnir R., Protsiuk B. A method of the Green's functions for quasistatic thermoelasticity problems in layered thermosensitive bodies under complex heat exchange // Oper. Theor. Adv. Appl.: Modern Anal. Appl. – 2009. – **191**. – P. 143–154.
19. Noda N. Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties // In: R. B. Hetnarski (ed.). Thermal Stresses I. – Amsterdam: Elsevier, 1986. – P. 391–483.
20. Obata Y., Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material // J. Therm. Stresses. – 1994. – **17**, No. 3. – P. 471–487.
21. Ootao Y. Transient thermoelastic analysis for a multilayered hollow cylinder with piecewise power law nonhomogeneity // J. Solid Mech. Mater. Eng. – 2010. – **4**, No. 8. – P. 1167–1177.
22. Tutuncu N., Temel B. A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres // Compos. Struct. – 2009. – **91**, No. 3. – P. 385–390.
23. Zhao J., Ai X., Li Y., Zhou Y. Thermal shock resistance of functionally gradient solid cylinders // Mater. Sci. Eng. **A**. – 2006. – **418**, No. 1-2. – P. 99–110.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНЫХ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ТЕЛ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗДЕЛА

Предложен метод определения термоупругого состояния, обусловленного плоскими осесимметричными температурными полями и поверхностными нагрузками, в слоистых изотропных телах с цилиндрическими поверхностями раздела с учетом зависимости от температуры и координаты модулей упругости, коэффициентов линейного расширения и коэффициентов Пуассона. Метод предполагает решение систем интегро-алгебраических уравнений относительно радиальных перемещений. Для цилиндра они получены из интегрального представления решения задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с обобщенными производными. При этом использована функция Грина задачи упругости для однородного цилиндра. Для слоистых пространства с цилиндрической полостью, сплошного цилиндра и пространства соответствующие системы и остальные необходимые соотношения для определения термоупругого состояния получены путем предельных переходов. Приведены соотношения для определения термонапряжений в соответствующих однослойных телах. Числовые исследования проведены для трехслойного цилиндра с функционально-градиентным слоем.

#### DETERMINATION OF THERMOELASTIC STATE OF PIECEWISE INHOMOGENEOUS THERMOSENSITIVE BODIES WITH CYLINDRICAL INTERFACE

The method for determination of the thermoelastic state caused by a plane one-dimensional temperature fields and surface loads in layered isotropic bodies with cylindrical interfaces is suggested. The temperature and coordinate dependences of the elastic modulus, coefficients of temperature linear expansion and Poisson coefficients are taken into account. The method involves solving the integro-algebraic equations for radial displacements. In the case of cylinder, the equations are obtained from the integral representation of a solution to the problem for an ordinary differential equation with generalized derivatives. The Green's function of elasticity problem for a homogeneous cylinder is used for that. For a layered space with a cylindrical hollow, a solid cylinder and a solid space, corresponding equations and the rest of the required relations for determination of the thermoelastic state are obtained by passage to the limits. The relations for determination of thermal stresses in the case of corresponding one-layer bodies are written. The numerical study is conducted for the three-layered cylinder with functionally graded layer.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
01.08.13