УДК 517.95

М. М. Бокало, О. В. Доманська

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ СТАЦІОНАРНИХ АНІЗОТРОПНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ

Розглядаються стаціонарні анізотропні інтегро-диференціальні рівняння з частинними похідними вищих порядків і змінними показниками нелінійності. Припускається можливим нелінійне входження шуканої функції у підінтегральний вираз. Встановлено умови існування та єдиності узагальнених розв'язків задачі Діріхле для таких рівнянь.

Вступ. У цій роботі розглядаються інтегро-диференціальні рівняння еліптичного типу з можливим нелінійним входженням невідомої функції як в диференціальну, так і в інтегральну частину рівняння. Такі рівняння виникають при описі різних процесів у природі та різних сферах життя людського суспільства, зокрема, економіці (див., наприклад, [4, 12]). Лінійні та нелінійні зі сталими показниками нелінійності інтегро-диференціальні рівняння еліптичного типу досліджувалися у роботах багатьох математиків, серед яких – [1, 4, 6, 9–12, 17].

У наш час активно розвивається теорія нелінійних диференціальних рівнянь зі змінними показниками нелінійності. Серед праць, присвячених цій тематиці, можна назвати [2, 3, 7, 8, 13–16]. Роботи, які стосуються нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь зі змінними показниками нелінійності, нам невідомі.

У цій роботі розглядаються нелінійні інтегро-диференціальні рівняння вищих порядків еліптичного типу в припущенні, що частинні похідні шуканої функції входять в рівняння із показниками нелінійності, які залежать від виду похідної і точки області визначення рівняння (іншими словами, рівняння є анізотропними зі змінними показниками нелінійності). Для таких рівнянь вивчається проблема існування і єдиності узагальнених розв'язків задачі Діріхле. Відмітимо, що узагальнені розв'язки досліджуваної задачі є елементами узагальнених анізотропних просторів Соболева, а для доведення існування таких розв'язків використовується метод Гальоркіна. Робота складається з двох частин: в першій частині дається постановка задачі і формулювання основних результатів, а в другій – доведення основних результатів.

1. Постановка задачі і формулювання основних результатів. Нехай n, m – натуральні числа і M – підмножина множини $\{0,1,\dots,m\}$ така, що $\{0,m\} \subset M$. Позначимо через N кількість мультиіндексів розмірності n (впорядкованих наборів $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ з цілих невід'ємних чисел), довжини яких ($|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$) є елементами множини M, а через $\mathbb{R}^N$ – лінійний простір впорядкованих наборів з N дійсних чисел $\xi = (\xi_{\overline{0}},\dots,\xi_\alpha,\dots) \equiv$ $\equiv (\xi_\alpha : |\alpha| \in M)$, компоненти яких пронумеровані мультиіндексами розмірності n, що мають довжини з M і впорядковані лексикографічно (це означає, що $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ передує $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$, коли або $|\alpha| < |\beta|$, або $|\alpha| = |\beta|$ і $\alpha_k > \beta_k$, де $k = \min\{j : \alpha_j \ne \beta_j\}$). Тут і далі $\overline{0}$ – мультиіндекс, складений з нулів. Покладемо $|\xi| := \left(\sum\limits_{|\alpha| \in M} |\xi_\alpha|^2 \right)^{1/2}$ для довільного $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Нехай Ω – обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$, елементами якого є впорядковані набори дійсних чисел $x=(x_1,\dots,x_n)$ і на якому введена норма $|x|=(x_1^2+\dots+x_n^2)^{1/2}$. Припустимо, що межа $\Gamma:=\partial\Omega$ області Ω є кусково-гладкою.

Розглянемо *задачу*: знайти функцію $u:\bar\Omega\to\mathbb{R}$, яка задовольняє (у певному сенсі) рівняння

$$\sum_{|\alpha|\in M}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha a_\alpha(x,\delta u)+\int_\Omega b(x,y,u(y))\,dy=\sum_{|\alpha|\in M}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha f_\alpha(x),\quad x\in\Omega,\tag{1}$$

та крайові умови

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j}\right|_\Gamma=0,\qquad j=0,\dots,m-1,\tag{2}$$

де ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ, δu – впорядкований набір з похідних $D^\alpha u\equiv\dfrac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}u$ функції u порядків $|\alpha|\in M$ (правило впорядкування таке ж, як для компонентів векторів $\xi\in\mathbb{R}^N$). Це є *задача Діріхле для рівняння* (1) і далі її коротко називатимемо *задачею* (1), (2).

Вивчатимемо узагальнені розв'язки задачі (1), (2), а для цього зробимо відповідні припущення щодо її вихідних даних.

Нехай $p=(p_\alpha:|\alpha|\in M)$ – впорядкований набір вимірних на Ω функцій p_α (пронумерованих так само, як елементи простору $\mathbb{R}^N$), для яких виконуються умови

$$p_\alpha^-:=\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega}p_\alpha(x)>1,\qquad p_\alpha^+:=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}p_\alpha(x)<+\infty.\tag{3}$$

Через $p'=(p'_\alpha:|\alpha|\in M)$ позначатимемо впорядкований набір функцій таких, що $1/p_\alpha(x)+1/p'_\alpha(x)=1$, $|\alpha|\in M$, для майже всіх $x\in\Omega$.

Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину, елементами якої є впорядковані набори $(a_\alpha:|\alpha|\in M)$ визначених на $\Omega\times\mathbb{R}^N$ дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як компоненти елементів простору $\mathbb{R}^N$, і функції з будь-якого такого набору задовольняють сформульовані нижче умови:

(**H1**) для кожного α, $|\alpha|\in M$, функція $a_\alpha(x,\xi)$, $(x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}^N$, є каратеодорівською, тобто для майже всіх $x\in\Omega$ функція $a_\alpha(x,\cdot):\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ є неперервною і для всіх $\xi\in\mathbb{R}^N$ функція $a_\alpha(\cdot,\xi):\Omega\to\mathbb{R}$ є вимірною за Лебегом;

(**H2**) для кожного α, $|\alpha|\in M$, будь-яких $\xi\in\mathbb{R}^N$ та майже всіх $x\in\Omega$ маємо

$$|a_\alpha(x,\xi)|\le h_\alpha(x)\sum_{|\beta|\in M}|\xi_\beta|^{p_\beta(x)/p'_\alpha(x)}+g_\alpha(x),$$

де $h_\alpha\in L_\infty(\Omega)$, $g_\alpha\in L_{p'_\alpha(\cdot)}(\Omega)$.

Нехай $\mathbb{B}$ – множина дійснозначних функцій $b(x,y,s)$, $(x,y,s)\in\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}$, які задовольняють сформульовані нижче умови:

(**H3**) b є каратеодорівською, тобто для майже всіх $(x,y)\in\Omega$ функція $b(x,y,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ є неперервною і для всіх $s\in\mathbb{R}$ функція $b(\cdot,\cdot,s):\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ є вимірною за Лебегом;

(**H4**) для будь-якого $s \in \mathbb{R}$ і майже всіх $(x,y) \in \Omega \times \Omega$ маємо

$$|b(x,y,s)| \le \mathcal{L}|s| + b_0(x,y), \tag{4}$$

де $\mathcal{L} > 0$ – стала, $b_0 \in L_2(\Omega \times \Omega)$ – невід'ємна функція.

Нехай $\mathbb{F}_{p'}$ – множина, елементами якої є впорядковані набори $(f_\alpha : |\alpha| \in M)$ з N визначених на Ω дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як елементи простору $\mathbb{R}^N$, і функції з будь-якого такого набору задовольняють умову

(**H5**) $f_\alpha \in L_{p'_\alpha(\cdot)}(\Omega), \qquad |\alpha| \in M \setminus \{0\}, \qquad f_{\bar{0}} \in L_{p'_{\bar{0}}(\cdot)}(\Omega) + L_2(\Omega)$.

Введемо потрібні далі функціональні простори. Нехай $r \in L_\infty(\Omega)$, причому $r(x) \ge 1$ для майже всіх $x \in \Omega$. Під $L_{r(\cdot)}(\Omega)$ розумітимемо підпростір простору $L_1(\Omega)$, елементи якого задовольняють умову $\int\limits_\Omega |v(x)|^{r(x)}\,dx < +\infty$, з нормою $\|v\|_{L_{r(\cdot)}(\Omega)} := \inf\{\lambda > 0 : \int\limits_\Omega \left|\frac{v(x)}{\lambda}\right|^{r(x)} dx \le 1\}$. Простір $L_{r(\cdot)}(\Omega)$ є банаховим і називається узагальненим простором Лебега (детальніше див., наприклад, [13, 14]).

Введемо позначення: $W_s^m(\Omega) := \{v \in L_s(\Omega) \mid D^\alpha v \in L_s(\Omega)\ \forall \alpha, |\alpha| \le m\}$ – банахів простір з нормою $\|v\|_{W_s^m(\Omega)} := \sum\limits_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha v\|_{L_s(\Omega)}$, де $s \ge 1$ – деяке число; $W_{p(\cdot)}^m(\Omega) := \{v \in L_1(\Omega) \mid D^\alpha v \in L_{p_\alpha(\cdot)}(\Omega)\ \forall \alpha, |\alpha| \in M\}$ – банахів простір з нормою $\|v\|_{W_{p(\cdot)}^m(\Omega)} := \sum\limits_{|\alpha| \in M} \|D^\alpha v\|_{L_{p_\alpha(\cdot)}(\Omega)}$. Під $\overset{\circ}{W}{}_{p(\cdot)}^m(\Omega)$ розуміємо замикання простору $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $\|v\|_{W_{p(\cdot)}^m(\Omega)}$. Означимо простір $\mathbb{U}_p := \overset{\circ}{W}{}_{p(\cdot)}^m(\Omega) \cap L_2(\Omega)$, який є банаховим з нормою $\|v\|_{\mathbb{U}_p} := \|v\|_{W_{p(\cdot)}^m(\Omega)} + \|v\|_{L_2(\Omega)}$. Позначимо через q якнайбільше число таке, що вкладення $\mathbb{U}_p \subset L_q(\Omega)$ є компактним. Легко переконатися, що $q \ge \min\limits_{|\alpha| \in M} p_\alpha^- > 1$. Покладемо $q' := q/(q-1)$.

Означення. Узагальненим розв'язком задачі (1), (2) називаємо функцію $u \in \mathbb{U}_p$ таку, що рівність

$$\int\limits_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(x, \delta u(x)) D^\alpha v(x) + v(x) \int\limits_\Omega b(x,y,u(y))\,dy \right\} dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha| \in M} f_\alpha(x) D^\alpha v(x)\,dx \tag{5}$$

виконується для будь-яких $v \in \mathbb{U}_p$.

Тепер введемо множину $\mathbb{A}_p^*$ наборів функцій $(a_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{A}_p$, які задовольняють ще такі дві умови:

(**H6**) існують сталі $K_\alpha > 0$, $|\alpha| \in M$, $K_* > \mathcal{L}\,\mathrm{mes}_n\,\Omega$ (тут і далі $\mathrm{mes}_n\,\Omega$ – n-вимірна міра Лебега множини Ω) та невід'ємна функція $h \in L_1(\Omega)$ такі, що для будь-яких ξ з $\mathbb{R}^N$ та майже всіх $x \in \Omega$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \ge \sum_{|\alpha|\in M} K_\alpha |\xi_\alpha|^{p_\alpha(x)} + K_* |\xi_{\bar 0}|^2 - h(x);$$

(**H7**) існує стала $\widehat{K} \in \mathbb{R}$ така, що для довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ і майже всіх $x \in \Omega$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(x,\xi) - a_\alpha(x,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \ge \widehat{K} |\xi_{\bar 0} - \eta_{\bar 0}|^2 .$$

Означимо ще множину $\mathbb{B}^*$ як множину, що складається з функцій $b \in \mathbb{B}$, які задовольняють умову:

(**H8**) для довільних $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ і майже всіх $(x,y) \in \Omega \times \Omega$ виконується нерівність (умова Ліпшиця)

$$|b(x,y,s_1) - b(x,y,s_2)| \le Ł |s_1 - s_2| ,$$

де $Ł$ – стала з умови (**H4**).

Теорема 1. *Нехай* $(a_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{A}_p^*$, $b \in \mathbb{B}$, $(f_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{F}_{p'}$, *причому, якщо* $q < 2$, *то стала* $\widehat{K}$ *з умови* (**H7**) *є невід'ємною, а функція* b_0 *з умови* (**H4**) *така, що* $\int_\Omega \left| \int_\Omega b_0(x,y)\,dy \right|^{q'} dx < \infty$ *Тоді задача* (1), (2) *має узагальнений розв'язок, який задовольняє оцінку*

$$\int_\Omega \left(\sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u_k(x)|^{p_\alpha(x)} + |u_k(x)|^2 \right) dx \le$$

$$\le C_1 \int_\Omega \left(h(x) + \left| \int_\Omega b_0(x,y)\,dy \right|^2 + \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha(x)|^{p'_\alpha(x)} \right) dx , \qquad (6)$$

де $C_1 > 0$ – *стала, яка залежить тільки від* $K_\alpha, p_\alpha^-, |\alpha| \in M, K_*, Ł$ *та* $\operatorname{mes}_n \Omega$.

Теорема 2. *Нехай* $(a_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{A}_p^*$, $b \in \mathbb{B}^*$, $(f_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{F}_{p'}$, *причому* $\widehat{K} > L \operatorname{mes}_n \Omega$, *де* $\widehat{K}, Ł$ – *сталі з умов* (**H7**) *та* (**H8**). *Тоді задача* (1), (2) *має єдиний узагальнений розв'язок і він задовольняє оцінку* (6).

2. Доведення основних результатів.

Д о в е д е н н я **теореми 1**. Використаємо метод Гальоркіна. Нехай $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ – повна лінійно незалежна система функцій в просторі $\mathbb{U}_p$. Для довільного $k \in \mathbb{N}$ позначимо $V_k := \{d_1 w_1 + \ldots + d_k w_k \mid d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{R}\}$. Очевидно, що замикання $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k$ за нормою простору $\mathbb{U}_p$ співпадає з цим простором. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ шукаємо гальоркінське наближення $u_k \in V_k$ у вигляді

$$u_k(x) = \sum_{i=1}^k c_{k,i} w_i(x), \qquad x \in \Omega , \qquad (7)$$

де $c_{k,1}, c_{k,2}, \ldots, c_{k,k}$ – сталі такі, що u_k є розв'язком системи рівнянь

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x, \delta u_k) D^\alpha w_j(x) + w_j(x) \int_\Omega b(x,y,u_k(y))\,dy \right\} dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha(x) D^\alpha w_j(x)\,dx, \qquad j \in \{1,\ldots,k\}. \qquad (8)$$

Покажемо спочатку, що функція u_k існує. Для цього скористаємося таким твердженням (див. [5, гл. 1, лема 4.3]):

Твердження 1. *Нехай* $P:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ *− неперервне відображення таке, що для деякого* $\rho > 0$ *виконується нерівність*

$$(P(\xi),\xi) \ge 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^k, \qquad |\xi| = \rho\,, \tag{9}$$

(*тут* $(\cdot,\cdot)$ *означає скалярний добуток в просторі* $\mathbb{R}^k$, *тобто* $(\eta,\xi) = \sum_{i=1}^{k} \eta_i \xi_i$, $\xi,\eta \in \mathbb{R}^k$). *Тоді знайдеться* $\xi^0 \in \mathbb{R}^k$ *таке, що* $|\xi^0| \le \rho$ *і* $P(\xi^0) = 0$.

Покладемо $\xi := (\xi_1,\dots,\xi_k)$, $v^\xi(x) := \sum_{j=1}^{k} \xi_j w_j(x)$, $x \in \Omega$,

$$P_\ell(\xi) := \int_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,\delta v^\xi) D^\alpha w_\ell(x) + w_\ell(x) \int_\Omega b(x,y,v^\xi(y))\,dy -$$
$$- \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha(x) D^\alpha w_\ell(x) \Big\} dx, \qquad \ell \in \{1,\dots,k\}.$$

Тоді

$$(P(\xi),\xi) = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,\delta v^\xi) D^\alpha v^\xi(x)\,dx + \int_\Omega v^\xi(x) \int_\Omega b(x,y,v^\xi(y))\,dy\,dx -$$
$$- \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha(x) D^\alpha v^\xi(x)\,dx\,. \tag{10}$$

Перевіримо виконання умов твердження 1. На підставі умови (**H6**) маємо нерівність

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,\delta v^\xi) D^\alpha v^\xi(x)\,dx \ge$$
$$\ge \int_\Omega \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} K_\alpha |D^\alpha v^\xi|^{p_\alpha(x)} + K_* |v^\xi|^2 - h(x) \Big\} dx\,. \tag{11}$$

В подальшому буде потрібна нерівність

$$ab \le \varepsilon |a|^\nu + \varepsilon^{-1/(\nu-1)} |b|^{\nu'}, \tag{12}$$

яка є правильною для будь-яких $a,b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\nu > 1$, $\nu' := \nu/(\nu-1)$, і легко отримується зі стандартної нерівності Юнга: $ab \le |a|^\nu/\nu + |b|^{\nu'}/\nu'$.

Використовуючи умову (**H4**), нерівність Коші − Буняковського та нерівність (12) при $\nu = 2$, отримаємо

$$\left| \int_\Omega v^\xi(x) \int_\Omega b(x,y,v^\xi(y))\,dy\,dx \right| \le \int_\Omega |v^\xi(x)| \int_\Omega |b(x,y,v^\xi(y))|\,dy\,dx \le$$
$$\le \int_\Omega |v^\xi(x)| \int_\Omega [\mathcal{L} |v^\xi(y)| + b_0(x,y)]\,dy\,dx =$$
$$= \mathcal{L} \Big(\int_\Omega |v^\xi(x)|\,dx \Big)^2 + \int_\Omega |v^\xi(x)| \left| \int_\Omega b_0(x,y)\,dy \right| dx \le$$
$$\le \mathcal{L}\, \mathrm{mes}_n\, \Omega \int_\Omega |v^\xi(x)|^2\,dx + \varepsilon_1 \int_\Omega |v^\xi(x)|^2\,dx +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon_1} \int_\Omega \left| \int_\Omega b_0(x,y)\,dy \right|^2 dx\,, \tag{13}$$

де $\varepsilon_1 > 0$ − довільне число.

На підставі (12) запишемо

$$\left|\int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha(x) D^\alpha v^\xi(x)\,dx\right| \le \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha(x)|\left|D^\alpha v^\xi(x)\right| dx \le$$

$$\le \varepsilon_2 \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} \left|D^\alpha v^\xi(x)\right|^{p_\alpha(x)} dx +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\in M} \varepsilon_2^{-1/(p_\alpha^- -1)} \int_\Omega |f_\alpha(x)|^{p'_\alpha(x)}\,dx\,, \qquad (14)$$

де $\varepsilon_2 \in (0,1)$ – довільне число.

Отже, враховуючи оцінки (11), (13), (14), умову $K_* > \mathcal{L}\,\mathrm{mes}_n\,\Omega$ (див. (**H6**)) та вибираючи ε_1 і ε_2 достатньо малими, з (10) отримаємо

$$(P(\xi),\xi) \ge \tilde{K} \int_\Omega \left|v^\xi(x)\right|^2 dx - C_2 \int_\Omega \Bigg(h(x) + \left|\int_\Omega b_0(x,y)dy\right|^2 +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha(x)|^{p'_\alpha(x)} \Bigg) dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^k, \qquad (15)$$

де $\tilde{K}, C_2$ – деякі додатні сталі.

Поклавши $\tilde{\xi} := |\xi|^{-1}\xi$, запишемо $\int_\Omega \left|v^\xi(x)\right|^2 dx = |\xi|^2 \int_\Omega \left|v^{\tilde{\xi}}(x)\right|^2 dx$. Враховуючи, що система функцій $w_1,\dots,w_k$ є лінійно незалежною, за теоремою Вейєрштрасса маємо

$$\int_\Omega \left|v^{\tilde{\xi}}(x)\right|^2 dx \ge \delta \qquad \forall \tilde{\xi} \in \mathbb{R}^k, \qquad \left|\tilde{\xi}\right| = 1\,, \qquad (16)$$

де $\delta > 0$ – деяка стала. Тоді, вибираючи значення $\rho > 0$ таким, щоб виконувалась нерівність

$$\tilde{K}\delta\rho^2 \ge C_2 \int_\Omega \Bigg(h(x) + \left|\int_\Omega b_0(x,y)\,dy\right|^2 + \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha(x)|^{p'_\alpha(x)} \Bigg) dx\,,$$

отримаємо нерівність $(P(\xi),\xi) \ge 0$ для будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^k$ таких, що $|\xi| = \rho$. Отже, всі умови твердження 1 для відображення P виконуються, а значить, існує гальоркінське наближення (7), для якого виконується система рівностей (8).

Тепер покажемо обмеженість послідовності $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ за нормою простору $\mathbb{U}_p$. Для кожного $j \in \{1,\dots,k\}$ домножимо j-ту рівність із системи (8) на $c_{k,j}$ і, підсумувавши отримані рівності, запишемо

$$\int_\Omega \Bigg\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,\delta u_k(x)) D^\alpha u_k(x) + u_k(x) \int_\Omega b(x,y,u_k(y))\,dy \Bigg\} dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha(x) D^\alpha u_k(x)\,dx\,. \qquad (17)$$

Звідси, роблячи оцінки, аналогічні оцінкам (11), (13), (14), матимемо

$$\int_\Omega \Bigg(\sum_{|\alpha|\in M} \tilde{K}_\alpha \left|D^\alpha u_k(x)\right|^{p_\alpha(x)} + \tilde{K}_* |u_k(x)|^2 \Bigg) dx \le$$

$$\le C_3 \int_\Omega \Bigg(h(x) + \left|\int_\Omega b_0(x,y)\,dy\right|^2 + \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha(x)|^{p'_\alpha(x)} \Bigg) dx\,, \qquad (18)$$

де $\tilde{K}_\alpha := 2^{-1} K_\alpha$, $|\alpha| \in M$, $\tilde{K}_* := 2^{-1}(K_* - \mathcal{L}\,\mathrm{mes}_n\,\Omega)$, а C_3 – деяка додатна стала, що залежить тільки від p_α^-, K_α, $|\alpha| \in M, K_*, \mathcal{L}$ та $\mathrm{mes}_n\,\Omega$.

З оцінки (18) отримаємо

$$\|u_k\|_{\mathbb{U}_p} \le C_4 \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

де $C_4 > 0$ – стала, яка від k не залежить.

З оцінки (19), умови (**H2**) та нерівності Гельдера вигляду

$$\sum_{i=1}^{N+1} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{N+1} |a_i|^\nu\right)^{1/\nu} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N+1} |b_i|^{\nu'}\right)^{1/\nu'}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad \nu > 1, \quad \nu' := \frac{\nu}{\nu - 1},$$

маємо

$$\int_\Omega |a_\alpha(x, \delta u_k(x))|^{p'_\alpha(x)}\,dx \le$$

$$\le \int_\Omega \left| h_\alpha(x) \sum_{|\beta| \in M} |D^\beta u_k|^{p_\beta(x)/p'_\alpha(x)} + g_\alpha(x) \right|^{p'_\alpha(x)} dx \le$$

$$\le \int_\Omega (N |h_\alpha(x)|^{p_\alpha(x)} + 1)^{p'_\alpha(x)/p_\alpha(x)} \times$$

$$\times \left(\sum_{|\beta| \in M} |D^\beta u_k|^{p_\beta(x)} + |g_\alpha(x)|^{p'_\alpha(x)} \right) dx \le C_5. \tag{20}$$

Тому з оцінок (19), (20) та компактності вкладення $\mathbb{U}_p \subset L_q(\Omega)$ випливає існування підпослідовності послідовності $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ (цю підпослідовність позначатимемо так само, як і всю послідовність) і функцій $u \in \mathbb{U}_p$, $\chi_\alpha \in$ $\in L_{p'_\alpha(\cdot)}(\Omega)$, де $|\alpha| \in M$, таких, що

$$u_k \underset{k \to \infty}{\to} u \qquad \text{слабко в } \mathbb{U}_p, \tag{21}$$

$$u_k \underset{k \to \infty}{\to} u \qquad \text{сильно в } L_q(\Omega), \tag{22}$$

$$u_k(x) \underset{k \to \infty}{\to} u(x) \qquad \text{для майже всіх } x \in \Omega, \tag{23}$$

$$a_\alpha(\cdot, \delta u_k(\cdot)) \underset{k \to \infty}{\to} \chi_\alpha(\cdot) \quad \text{слабко в } L_{p'_\alpha(\cdot)}(\Omega) \quad \forall \alpha, \quad |\alpha| \in M. \tag{24}$$

Тепер доведемо, що

$$g_k(\cdot) := \int_\Omega b(\cdot, y, u_k(y))\,dy \underset{k \to \infty}{\to} g(\cdot) := \int_\Omega b(\cdot, y, u(y))\,dy \ \text{ слабко в } L_{q'}(\Omega). \tag{25}$$

Для цього досить (див., наприклад, [5, гл. 1, лема 1.3]) показати, що

$$\|g_k\|_{L_{q'}(\Omega)} \le C_7 \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{26}$$

де $C_7 > 0$ – стала, яка від k не залежить, і

$$g_k(x) \underset{k \to \infty}{\to} g(x) \qquad \text{для майже всіх} \qquad x \in \Omega. \tag{27}$$

Зауважимо, що на підставі умови (**H4**), оцінки (19) та умови цієї теореми маємо для майже всіх $x \in \Omega$ нерівність

$$|g_k(x)| \le \int_\Omega |b(x, y, u_k(y))|\,dy \le \int_\Omega [\mathcal{L}|u_k(y)| + b_0(x, y)]\,dy \le$$

$$\le \mathcal{L}(\mathrm{mes}_n\,\Omega)^{1/2} \|u_k\|_{L_2(\Omega)} + \int_\Omega b_0(x, y)\,dy \le C_6 + b_1(x),$$

де $C_6 > 0$ – стала, яка від k не залежить, а $b_1(\cdot) := \int\limits_\Omega b_0(\cdot, y)\,dy \in L_{q'}(\Omega)$. Звідси випливає оцінка (26).

Тепер покажемо, що виконується (27). Нехай Ω_1 – підмножина множини Ω така, що $\mathrm{mes}_n(\Omega \setminus \Omega_1) = 0$ і для кожного $x \in \Omega_1$ функція $b(x,\cdot,\cdot) : : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є каратеодорівською, тобто для кожного $s \in \mathbb{R}$ функція $b(x,\cdot,s) : \Omega \to \mathbb{R}$ є вимірною за Лебегом і для майже всіх $y \in \Omega$ функція $b(x,y,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є неперервною. Крім того, для кожного $x \in \Omega_1$ і $s \in \mathbb{R}$ та майже всіх $y \in \Omega$ правильна нерівність

$$|b(x,y,s)| \le \mathcal{L}|s| + b_0(x,y).$$

Нехай $x \in \Omega_1$ – яка-небудь фіксована точка. Доведемо, що

$$h_k(\cdot) := b(x,\cdot,u_k(\cdot)) \underset{k\to\infty}{\to} h(\cdot) := b(x,\cdot,u(\cdot)) \qquad \text{слабко в } L_2(\Omega). \tag{28}$$

Справді, маємо

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega |h_k(y)|^2\,dy &= \int\limits_\Omega |b(x,y,u_k(y))|^2\,dy \le \int\limits_\Omega \left|\mathcal{L}|u_k(y)| + b_0(x,y)\right|^2 dy \le \\ &\le 2\mathcal{L}^2 \int\limits_\Omega |u_k(y)|^2\,dy + 2\int\limits_\Omega |b_0(x,y)|^2\,dy \le \\ &\le C_8 + 2\int\limits_\Omega |b_0(x,y)|^2\,dy,\end{aligned} \tag{29}$$

де $C_8 > 0$ – стала, яка від k не залежить. Отже, послідовність $\{h_k\}$ обмежена в $L_2(\Omega)$. З (23) легко випливає, що $h_k(y) := b(x,y,u_k(y)) \underset{k\to\infty}{\to} h(y) := = b(x,y,u(y))$ для майже всіх $y \in \Omega$. Звідси та за лемою 1.3 з [5, гл. 1] випливає (28), звідки легко отримуємо (27). Таким чином, співвідношення (25) доведено.

Покажемо, що u – узагальнений розв'язок нашої задачі. Нехай ℓ – довільне натуральне число і $k \ge \ell$. Візьмемо будь-які сталі γ_1, $\gamma_2, \dots, \gamma_\ell$. Домножимо перше рівняння системи (8) на γ_1, друге рівняння на γ_2, і т. д. до ℓ-го рівняння. Підсумувавши одержані рівності, у результаті отримаємо

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,\delta u_k) D^\alpha \psi(x) + \psi(x)\int\limits_\Omega b(x,y,u_k(y))\,dy \right\} dx = \\ = \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha(x) D^\alpha \psi(x)\,dx,\end{aligned} \tag{30}$$

де $\psi = \sum\limits_{i=1}^{\ell} \gamma_i w_i \in V_\ell$.

Перейдемо в (30) до границі при $k \to \infty$ на підставі (24), (25). У результаті, врахувавши щільність $\bigcup\limits_{\ell=1}^{\infty} V_\ell$ в $\mathbb{U}_p$, маємо рівність

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha|\in M} \chi_\alpha(x) D^\alpha v(x) + v(x)\int\limits_\Omega b(x,y,u(y))\,dy \right\} dx = \\ = \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha(x) D^\alpha v(x)\,dx\end{aligned} \tag{31}$$

для будь-яких $v \in \mathbb{U}_p$.

Залишилося показати, що

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} \chi_\alpha(x) D^\alpha v(x)\,dx = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,\delta u(x)) D^\alpha v(x)\,dx \tag{32}$$

для будь-яких $v \in \mathbb{U}_p$. Для цього використаємо метод монотонності.

Нехай w − довільний елемент простору $\mathbb{U}_p$. Розглянемо вираз

$$M_k = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(x,\delta u_k) - a_\alpha(x,\delta w))(D^\alpha u_k - D^\alpha w)\,dx - \widehat{K}\int_\Omega |u_k - w|^2\,dx.$$

Зауважимо, що з огляду на умову (**H7**) маємо $M_k \ge 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Перепишемо нерівність $M_k \ge 0$ так:

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,\delta u_k) D^\alpha u_k\,dx \ge \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,\delta u_k) D^\alpha w\,dx +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,\delta w)(D^\alpha u_k - D^\alpha w)\,dx + \widehat{K}\int_\Omega |u_k - w|^2\,dx. \tag{33}$$

З рівності (30) випливає

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,\delta u_k) D^\alpha u_k(x)\,dx = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha(x) D^\alpha u_k(x)\,dx -$$

$$- \int_\Omega u_k(x) \int_\Omega b(x,y,u_k(y))\,dy\,dx. \tag{34}$$

З (33) та (34) отримаємо

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha(x) D^\alpha u_k(x)\,dx - \int_\Omega u_k(x)\int_\Omega b(x,y,u_k(y))\,dy\,dx \ge$$

$$\ge \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,\delta u_k) D^\alpha w\,dx +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,\delta w)(D^\alpha u_k - D^\alpha w)\,dx +$$

$$+ \widehat{K}\int_\Omega |u_k - w|^2\,dx. \tag{35}$$

Тепер зауважимо, що у випадку $q \ge 2$ з (22) випливає

$$\widehat{K}\int_\Omega |u_k - w|^2\,dx \underset{k\to\infty}{\to} \widehat{K}\int_\Omega |u - w|^2\,dx. \tag{36}$$

Якщо ж $q < 2$, то з (21), слабкої півнеперервності норми $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$ та умови $\widehat{K} \ge 0$ випливає

$$\varliminf_{k\to\infty} \widehat{K}\int_\Omega |u_k - w|^2\,dx \ge \widehat{K}\int_\Omega |u - w|^2\,dx. \tag{37}$$

З нерівності (35), враховуючи (21), (22), (24), (25), (36), (37), маємо

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha(x) D^\alpha u(x)\,dx - \int_\Omega u(x)\int_\Omega b(x,y,u(y))\,dy\,dx \ge$$

$$\ge \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} \chi_\alpha D^\alpha w\,dx + \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,\delta w)(D^\alpha u - D^\alpha w)\,dx +$$

$$+ \widehat{K}\int_\Omega |u - w|^2\,dx. \tag{38}$$

Поклавши в рівності (31) $v = u$, запишемо

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha| \in M} \chi_\alpha(x) D^\alpha u(x) + u(x) \int_\Omega b(x, y, u(y))\, dy \right\} dx =$$

$$= \int_\Omega \sum_{|\alpha| \in M} f_\alpha(x) D^\alpha u(x)\, dx\,. \qquad (39)$$

З (38) і (39) отримаємо

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha| \in M} \chi_\alpha(x) D^\alpha u(x) \right\} dx \ge \int_\Omega \sum_{|\alpha| \in M} \chi_\alpha D^\alpha w\, dx +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(x, \delta w)(D^\alpha u - D^\alpha w)\, dx + \widehat{K} \int_\Omega |u - w|^2\, dx\,, \qquad (40)$$

звідки

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha| \in M} (\chi_\alpha(x) - a_\alpha(x, \delta w))(D^\alpha u(x) - D^\alpha w(x))\, dx - \widehat{K} \int_\Omega |u - w|^2\, dx \ge 0\,. \qquad (41)$$

Приймемо в (41), що $w = u - \mu v$, де $\mu > 0$ – будь-яке число, а v – довільна функція з $\mathbb{U}_p$:

$$\mu \int_\Omega \sum_{|\alpha| \in M} (\chi_\alpha(x) - a_\alpha(x, \delta(u - \mu v))) D^\alpha v(x)\, dx - \mu^2 \widehat{K} \int_\Omega |v|^2\, dx \ge 0\,. \qquad (42)$$

Поділимо (42) на μ і перейдемо до границі при $\mu \to +0$. Врахувавши умови (**H1**) і (**H2**), на підставі теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла отримаємо

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha| \in M} (\chi_\alpha(x) - a_\alpha(x, \delta u)) D^\alpha v(x)\, dx \ge 0$$

для довільного $v \in \mathbb{U}_p$. Звідси випливає (32). Отже, розв'язність задачі (1), (2) встановлено. Оцінку узагальненого розв'язку отримуємо з (18) та (21). ♦

Д о в е д е н н я **теореми 2**. У цьому випадку доведення існування узагальненого розв'язку задачі (1), (2) аналогічне до доведення теореми 1, за винятком обґрунтування (25). Тут маємо навіть сильніше твердження:

$$g_k^*(\cdot) := \int_\Omega b^*(\cdot, y, u_k(y))\, dy \underset{k \to \infty}{\to} g^*(\cdot) := \int_\Omega b^*(\cdot, y, u(y))\, dy \ \text{ сильно в } L_\infty(\Omega) \qquad (43)$$

де $b^*(x, y, s) := b(x, y, s) - b(x, y, 0)$, $(x, y, s) \in \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}$ Справді, на підставі умови (**H8**) для майже всіх $x \in \Omega$ маємо

$$|g_k(x) - g(x)| = \left| \int_\Omega [b(x, y, u_k(y)) - b(x, y, u(y))] \right| \le$$

$$\le \mathcal{L} \int_\Omega |u_k(y) - u(y)|\, dy \le \mathcal{L} (\mathrm{mes}_n\, \Omega)^{1/q'} \|u_k - u\|_{L_q(\Omega)},$$

звідки з огляду на (22) одержимо (43).

Єдиність узагальненого розв'язку задачі (1), (2) доведемо від супротивного. Припустимо, що існує два (різні) узагальнені розв'язки u_1, u_2 задачі. Тоді для кожного $\ell \in \{1, 2\}$ виконується рівність

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{|\alpha| \in M} a_\alpha(x, \delta u_\ell) D^\alpha v + v \int_\Omega b(x, y, u_\ell(y))\, dy \right\} dx = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \in M} f_\alpha D^\alpha v\, dx \qquad (44)$$

для будь-яких $v \in \mathbb{U}_p$.

Віднімемо від інтегральної тотожності (44), записаної для u_1, таку ж тотожність, записану для u_2. У результаті одержимо

$$\int\limits_{\Omega}\Bigg\{\sum_{|\alpha|\in M}(a_\alpha(x,\delta u_1)-a_\alpha(x,\delta u_2))D^\alpha v+$$

$$+\,v\int\limits_{\Omega}[b(x,y,u_1(y))-b(x,y,u_2(y))]\,dy\Bigg\}dx=0\,, \qquad (45)$$

яка є правильною для будь-яких $v\in\mathbb{U}_p$. Покладемо в (45) $v=w$, де $w:=u_1-u_2$:

$$\int\limits_{\Omega}\Bigg\{\sum_{|\alpha|\in M}(a_\alpha(x,\delta u_1)-a_\alpha(x,\delta u_2))D^\alpha(u_1-u_2)+$$

$$+\,(u_1-u_2)\int\limits_{\Omega}[b(x,y,u_1(y))-b(x,y,u_2(y))]\,dy\Bigg\}dx=0\,. \qquad (46)$$

На підставі умови (**H7**) маємо

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}(a_\alpha(x,\delta u_1)-a_\alpha(x,\delta u_2))D^\alpha(u_1-u_2)\,dx\ge\int\limits_{\Omega}\widehat{K}|w|^2\,dx\,. \qquad (47)$$

Згідно з умовою (**H8**) і нерівністю Коші − Буняковського одержимо

$$\left|\int\limits_{\Omega}(u_1-u_2)\int\limits_{\Omega}[b(x,y,u_1(y))-b(x,y,u_2(y))]\,dy\,dx\right|\le$$

$$\le\mathcal{L}\int\limits_{\Omega}|u_1(x)-u_2(x)|\,dx\int\limits_{\Omega}|u_1(y)-u_2(y)|\,dy=$$

$$=\mathcal{L}\left(\int\limits_{\Omega}|w(x)|\,dx\right)^2\le\mathcal{L}\,\mathrm{mes}_n\,\Omega\int\limits_{\Omega}|w(x)|^2\,dx\,. \qquad (48)$$

З (46), взявши до уваги нерівності (47), (48), отримуємо

$$(\widehat{K}-\mathcal{L}\,\mathrm{mes}_n\,\Omega)\int\limits_{\Omega}|w(x)|^2\,dx\le 0\,.$$

Оскільки $\widehat{K}>\mathcal{L}\,\mathrm{mes}_n\,\Omega$, то $w(x)=0$ для майже всіх $x\in\Omega$, а отже, $u_1=u_2$ майже скрізь на Ω. Отримали протиріччя. Теорему 2 доведено. ♦

1. *Бокало М. М., Дмитрів В. М.* Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь в анізотропних просторах // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. − 2001. − Вип. 59. − С. 84−101.
2. *Бокало М. М., Кушнір О. В.* Про коректність крайових задач для квазілінійних еліптичних систем в необмежених областях // Мат. студії. − 2005. − **24**, № 1. − С. 69−82.
3. *Бугрій О. М.* Про задачі з однорідними граничними умовами для нелінійних рівнянь з виродженням // Укр. мат. вісн. − 2008. − **5**, № 4. − С. 435−469.
4. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. − Москва: Наука, 1982. − 304 с.
5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. − Москва: Мир, 1972. − 608 с.

   Те саме: *Lions J.-L.* Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaire. − Paris: Gauthier-Villars, 1969. − xx+554 p.
6. *Barles G., Imbert C.* Second-order elliptic integro-differential equations: viscosity solutions' theory revisited // Ann. l'Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire. − 2008. − **25**, No. 3. − P. 567−585.
7. *Bokalo M., Domanska O.* On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue−Sobolev spaces // Мат. студії. − 2007. − **28**, № 1. − С. 77−91.

8. *Boureanu M.-M., Pucci P., Rădulescu V. D.* Multiplicity of solutions for a class of anisotropic elliptic equations with variable exponent // Complex Var. Elliptic Equ. – 2011. – **56**, No. 7-9. – P. 755–767.
9. *Caffarelli L., Silvestre L.* Regularity theory for fully nonlinear integro-differential equations // Commun. Pure Appl. Math. – 2009. – **62**, No. 5. – P. 597–638.
10. *Chipot M., Corrêa F. J. S. A.* Boundary layer solutions to functional elliptic equations // Bull. Braz. Math. Soc. – 2009. – **40**, No. 3. – P. 381–393.
11. *Chipot M., Guesmia S.* On a class of integro-differential problems // Commun. Pure Appl. Anal. – 2010. – **9**, No. 5. – P. 1249–1262.
12. *Cont R., Voltchkova E.* Integro-differential equations for option prices in exponential Lévy models// Finance Stoch. – 2005. – **9**, No. 3. – P. 299–325.
13. *Fan X., Zhao D.* On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$ // J. Math. Anal. Appl. – 2001. – **263**, No. 2. – P. 424–446.
14. *Kováčik O., Rákosník J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ // Czechosl. Math. J. – 1991. – **41**, No. 4. – P. 592–618.
15. *Mashiyev R. A., Cekic B., Buhrii O. M.* Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian equations // E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ. – 2010. – **65**. – P. 1–13.
16. *Růžička M.* Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory. – Lect. Notes in Math. – **1748**. – Berlin: Springer-Verlag, 2000. – xvi+176 p.
17. *Ugovski H.* On integro-differential equations of parabolic and elliptic type // Ann. Polon. Math. – 1969/1970. – **22**, No. 3. – P. 255–275.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Рассматриваются стационарные анизотропные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными высших порядков и переменными показателями нелинейности. Предполагается возможным нелинейное вхождение искомой функции в подынтегральное выражение. Установлены условия существования и единственности обобщенных решений задачи Дирихле для таких уравнений.

DIRICHLET PROBLEM FOR STATIONARY ANISOTROPIC HIGHER ORDER PARTIAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY

The stationary anisotropic higher order partial integro-differential equations with variable exponents of nonlinearity are considered. It is also assumed that the integrand involve the unknown function in the nonlinear way. The conditions of existence and uniqueness of generalized solutions of the Dirichlet problem for such equations are obtained.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
31.12.12