УДК 513.88

Ю. І. Оліяр, О. Г. Сторож

ПРОСТОРИ ГРАНИЧНИХ ЗНАЧЕНЬ І ДИСИПАТИВНІ РОЗШИРЕННЯ СИМЕТРИЧНИХ ВІДНОШЕНЬ

Для замкненого симетричного лінійного відношення L_0 з довільним індексом дефекту введено поняття граничної четвірки, за допомогою якої вдається записати абстрактний аналог формули інтегрування частинами, і доведено її існування. У випадку, коли це відношення має однакові дефектні числа, встановлено зв'язок між введеним об'єктом і відомим поняттям граничної трійки. У термінах граничних четвірок наведено опис максимально дисипативних і максимально акумулятивних розширень відношення L_0.

Основні поняття, постановка задачі та позначення. У цій статті роль вихідного об'єкта відіграє замкнене лінійне симетричне відношення L_0 у гільбертовому просторі H зі скалярним добутком $(\cdot|\cdot)$. Нагадаємо, що (замкненим) лінійним відношенням у H називають (замкнений) лінійний підпростір простору $H^2 \overset{\text{def}}{=} H \oplus H$. Теорія таких відношень започаткована у праці R. Arens [15]. Для кожного лінійного відношення $T \subset H^2$ існує спряжене відношення $T^* \subset H^2$, яке визначається так:

$$T^* = \hat{J}T^{\perp} \ (= (\hat{J}T)^{\perp}),$$

де

$$\forall (y, y') \in T \qquad \hat{J}(y, y') = (-iy', iy).$$

Тут « $\perp$ » – символ ортогонального доповнення в H^2.

Відношення T називають симетричним (самоспряженим), якщо $T \subset \subset T^*$ (відповідно $T = T^*$). Його називають дисипативним (акумулятивним), якщо $\forall (y, y') \in T \ \ \operatorname{Im}(y' \mid y) \ge 0 \ \ (\le 0)$, і максимально дисипативним (максимально акумулятивним), якщо, крім цього, воно не має нетривіальних дисипативних (акумулятивних) розширень в H^2.

Зазначимо, що започаткована у [15] теорія знайшла свій дальший розвиток у працях [2–4, 7, 8, 18–20] та ін. Зокрема, у [3] і [7] з використанням концепції лінійних відношень дано опис максимально дисипативних розширень (щільно визначеного) симетричного оператора з однаковими дефектними числами. (Важливість вивчення максимально дисипативних операторів зумовлена хоча б тим, що замкнений щільно визначений оператор A є максимально дисипативним тоді й тільки тоді, коли iA є генератором сильно неперервної півгрупи стисків.)

У праці [8] встановлено загальний вигляд максимально дисипативного розширення – відношення скінченновимірного звуження щільно визначеного симетричного оператора L_0 з однаковими дефектними числами (в теорії лінійних відношень оператор ототожнюють з його графіком). У роботі одного з авторів [14] деякі з результатів, викладені у [8], поширено на випадок, коли L_0 має довільний індекс дефекту. Лінійні відношення, породжені різними диференціальними рівняннями (виразами), були об'єктами дослідження, наприклад, у [16, 17] та [20].

Метою цієї праці є встановлення загального вигляду максимально дисипативного (та максимально акумулятивного) розширення відношення L_0, про яке йшла мова на початку статті.

Систематично використовуємо такі загальноприйняті позначення:

$D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ − відповідно область визначення, область значень та многовид нулів лінійного оператора T; T^* − спряжений оператор;

$B(X,Y)$ − множина всіх лінійних неперервних операторів T, що діють з гільбертового простору X у гільбертів простір Y, таких, що $D(T) = X$; $B(X) \stackrel{\text{def}}{=} B(X,X)$;

$(\cdot|\cdot)_X$, $\|\cdot\|_X$ та 1_X − символи скалярного добутку норми та тотожного перетворення простору X відповідно;

$T \downarrow E$ − звуження оператора T на множину E;

$\overline{E}$ − замикання множини E;

$\oplus$ і Θ − символи ортогональної суми та ортогонального доповнення відповідно;

якщо $A_1,\dots,A_n$ − лінійні оператори $X \to Y_i$, $i = 1,\dots,n$, то запис $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ означає, що $\forall x \in X\ Ax = (A_1x,\dots,A_nx)$.

Крім цього, використовуємо такі специфічні позначення:

$L = L_0^*$, де L_0 − описаний вище вихідний об'єкт;

$\hat{H}_L = L \Theta L_0$;

$H_L^{\pm} = \ker(L \mp i1_H)$ $(= \{y \in H : (y, \pm iy) \in L\})$;

$\hat{H}_L^{\pm} = \{(y, \pm iy) \in H^2 : y \in H_L^{\pm}\}$, $\quad m^{\pm} = \dim H_L^{\pm}$ $(= \dim \hat{H}_L^{\pm})$.

Через $\hat{P}_L$ позначаємо ортопроектор $L \to \hat{H}_L$, через $\hat{P}_L^{\pm}$ − ортопроектор $L \to \hat{H}_L^{\pm}$, а через $\hat{P}^{\pm}$ − ортопроектор $\hat{H}_L \to \hat{H}_L^{\pm}$. Відомо [18], що $\hat{H}_L = \hat{H}_L^+ \oplus \hat{H}_L^-$, тобто

$$L = L_0 \oplus \hat{H}_L^+ \oplus \hat{H}_L^- \ (= L_0 \oplus \hat{H}_L), \tag{1}$$

а отже,

$$\hat{P}_L^{\pm} = \hat{P}^{\pm}\hat{P}_L, \qquad \hat{P}^+ + \hat{P}^- = 1_{\hat{H}_L}, \qquad \hat{P}^+ - \hat{P}^- = \begin{pmatrix} 1_{\hat{H}_L^+} & 0 \\ 0 & -1_{\hat{H}_L^-} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

1. Гранична четвірка.

Означення 1. Нехай G − (допоміжний) гільбертів простір, а $U \in B(L,G)$. Пару (G,U) називають *крайовою* для (L, L_0), якщо

$$\ker U = L_0, \qquad R(U) = G.$$

У цьому випадку кажуть, що G − *крайовий* простір для (L, L_0).

Означення 2. Нехай $\mathcal{H}$ − (допоміжний) гільбертів простір, а $\Gamma_1, \Gamma_2 \in B(L,\mathcal{H})$. Трійку $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ називають *граничною трійкою* для відношення L_0, якщо

а) $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \Gamma_1 \oplus \Gamma_2)$ − крайова пара для (L, L_0);

б) $\forall \hat{y} = (y, y') \in L$, $\forall \hat{z} = (z, z') \in L$ $\qquad (y' \,|\, z) - (y \,|\, z') \equiv$

$$\equiv (i\hat{J}\hat{y} \,|\, \hat{z})_{H^2} = (\Gamma_1\hat{y} \,|\, \Gamma_2\hat{z})_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2\hat{y} \,|\, \Gamma_1\hat{z})_{\mathcal{H}}. \tag{3}$$

Іншими словами,

$$(\forall \hat{y} \in L) \ \ (\forall \hat{z} \in L) \qquad (i\hat{J}\hat{y} \,|\, \hat{z})_{H^2} = (iJ\Gamma y \,|\, \Gamma z)_{\mathcal{H}^2}, \tag{4}$$

де $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, а

$$J = \begin{pmatrix} 0 & i1_{\mathcal{H}} \\ -i1_{\mathcal{H}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Поняття граничної трійки (простору граничних значень) у випадку, коли L_0 − (щільно визначений) симетричний оператор, введено у [3, 7] (див. також [4]), а у випадку, коли L_0 − (не щільно визначений) ермітів оператор, введено в [11] (нагадаємо, що в теорії лінійних відношень оператор ототожнюють з його графіком). Дальшого розвитку концепція граничної трійки набула у працях багатьох математиків (див., наприклад, [2] і [20]). Зокрема, показано, що, якщо L_0 має однакові дефектні числа $(m_+ = m_-)$, то гранична трійка існує.

Означення 3. Нехай G^+, G^- − (допоміжні) гільбертові простори, $\delta_\pm \in B(L, G^\pm)$, $G \overset{\text{def}}{=} G^+ \oplus G^-$, $\delta \overset{\text{def}}{=} \delta_+ \oplus \delta_-$. Набір $(G^+, G^-, \delta_+, \delta_-)$ назвемо *граничною четвіркою* для відношення L_0, якщо

а) $\dim G^\pm = m^\pm$;

б) $\ker\delta = L_0$;

в) $R(\delta) = G$;

г) $$(\forall \hat{y} \in L) \quad (\forall \hat{z} \in L) \quad (i\hat{J}\hat{y} \,|\, \hat{z})_{H^2} = i[(\delta_+\hat{y}\,\delta_+\hat{z})_{G^+} - (\delta_-\hat{y} \,|\, \delta_-\hat{z})_{G^-}]. \tag{6}$$

Зрозуміло, що (G, δ) є крайовою парою для (L, L_0) і

$$(\forall \hat{y} \in L) \quad (\forall \hat{z} \in L) \quad (i\hat{J}\hat{y} \,|\, \hat{z})_{H^2} = (i\mathcal{J}\delta\hat{y} \,|\, \delta\hat{z})_G, \tag{7}$$

де

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1_{G^+} & 0 \\ 0 & -1_{G^-} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Теорема 1. *Нехай* G − *крайовий простір для* (L, L_0) (*тобто* $\dim G = \dim(L \ominus L_0)$). *Тоді існують ортогональний розклад* $G = G^+ \oplus G^-$ *та оператори* $\delta_\pm \in B(L, G^\pm)$ *такі, що* $(G^+, G^-, \delta_+, \delta_-)$ *є граничною четвіркою для* L_0.

Д о в е д е н н я. Оскільки $\dim G = \dim \hat{H}_L$, то існує унітарний оператор $E_L : \hat{H}_L \to G$. Приймемо $G^\pm \overset{\text{def}}{=} E_L \hat{H}_L^\pm$, $\delta_\pm \overset{\text{def}}{=} E_L \hat{P}_L^\pm$. Зрозуміло, що вимоги ***а***), ***б***), ***в***) з означення 3 справджуються.

Далі, для будь-яких $\hat{y} \in L$, $\hat{z} \in L$ існують $y_0 \in L_0$, $z_0 \in L_0$ такі, що $\hat{y} = y_0 + \hat{P}_L\hat{y}$, $\hat{z} = z_0 + \hat{P}_L\hat{z}$, тому

$$(i\hat{J}\hat{y} \,|\, \hat{z})_2 = (i\hat{J}(y_0 + \hat{P}_L\hat{y}) \,|\, z_0 + \hat{P}_L\hat{z})_2 =$$
$$= i[(\hat{J}y_0 \,|\, z_0)_2 + (\hat{J}y_0 \,|\, \hat{P}_L\hat{z})_2 + (\hat{J}\hat{P}_L\hat{y} \,|\, z_0)_2 + (\hat{J}\hat{P}_L\hat{y} \,|\, \hat{P}_L\hat{z})_2]$$

(тут і надалі $(\cdot|\cdot)_2 \equiv (\cdot|\cdot)_{H^2}$). Але $\hat{J}\hat{P}_L\hat{y} \in J\hat{H}_L = \hat{H}_L$, $z_0 \in L_0$, а $\hat{H}_L \perp L_0$, тому $(\hat{J}\hat{P}_L\hat{y} \,|\, z_0)_2 = 0$. Аналогічно отримуємо, що $(\hat{J}y_0 \,|\, \hat{P}_L\hat{z})_2 = (y_0 \,|\, \hat{P}_L\hat{z})_2 = 0$. Крім цього, $(\hat{J}y_0 \,|\, z_0)_2 = 0$, оскільки $\hat{J}y_0 \in \hat{J}L_0 \subset \hat{J}L$, $z_0 \in L_0 = L^* = (\hat{J}L)^\perp$. Тому

$$(i\hat{J}\hat{y} \,|\, \hat{z})_2 = (i\hat{J}\hat{P}_L\hat{y} \,|\, \hat{P}_L\hat{z})_2. \tag{9}$$

Введемо позначення:

$$\hat{P}_L\hat{y} = \hat{u}, \qquad \hat{P}^\pm\hat{u} = \hat{u}_\pm \ (= (u_\pm, iu_\pm), \quad u_\pm \in H_L^\pm),$$
$$\hat{P}_L\hat{z} = \hat{v}, \qquad \hat{P}^\pm\hat{v} = \hat{v}_\pm \ (= (v_\pm, iv_\pm), \quad v_\pm \in H_L^\pm).$$

Враховуючи (2), (9) і наведені позначення, отримуємо

$$(i\hat{J}\hat{y} \mid \hat{z})_2 = (i\hat{J}\hat{u} \mid \hat{v})_2 = \big(i\hat{J}(\hat{u}_+ + \hat{u}_-) \mid \hat{v}_+ + \hat{v}_-\big) =$$

$$= \big(i\hat{J}((u_+, iu_+) + (u_-, -iu_-)) \mid (v_+, iv_+) + (v_-, -iv_-)\big)_2 =$$

$$= \big(i\hat{J}(u_+ + u_-, i(u_+ - u_-)) \mid (v_+ + v_-, i(v_+ - v_-))\big)_2 =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 & 1_H \\ -1_H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_+ + u_- \\ i(u_+ - u_-) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} v_+ + v_- \\ i(v_+ - v_-) \end{pmatrix} \right)_2 =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} i(u_+ - u_-) \\ -(u_+ + u_-) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} v_+ + v_- \\ i(v_+ - v_-) \end{pmatrix} \right)_2 =$$

$$= i\,[(u_+ - u_- \mid v_+ + v_-) + (u_+ + u_- \mid v_+ - v_-)] =$$

$$= i\,[(u_+ \mid v_+) - (u_- \mid v_+) + (u_+ \mid v_-) - (u_- \mid v_-) +$$

$$+ (u_+ \mid v_+) + (u_- \mid v_+) - (u_+ \mid v_-) - (u_- \mid v_-)] =$$

$$= i\,[(u_+ \mid v_+) - (u_- \mid v_-) + (iu_+ \mid iv_+) - (-iu_- \mid -iv_-)] =$$

$$= i\,[((u_+, iu_+) \mid (v_+, iv_+))_2 - ((u_-, -iu_-) \mid (v_-, -iv_-))_2] =$$

$$= i[(\hat{u}_+ \mid \hat{v}_+)_2 - (\hat{u}_- \mid \hat{v}_-)_2] = i[(\hat{P}^+\hat{P}_L\hat{y} \mid \hat{P}^+\hat{P}_L\hat{z})_2 -$$

$$-(\hat{P}^-\hat{P}_L\hat{y} \mid (\hat{P}^-\hat{P}_L\hat{z})_2] = i[(\hat{P}_L\hat{y} \mid \hat{P}_L\hat{z})_{\hat{H}_L^+} - (\hat{P}_L\hat{y} \mid \hat{P}_L\hat{z})_{\hat{H}_L^-}] =$$

$$= i[(E_L\hat{P}_L^+ y \mid E_L\hat{P}_L^+ z)_{G^+} - (E_L\hat{P}_L^- y \mid E_L\hat{P}_L^- z)_{G^-}] =$$

$$= i[(\delta_+ y \mid \delta_+ z)_{G^+} - (\delta_- y \mid \delta_- z)_{G^-}]\,.$$

Наслідок 1. *Якщо* L_0 *має однакові дефектні числа* $(m^+ = m^- \overset{\text{def}}{=} m)$, *а* $\dim \mathcal{H} = m$, *то існують* Δ_1, $\Delta_2 \in B(L, \mathcal{H})$ *такі, що* $(\mathcal{H}, \mathcal{H}, \Delta_1, \Delta_2)$ *− гранична четвірка для* L_0, *зокрема, для всіх* $\hat{y} \in L$, $\hat{z} \in L$ *виконується*

$$(i\hat{J}y \mid z)_2 = i\,[(\Delta_1 y \mid \Delta_1 z)_{\mathcal{H}} - (\Delta_2 y \mid \Delta_2 z)_{\mathcal{H}}] = (i\mathcal{J}\Delta y \mid \Delta z)_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}\,, \qquad (10)$$

де $\Delta = \Delta_1 \oplus \Delta_2$, *а* $\mathcal{J}$ *означено згідно з* (8) (*при* $G^+ = G^- = \mathcal{H}$).

Д о в е д е н н я. Нехай $(G^+, G^-, \delta_+, \delta_-)$ − гранична четвірка для L_0. Оскільки $\dim G^\pm = \dim \mathcal{H} = m$, то існують унітарні оператори $E^\pm : G^\pm \to \mathcal{H}$. Зрозуміло, що $(\mathcal{H}, \mathcal{H}, \Delta_1, \Delta_2)$ (тут $\Delta_1 = E^+\delta_+$, $\Delta_2 = E^-\delta_-$) − гранична четвірка для L_0. ♦

Твердження 1. *Нехай* (G, Λ) *− крайова пара для* (L, L_0). *Тоді існує єдиний оператор* $E \in B(G)$ *такий, що* $E^{-1} \in B(G)$ *і*

$$(\forall \hat{y} \in L) \quad (\forall \hat{z} \in L) \qquad (i\hat{J}\hat{y} \mid \hat{z})_2 = (E\Lambda\hat{y} \mid \Lambda\hat{z})_G\,, \qquad (11)$$

$$E^* = -E\,. \qquad (12)$$

Співвідношення (11) *рівносильне кожному з таких*:

$$\Lambda\hat{J}\Lambda^* = iE^{-1}, \qquad (13)$$

$$\Lambda^* E\Lambda \downarrow \hat{H}_L = i\hat{J} \downarrow \hat{H}_L\,. \qquad (14)$$

Д о в е д е н н я аналогічне до доведення наслідку 2.4 з праці [13]. ♦

Зауваження 1. Припустимо, що L_0 має однакові дефектні числа ($m^+ = m^- \overset{\text{def}}{=} m$), а $\dim\mathcal{H} = m$, $\Gamma_i, \Delta_i \in B(L,\mathcal{H})$, $i = 1,2$, $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, $\Delta = \Delta_1 \oplus \Delta_2$, $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \Gamma)$, $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \Delta)$ − крайові пари для (L, L_0), операторні матриці J та $\mathcal{J}$ означені згідно з (5) та (8) (при $G^+ = G^- = \mathcal{H}$) відповідно, а

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} & 1_{\mathcal{H}} \\ -i1_{\mathcal{H}} & i1_{\mathcal{H}} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Безпосередні обчислення показують, що

а) $E_0^{-1} = E_0^*$ (тобто E_0 − унітарний оператор);

б) $\mathcal{J}^* = \mathcal{J}^- = \mathcal{J}, \qquad J^* = J^{-1} = J$; $\qquad$ (16)

в) $\mathcal{J} = E_0^* J E_0, \qquad J = E_0 \mathcal{J} E_0^*$. $\qquad$ (17)

Далі, використовуючи твердження 1 і рівність (16), бачимо, що

$$(4) \;\Leftrightarrow\; \Gamma\hat{J}\Gamma^* = J \;\Leftrightarrow\; \Gamma^* J \Gamma \downarrow \hat{H}_L = \hat{J} \downarrow \hat{H}_L, \tag{18}$$

$$(10) \;\Leftrightarrow\; \Delta\hat{J}\Delta^* = \mathcal{J} \;\Leftrightarrow\; \Delta^* \mathcal{J} \Delta \downarrow \hat{H}_L = \hat{J} \downarrow \hat{H}_L. \tag{19}$$

Наслідок 2. *В умовах зауваження* 1 *виконуються такі твердження*:

1°. *Якщо* $\Gamma = E_0\Delta$ (*див.* (15)), *то* $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ *є граничною трійкою для* L_0 *тоді й тільки тоді, коли* $(\mathcal{H}, \mathcal{H}, \Delta_1, \Delta_2)$ *є граничною четвіркою цього відношення.*

2°. *Якщо* $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ − *гранична трійка для* L_0, $(\mathcal{H}, \mathcal{H}, \Delta_1, \Delta_2)$ − *гранична четвірка цього відношення,* $\Lambda_1, \Lambda_2 \in B(L,\mathcal{H})$, $\Lambda = A\Gamma = B\Delta$, *де* $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$, A, A^{-1}, B, $B^{-1} \in B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$, *то*

а) $(\mathcal{H}, \Lambda_1, \Lambda_2)$ *є граничною трійкою для* L_0 *тоді й тільки тоді, коли* $AJA^* = J$;

б) $(\mathcal{H}, \mathcal{H}, \Lambda_1, \Lambda_2)$ *є граничною четвіркою для* L_0 *тоді й тільки тоді, коли* $B\mathcal{J}B^* = J$.

Д о в е д е н н я. Дійсно, враховуючи (15)−(17) та оборотність операторів E_0, A, B, отримуємо

$$\Delta\hat{J}\Delta^* = \mathcal{J} \;\Leftrightarrow\; E_0\Delta\hat{J}\Delta^* E_0^* = E_0\mathcal{J}E_0^* \;\Leftrightarrow\; \Gamma\hat{J}\Gamma^* = J,$$

$$\Lambda\hat{J}\Lambda^* = J \;\Leftrightarrow\; A\Gamma\hat{J}\Gamma^* A^* = J \;\Leftrightarrow\; AJA^* = J \qquad \text{(див. (18))},$$

$$\Lambda\hat{J}\Lambda^* = \mathcal{J} \;\Leftrightarrow\; B\Delta\hat{J}\Delta^* B^* = \mathcal{J} \;\Leftrightarrow\; BJB^* = \mathcal{J} \qquad \text{(див. (19))}. \qquad \blacklozenge$$

Зауваження 2. Неважко зміркувати, що, якщо L_0 має довільні дефектні числа, а $(G^+, G^-, \delta_+, \delta_-)$ − гранична четвірка для L_0, то

$$(7) \;\Leftrightarrow\; \delta\hat{J}\delta^* = \mathcal{J} \;\Leftrightarrow\; \delta^* \mathcal{J} \delta \downarrow \hat{H}_L = J \downarrow \hat{H}_L, \tag{20}$$

де $G = G^+ \oplus G^-$, $\delta = \delta_+ \oplus \delta_-$, а $\mathcal{J}$ означено згідно з (8).

2. Дисипативні відношення і простори з індефінітною метрикою. Надалі скрізь вважаємо, що L_1 − замкнене власне розширення відношення L_0, тобто $L_0 \subset L_1 = \overline{L}_1 \subset L_0^* = L$, а G, Λ, E такі, як вище (див. зауваження 1, 2 та наслідок 2). Покладемо $\mathcal{R} \overset{\text{def}}{=} iE^{-1}$ і означимо підпростори X_1, X_2, Y_1, Y_2

за допомогою співвідношень

$$X_1 = L_1 \ominus L_0, \quad X_2 = L \ominus L_1,$$

$$Y_1 = L_1^* \ominus L_0, \quad Y_2 = L \ominus L_1^*. \tag{21}$$

З теореми 1 праці [14] випливає, що

$$X_1 = \hat{J} Y_2, \quad X_2 = \hat{J} Y_1, \quad Y_1 = \hat{J} X_2, \quad Y_2 = \hat{J} X_1. \tag{22}$$

Застосовуючи лему про трійку (див. [6, с. 262; 10, с. 23]) отримуємо, що існують ортогональний розклад $G = G_1 \oplus G_2$ та оператори $U_1 \in B(L, G_1)$, $V_1 \in B(L, G_2)$, $A_1 \in B(G, G_1)$, $B_1 \in B(G, G_2)$ такі, що

$$U_1 = A_1 \Lambda, \qquad V_1 = B_1 \Lambda, \tag{23}$$

$$L_1 = \ker U_1 \;\; (= \ker A_1 \Lambda), \qquad L_1^* = \ker V_1 \;\; (= \ker B_1 \Lambda). \tag{24}$$

Далі без особливих роз'яснень використовуємо основні положення теорії просторів з індефінітною метрикою (перш за все, просторів Крейна та Понтрягіна) (деталі див. [1, 9, 21]).

Зауваження 3. З (12) випливає, що $(G, -iE)$ та $(G, \mathcal{R})$ – простори з регулярною індефінітною метрикою, а з теореми 1 праці [14] – що $(\hat{H}_L, \hat{J} \downarrow \hat{H}_L)$ – простір Крейна.

Лема 1. ***1°***. *Відношення L_1 є максимально дисипативним (максимаьно акумулятивним) тоді й тільки тоді, коли $\overline{R(A_1^*)}$ – максимально недодатний (максимально невід'ємний) лінеал в $(G, \mathcal{R})$.*

2°. *Відношення L_1^* є акумулятивним (дисипативним) тоді й тільки тоді, коли $R(A_1^*)$, а отже, й $\overline{R(A_1^*)}$ – недодатний (невід'ємний) лінеал в $(G, \mathcal{R})$, тобто*

$$A_1 \mathcal{R} A_1^* \le 0, \tag{25}$$

відповідно

$$A_1 \mathcal{R} A_1^* \ge 0. \tag{26}$$

3°. *Якщо $m^- < \infty$, то L_1 є максимально дисипативним (максимально акумулятивним) тоді й тільки тоді, коли справджується* (25) *і* $\dim R(A_1) = m^-$ (*відповідно, справджується* (26) *і* $\dim \ker A_1 = m^-$).

4°. *Якщо $m^+ < \infty$, то L_1 є максимально дисипативним (максимально акумулятивним) тоді й тільки тоді, коли справджується* (25) *і* $\dim \ker A_1 = m^+$ (*відповідно, справджується* (26) *і* $\dim R(A_1) = m^+$).

Д о в е д е н н я. Очевидно, що L_1^* є (максимально) акумулятивним відношенням тоді й тільки тоді, коли L_1^* є (максимально) недодатним лінеалом в $(\hat{H}_L, \hat{J})$. Але (див. (9)) $(\forall \hat{y} \in L)$ $(\hat{J}\hat{y} \mid \hat{y})_2 = (\hat{J}\hat{P}_L \hat{y} \mid \hat{P}_L \hat{y})_2$, тому (див. (21)) (максимальна) акумулятивність відношення L_1^* рівносильна (максимальній) недодатності лінеала $\hat{H}_L \cap L_L^*$ в $(\hat{H}_L, \hat{J} \downarrow \hat{H}_L)$. Оскільки $\hat{J} Y_1 = X_2$ (див., наприклад, [14]), а $\hat{J}$ – унітарний оператор, то L_1^* – (максимально) акумулятивне відношення тоді й тільки тоді, коли $X_2 = L \ominus \ker U_1 = \overline{R(U_1^*)} = \Lambda^* \overline{R(A_1^*)}$ – (максимально) недодатний лінеал в $(\hat{H}_L, \hat{J} \downarrow \hat{H}_L)$.

Беручи до уваги рівність $\Lambda\hat{J}\Lambda^* = \mathcal{R}$ (див. (13)) і враховуючи, що у просторі з регулярною індефінітною метрикою недодатність лінеала рівносильна недодатності його замикання, переконуємось у правильності твердження ***2°***, а враховуючи, що максимальна дисипативність відношення L_1 еквівалентна максимальній акумулятивності відношення L_1^*, і в правильності твердження ***1°***.

Перш ніж переходити до доведення тверджень ***3°***, ***4°***, зазначимо, що

$$\hat{J} \downarrow \hat{H}_L = \begin{pmatrix} 1_{\hat{H}_L^+} & 0 \\ 0 & -1_{\hat{H}_L^-} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{J}_0 . \tag{27}$$

Дійсно, нехай $\hat{u} \in \hat{H}_L$, $\hat{P}^+\hat{u} = (u_+, iu_+)$, $\hat{P}^-\hat{u} = (u_-, iu_-)$. Тоді

$$\hat{J}\hat{u} = \hat{J}((u_+, iu_+) + (u_-, -iu_-)) = \begin{pmatrix} 0 & -i1_H \\ i1_H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_+ + u_- \\ i(u_+ - u_-) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_+ - u_- \\ iu_+ + iu_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_+ \\ iu_+ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_- \\ -iu_- \end{pmatrix} = \hat{u}^+ - \hat{u}^- = \hat{P}^+\hat{u}^+ - \hat{P}^-\hat{u}^- .$$

Отже, співвідношення (27) доведено.

Припустимо, що $m^- < \infty$. З (27) випливає, що $(\hat{H}_L, \hat{J} \downarrow \hat{H}_L)$ − простір Понтрягіна. Тому (див. [1, 9, 21]) кожний замкнений недодатний (невід'ємний) лінеал $X \subset \hat{H}_L$ є максимальним тоді й тільки тоді, коли $\dim X = m^-$ (відповідно $\dim(\hat{H}_L \Theta X) = m^-$). Але зі співвідношень (21) і з ін'єктивності оператора Λ^* випливає, що

$$\dim X_1 = \dim \ker A_1, \qquad \dim X_2 = \dim \overline{R(A_1^*)} . \tag{28}$$

Оскільки $\dim \overline{R(A_1^*)} = m^- \Leftrightarrow \dim R(A_1^*) = m^- \Leftrightarrow \dim R(A_1) = m^-$, а X_1 є максимально невід'ємним тоді й тільки тоді, коли L_1 − максимально дисипативне відношення, то з (28) випливає ***3°***.

Доведення твердження ***4°*** аналогічне. ♦

Наслідок 3. *Якщо* L_1 − *максимально дисипативне* (*максимально акумулятивне*) *відношення*, $U_1, V_1 \in B(L, G) \equiv B(L, G_1 \oplus G_2)$, $R(U_1) = G_1, R(V_1) = G_2$, $L_1 = \ker U_1$, $L_1^* = \ker V_1$, а $m^\pm < \infty$, *то*

$$\dim G_1 = m^-, \qquad \dim G_2 = m^+, \tag{29}$$

відповідно

$$\dim G_1 = m^+, \qquad \dim G_2 = m^-. \tag{30}$$

Д о в е д е н н я проводиться за схемою, запропонованою у [10] і [13], при цьому суттєво застосовуються результати праць [1, 9, 21] (див. також [5, 6]). ♦

3. Максимально дисипативні розширення відношення L_0.

Теорема 2. *Нехай відношення* L_1 *означено згідно з* (24), *а оператор* E, *який фігурує у твердженні 1, є унітарним. Тоді*

1°. *Існує єдиний розклад* $G = G^+ \oplus G^-$ *такий, що*

$$-iE = P_+ - P_- , \tag{31}$$

де $P_\pm$ − *ортопроектор* $G \to G^+$.

2°. *Нехай* $\Lambda_\pm = P_\pm \Lambda$, $A_1^\pm = A_1 \downarrow G^\pm$. *Такі твердження еквівалентні:*

а) L_1 *− максимально дисипативне відношення*;

б) $$-iA_1 E A_1^* \le 0, \tag{32}$$

$$\ker A_1^- = \{0\}; \tag{33}$$

в) *існує* $K \in B(G^+, G^-)$ *таке, що* $\|K\| \le 1$ *і*

$$L_1 = \{y \in L : \Lambda_- y = K \Lambda_+ y\}. \tag{34}$$

У випадку, коли $R(A_1) = G_1$, *умова* (33) *може бути замінена сильнішою:* $(A_1^-)^{-1} \in B(G_1, G^-)$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $-iE$ − самоспряжений (див. (12)) і унітарний одночасно, то твердження ***1°*** виконується ($P_\pm$ однозначно виражається із системи рівнянь $P_+ + P_- = 1_G$, $P_+ - P_- = iE$).

Перейдемо до доведення твердження **2°**, зауваживши попередньо, що в розглядуваній ситуації $\mathcal{R} = (-iE)^{-1} = (-iE)^* = iE^* = -iE$, а отже, нерівності (25) і (32) еквівалентні. Більше того, очевидно, що нерівність (32) рівносильна нерівності

$$A_1^+ (A_1^+)^* \le A_1^- (A_1^-)^*. \tag{35}$$

б) $\Rightarrow$ ***в***). Нехай справджується (32), а отже, й (35). Застосовуючи цитовану вище лему про трійку ([6, с. 262, 10, с. 23]) бачимо, що існує стиск $K \in B(G^+, G^-)$ такий, що $A_1^+ = -A_1^- K$, а отже, $U_1 = A_1 \Lambda = A_1^+ \Lambda_+ + A_1^- \Lambda_- = A_1^- (\Lambda_1 - K \Lambda_+)$.

Враховуючи (33), переконуємось у правильності імплікації ***б***) $\Rightarrow$ ***в***).

в) $\Rightarrow$ ***б***). Припустимо, що справджується твердження ***в***). Застосовуючи (цитовану вище) лему про трійку, переконуємось, що існує оператор $C \in B(G^-, G_1)$ такий, що $\ker C = \{0\}$, $A_1 = C(P_- - KP_+)$. Зрозуміло, що тоді $A_1^- = C$, а отже, $\ker A_1^- = \ker C = \{0\}$, $iA_1 E A_1^* = C(KK^* - 1_{G^*})$, тобто ***в***) $\Rightarrow$ ***б***).

а) $\Rightarrow$ ***б***). Нехай L_1 − максимально дисипативне відношення. З леми 1 випливає, що $\overline{R(A_1^*)}$ − максимально недодатний лінеал в $(G, \mathcal{R}) = (G^+ \oplus G^-, P_+ - P_-)$. Але цей простір є простором Крейна (в сенсі [1]). Тому, використовуючи відомий критерій максимальності семідефінітного лінеала у такому просторі, отримуємо таке:

$$L_1 \text{ − максимально дисипативне відношення } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -iEA_1 E A_1^* \le 0, \qquad P_- \overline{R(A_1^*)} = G_-. \tag{36}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли A_1, а отже, й A_1^* (див. [5]), − нормально розв'язний оператор, тому

$$(36) \Rightarrow P_- R(A_1^*) = G_- \Leftrightarrow R(P_- R(A_1^*)) = G_- \Leftrightarrow R(A_1^-)^* =$$

$$= G_- \Rightarrow \ker A_1^- = \{0\}.$$

У загальному випадку, беручи до уваги наслідок 3, лему про трійку та використовуючи міркування, наведені у [10] та [13], приходимо до висновку, що існують $\hat{A}_1 \in B(G, G_1)$, $C \in B(G_1)$ такі, що

$$R(\hat{A}_1) = G_1, \qquad \ker C = \{0\}, \qquad A_1 = C\hat{A}_1, \qquad L_1 = \ker(\hat{A}_1^- \Lambda).$$

Для завершення доведення достатньо скористатись тим, що $\ker \hat{A}_1^- = \ker A_1^-$, і (оскільки $\overline{R(C^*)} = G_1$)

$$-iA_1EA_1^* \le 0 \;\Leftrightarrow\; -i\hat{A}_1E\hat{A}_1^* \le 0.$$

в) $\Rightarrow$ ***а***). Запишемо

$$(\forall \hat{y} \in L)\;(\forall \hat{z} \in L) \qquad (i\hat{J}\hat{y} \mid \hat{z})_2 = i[(\Lambda_+\hat{y} \mid \Lambda_+\hat{z})_{G^+} - (\Lambda_-\hat{y} \mid \Lambda_-\hat{z})_{G^-}]. \tag{37}$$

З (34) і (37) випливає, що

$$\forall \hat{y} \in L_1 \quad (i\hat{J}\hat{y} \mid \hat{y})_2 = i[(\Lambda_+\hat{y} \mid \Lambda_+\hat{y})_{G^+} - (K\Lambda_+\hat{y} \mid K\Lambda_+\hat{y})_{G^-}] =$$

$$= i\left((1_{G^+} - K^*K)\Lambda_+ y \mid \Lambda_+ y\right)_{G^+},$$

тому $\operatorname{Im}(i\hat{J}\hat{y} \mid \hat{y})_2 \ge 0$, тобто L_1 − дисипативне відношення.

Далі, з (37) випливає, що для будь-яких $\hat{y}, \hat{z} \in L_1$ справджується рівність

$$(i\hat{J}\hat{y} \mid \hat{z})_2 = i[(\Lambda_-\hat{y} - K\Lambda_+\hat{y} \mid \Lambda_-\hat{z})_{G^-} - (\Lambda_+\hat{y} \mid \Lambda_+\hat{z} - K^*\Lambda_-\hat{z})_{G^+}],$$

так що $L_1^* = \{\hat{z} \in L : \Lambda_+\hat{z} = K^*\Lambda_-\hat{z}\}$, а отже, для будь-якого $\hat{z} \in L_1^*$

$$(i\hat{J}\hat{z} \mid \hat{z}) = i[(K^*\Lambda_-\hat{z} \mid K^*\Lambda_-\hat{z})_{G^+} - (\Lambda_-\hat{z} \mid \Lambda_-\hat{z})_{G^-}] =$$

$$= i\left((KK^* - 1_{G^-})\Lambda_-\hat{z} \mid \Lambda_-\hat{z}\right)_{G^-}.$$

Тому L_1^* − акумулятивне відношення. Тепер вже зрозуміло, що L_1 − максимально дисипативне відношення. ♦

Теорема 3. *В умовах теореми 2 такі твердження еквівалентні*:

1°. L_1 − *максимально акумулятивне відношення*.

2°. $-iA_1EA_1^* \ge 0, \qquad \ker A_1^+ = \{0\}$.

3°. *Існує оператор* $K \in B(G^-, G^+)$ *такий, що* $\|K\| \le 1$ *і*

$$L_1 = \{y \in L : \Lambda_+ y = K\Lambda_- y\}.$$

У випадку, коли $R(A_1) = G_1$, *умова* $\ker A_1^+ = \{0\}$ *може бути замінена сильнішою*: $(A_1^+)^{-1} \in B(G_1, G^+)$.

Д о в е д е н н я аналогічне до доведення теореми 2. ♦

Наслідок 4. *Відношення* $L_1 \subset L$, *означене згідно з* (34), *є максимально симетричним* (*самоспряженим*) *тоді й тільки тоді*, *коли* K − *ізометричний* (*унітарний*) *оператор*.

Д о в е д е н н я. Міркуючи так, як при доведеннях леми 1 і теореми 2, бачимо, що відношення L_1^* є (максимально) симетричним тоді й тільки тоді, коли K^* − ізометричний оператор. Тому правильність цього твердження випливає із взаємної спряженості відношень $\{\hat{y} \in L : \Lambda_-\hat{y} = K\Lambda_+\hat{y}\}$ та $\{\hat{z} \in L : \Lambda_+\hat{z} = K^*\Lambda_-\hat{z}\}$. ♦

Наслідок 5. *Нехай відношення* L_1 *таке, як в* (24). *Такі твердження еквівалентні*:

1°. L_1 − *максимально дисипативне* (*максимально акумулятивне*) *відношення.*

2°. $U_1\hat{J}U_1^* \le 0$, $\ker(U_1 \downarrow \hat{H}_L^-) = \{0\}$ (*відповідно* $U_1\hat{J}U_1^* \ge 0$, $\ker(U_1 \downarrow \hat{H}_L^+) = \{0\}$.

3°. *Існує стиск* $K \in B(\hat{H}_L^-, \hat{H}_L^+)$ (*відповідно* $K \in B(\hat{H}_L^+, \hat{H}_L^-)$) *такий, що* $L_1 = \{\hat{y} \in L : \hat{P}_L^- \hat{y} = K\hat{P}_L^+ \hat{y}\}$ (*відповідно* $L_1 = \{\hat{y} \in L : \hat{P}_L^+ \hat{y} = K\hat{P}_L^- \hat{y}\}$).

Зокрема, $L_1 = L_1^*$ *тоді й тільки тоді, коли* $U_1\hat{J}U_1^* = 0$, $\ker(U_1 \downarrow \hat{H}_L^\pm) = \{0\}$, *або, що еквівалентно, коли* K − *унітарний оператор.*

Для д о в е д е н н я досить застосувати теореми 2, 3 і наслідки 4, 5 при

$$G^\pm = \hat{H}_L^\pm, \quad \Lambda = \hat{P}_L, \quad A_1 = U_1 \downarrow \hat{H}_L, \quad E = i\hat{J} \downarrow \hat{H}_L = i\begin{pmatrix} 1_{\hat{H}_L^+} & 0 \\ 0 & -1_{\hat{H}_L^-} \end{pmatrix}. \qquad \blacklozenge$$

Наслідок 6. *Нехай* $(G^+, G^-, \delta_+, \delta_-)$ − *гранична четвірка для* L_0, $G = G^+ \oplus G^-$, $A_1 \in B(G, G^-)$ (*відповідно* $A_1 \in B(G, G^+)$), $L_1 = \{y \in L : A_1^+\delta_+ y + A_1^-\delta_- y = 0\}$ (*нагадаємо, що* $A_1^\pm = A_1 \downarrow G^\pm$). *Такі твердження еквівалентні*:

1°. L_1 − *максимально дисипативне* (*максимально акумулятивне*) *відношення.*

2°. $A_1^+(A_1^+)^* \le A_1^-(A_1^-)^*$, $\quad \ker A_1^- = \{0\}$,

(*відповідно* $A_1^+(A_1^+)^* \ge A_1^-(A_1^-)^*$, $\ker A_1^+ = \{0\}$).

3°. *Існує стиск* $K \in (G^+, G^-)$ (*відповідно* $K \in (G^-, G^+)$) *такий, що* $L_1 = \{y \in L : \delta_- y = K\delta_+ y\}$ (*відповідно* $L_1 = \{y \in L : \delta_+ y = K\delta_- y\}$).

Зокрема, $L_1 = L_1^* \Leftrightarrow (A_1^+(A_1^+)^* = A_1^-(A_1^-)^*) \wedge \ker A_1^\pm = \{0\} \Leftrightarrow K$ − *унітарний оператор.*

Для д о в е д е н н я цього наслідку досить у наведених вище твердженнях (теореми 2, 3 і наслідки 4, 5) покласти $\Lambda = \delta_- \oplus \delta_+$, $G_1 = G^-$ (відповідно $G_1 = G^+$), $E = i\mathcal{J}$ (див. (8)). ♦

Наслідок 7. *Нехай* L_0 *має однакові дефектні числа* ($m^+ = m^-$), *а* $(\mathcal{H}, \mathcal{H}, \Delta_1, \Delta_2)$ − *гранична четвірка для* L_0. *Далі, нехай* $A_{11}, A_{12} \in B(\mathcal{H})$, *а* $L_1 = \{y \in L : A_{11}\Delta_1 y + A_{12}\Delta_2 y = 0\}$. *Тоді такі твердження рівносильні*:

1°. *Відношення* L_1 − *максимально дисипативне* (*максимально акумулятивне*).

2°. $(A_{11}A_{11}^* \le A_{12}A_{12}^*) \wedge \ker A_{12} = \{0\}$,

(*відповідно* $(A_{11}A_{11}^* \ge A_{12}A_{12}^*) \wedge \ker A_{11} = \{0\}$).

3°. *Існує стиск* $K \in B(\mathcal{H})$ *такий, що* $L_1 = \{y \in L : \Delta_2 y = K\Delta_1 y\}$ (*відповідно* $L_1 = \{y \in L : \Delta_1 y = K\Delta_2 y\}$).

Зокрема, $(L_1 = L_1^*) \Leftrightarrow ((A_{11}A_{11}^* = A_{12}A_{12}^*) \wedge (\ker A_{11} = \ker A_{12} = \{0\})) \Leftrightarrow K$ − *унітарний оператор.*

Д о в е д е н н я аналогічне до доведення наслідку 6. ♦

Наслідок 8. *Нехай* L_0 *має однакові дефектні числа,* $(\mathcal{H},\Gamma_1,\Gamma_2)$ *– гранична трійка для* L_0, $A_{11},A_{12}\in B(\mathcal{H})$ *і* $L_1=\{y\in L: A_{11}\Gamma_1 y + A_{12}\Gamma_2 y = 0\}$. *Тоді такі твердження еквівалентні*:

1°. L_1 *– максимально дисипативне (максимально акумулятивне) відношення.*

2°. $(\operatorname{Im}(A_{11}A_{12}^*)\le 0)\wedge(\ker(A_{11}+iA_{12})=\{0\})$,

(*відповідно* $(\operatorname{Im}(A_{11}A_{12}^*)\ge 0)\wedge(\ker(A_{11}-iA_{12})=\{0\})$).

3°. *Існує стиск* $K\in B(\mathcal{H})$ *такий, що*

$$L_1=\{y\in L:(K-1_H)\Gamma_1 y + i(K+1_H)\Gamma_2 y = 0\},$$

(*відповідно* $L_1=\{y\in L:(K-1_H)\Gamma_1 y - i(K+1_H)\Gamma_2 y = 0\}$).

Зокрема, $L_1=L_1^*\Leftrightarrow((A_{11}A_{12}^*=A_{12}A_{11}^*)\wedge\ker(A_{11}\pm iA_{12})=\{0\})\Leftrightarrow K$ *– унітарний оператор.*

Д о в е д е н н я. Нехай E_0 – оператор, означений згідно з (15). Покладемо $\Delta=E_0^*\Gamma$ (нагадаємо, що $\Gamma=\Gamma_1\oplus\Gamma_2$), $\hat{A}_1=A_1E_0$. З огляду на наслідок 2, четвірка $(\mathcal{H},\mathcal{H},\Delta_1,\Delta_2)$ є граничною для L_0. Далі, $A_1\Gamma=\hat{A}_1\Delta$ і (див. (17))

$$\hat{A}_1\mathcal{J}\hat{A}_1^*=A_1E_0\mathcal{J}E_0^*A_1^*=A_1JA_1^*=2\operatorname{Im}(A_{11}A_{12}^*),$$

$$\hat{A}_1=(\hat{A}_{11},\hat{A}_{12})=(A_{11},A_{12})\begin{pmatrix}1_{\mathcal{H}} & 1_{\mathcal{H}}\\ -i1_{\mathcal{H}} & i1_{\mathcal{H}}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}=$$

$$=(A_{11}-iA_{12},A_{11}+iA_{12})\frac{1}{\sqrt{2}},$$

тобто $\hat{A}_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_{11}-iA_{12})$, $\hat{A}_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_{11}+iA_{12})$.

Крім цього,

$$K\Delta_1-\Delta_2=(K,-1_{\mathcal{H}})\begin{pmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\end{pmatrix}=(K,-1_{\mathcal{H}})E_0^*\begin{pmatrix}\Gamma_1\\ \Gamma_2\end{pmatrix}=$$

$$=(K,-1_{\mathcal{H}})\begin{pmatrix}1_{\mathcal{H}} & i1_{\mathcal{H}}\\ 1_{\mathcal{H}} & -i1_{\mathcal{H}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma_1\\ \Gamma_2\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[K-1_{\mathcal{H}},i(K+1_{\mathcal{H}})]\begin{pmatrix}\Gamma_1\\ \Gamma_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}[(K-1_{\mathcal{H}})\Gamma_1+i(K+1_{\mathcal{H}})\Gamma_2].$$

Тому правильність наслідку 8 випливає з наслідку 7. ♦

1. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – Москва: Наука, 1986. – 352 с.
2. *Арлинський Ю. М.* Максимальні акретивні розширення секторіальних операторів: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Київ, 2000. – 36 с.
3. *Брук В. М.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сб. – 1976. – **100**, № 2. – С. 210–216.
4. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – Москва: Мир, 1972. – 740 с.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1976. – 544 с.
7. *Кочубей А. Н.* О расширениях неплотно заданного симметрического оператора // Сиб. мат. журн. – 1977. – **18**, № 2. – С. 314–320.

8. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 1. – С. 41–48.
9. *Крейн М. Г.* Введение в геометрию индефинитных J-пространств и теорию операторов в этих пространствах // Вторая летняя мат. школа, 1. – Киев: Наук. думка, 1965. – С. 15–92.
10. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов. – Киев: Наук. думка, 1983. – 210 с.
11. *Маламуд М. М.* Об одном подходе к теории расширений неплотно заданного эрмитова оператора // Докл. АН УССР. – 1990. – № 3. – С. 20–25.
12. *Сторож О. Г.* Зв'язок між двома парами лінійних відношень та дисипативні розширення деяких нещільно визначених операторів // Карпатські мат. публ. – 2009. – **1**, № 2. – С. 207–213.
13. *Сторож О. Г.* Методи теорії розширень та диференціально-граничні оператори: Дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Львів, 1995. – 277 с.
14. *Сторож О. Г.* О расширениях симметрических операторов с неравными дефектными числами // Мат. заметки. – 1984. – **36**, № 5. – С. 791–796.
15. *Arens R.* Operational calculus of linear relations // Pacific J. Math. – 1961. – **11**, No. 1. – P. 9–23.
16. *Bruk V. M.* On linear relations generated by nonnegative operator function and degenerate elliptic differential operator expression // J. Math. Phys., Analysis, Geometry. – 2009. – **5**, No. 2. – P. 123–144.
17. *Bruk V. M.* On linear relations generated by a differential expression and by a Nevanlinna operator function // J. Math. Phys., Analysis, Geometry. – 2011. – **7**, No. 2. – P. 115–140.
18. *Coddington E. A.* Self adjoint subspace extensions of nondensely defined linear symmetric operators // Bull. Amer. Math. Soc. – 1973. – **79**, No. 4. – P. 712–715.
19. *Dijksma A., de Snoo H. S. V.* Self-adjoint extensions of symmetric subspaces // Pacific J. Math. – 1974. – **54**, No. 1. – P. 71–100.
20. *Hassi S., de Snoo H. S. V., Sterk A. E., Winkler H.* Finite-dimensional graph perturbations of selfadjoint Sturm – Liouville operators // In: Operator theory, Structured Matrices, and Dilations. Tiberiu Constantinescu Memorial Volume. – Theta Foundation, 2007. – P. 205–226.
21. *Iohvidov I. S., Krein M. G., Langer H.* Introduction to the spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric. – Berlin: Akademie-Verlag, 1982. – 120 p.

ПРОСТРАНСТВА ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ДИССИПАТИВНЫЕ РАСШИРЕНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Для замкнутого симметричного линейного отношения L_0 с произвольным индексом дефекта введено понятие граничной четверки, при помощи которой удается записать абстрактный аналог формулы интегрирования по частям, и доказано ее существование. В случае, когда это отношение имеет одинаковые дефектные числа, установлена связь между введенным объектом и известным понятием граничной тройки. В терминах граничных четверок приведено описание максимально диссипативных и максимально аккумулятивных расширений отношения L_0.

SPACES OF BOUNDARY VALUES AND DISSIPATIVE EXTENSIONS OF SYMMETRIC RELATIONS

For a closed symmetric linear relation L_0 with arbitrary index of defect the notion of the boundary quadruple by means of which it is possible to write down abstract analog of a formula of integration by parts is introduced, and its existence is proved. In the case when this relation has equal defect numbers, connection between the introduced object and known notion of the boundary triple is established. In terms of boundary quadruple the maximal dissipative and maximal accumulative extensions of the relation L_0 are described.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
31.08.12