УДК 519.6

С. М. Шахно, І. В. Мельник, Г. П. Ярмола

АНАЛІЗ ЗБІЖНОСТІ КОМБІНОВАНОГО МЕТОДУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Досліджено напівлокальну збіжність комбінованого методу для розв'язування нелінійних рівнянь, побудованого на основі методів Ньютона та хорд, і встановлено порядок збіжності. На тестових прикладах з недиференційовним оператором проведено чисельні експерименти.

Вступ. Розглянемо нелінійне операторне рівняння

$$F(x) + G(x) = 0\,, \tag{1}$$

де оператори F і G визначені на опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y; F – диференційовний за Фреше оператор, G – неперервний оператор, диференційовності якого не вимагається. Потрібно знайти наближений розв'язок $x^* \in D$, який задовольняє рівняння (1).

Для розв'язування поставленої задачі будемо використовувати комбінований диференціально-різницевий метод:

$$x_{-1},\ x_0 \in D\,,$$

$$x_{n+1} = x_n - A_n^{-1}(F(x_n) + G(x_n)), \qquad n \ge 0\,, \tag{2}$$

де $A_n = A(x_{n-1}, x_n)$ – лінійний обмежений оператор.

У статтях [3, 4, 7] розглядається метод (2), у якому $A_n = F'(x_n)$, тобто в ітераційній формулі використовується лише похідна від диференційовної частини. Такий метод збігається до розв'язку з лінійною швидкістю. Більш ефективними для розв'язування (1) є диференціально-різницеві або різницеві методи, які використовують, крім похідної $F'(x_n)$ або її апроксимації, ще й поділені різниці недиференційовної частини G.

У цій статті розглянемо метод, побудований на базі методів Ньютона та хорд. Поклавши у формулі (2) $A_n = F'(x_n) + G(x_{n-1}, x_n)$, отримаємо комбінований метод Ньютона та хорд:

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n) + G(x_{n-1}, x_n)]^{-1}(F(x_n) + G(x_n)), \quad n = 0,1,\ldots. \tag{3}$$

У [3, 4] наведено ітераційну формулу (3) і показано на прикладах, що він збігається швидше, ніж метод (2) з $A_n = F'(x_n)$. У роботі [6] вивчено напівлокальну збіжність методу хорд, однак встановлено лише лінійну збіжність. У праці [2] досліджено збіжність методу (2) з $A_n = F'(x_n) + G(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$ за умов Ліпшиця для поділених різниць першого порядку і встановлено порядок збіжності $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

У цій праці обґрунтуємо напівлокальну збіжність методу (3) з порядком $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ також за умов Ліпшиця для похідних і поділених різниць першого порядку і на чисельних експериментах покажемо ефективність методів (3) і (2) з різними виборами оператора A_n.

1. Аналіз збіжності. Нехай $L(X,Y)$ – простір лінійних обмежених операторів з X в Y.

Означення 1. Лінійний оператор, який діє з X в Y, позначуваний через $G(x,y)$, будемо називати *поділеною різницею першого порядку* для оператора G за фіксованими точками x і y $(x \neq y)$, якщо виконується рівність

$$G(x,y)(x-y) = G(x) - G(y)\,.$$

Теорема 1. *Нехай*: ***1***) *F і G − нелінійні оператори, які діють з відкритої опуклої множини D банахового простору X у банахів простір Y;* ***2***) *F − диференційовний за Фреше оператор, G − неперервний оператор;* ***3***) *$G(\cdot,\cdot)$ − поділені різниці першого порядку оператора G, визначені на множині D;* ***4***) *лінійний оператор $A_0 = F'(x_0) + G(x_{-1}, x_0)$, де $x_{-1}, x_0 \in D$, є оборотним і для всіх $x, y, u, v \in D$ виконуються умови*

$$\left\| A_0^{-1}(F'(x) - F'(y)) \right\| \le 2p_0 \|x - y\|, \tag{4}$$

$$\left\| A_0^{-1}(G(x,y) - G(u,v)) \right\| \le q_0 (\|x-u\| + \|y - v\|)\,; \tag{5}$$

5) *a, c, r_0 − невід'ємні числа такі, що*

$$\|x_0 - x_{-1}\| \le a, \qquad \left\| A_0^{-1}(F(x_0) + G(x_0)) \right\| \le c\,, \tag{6}$$

$$r_0 \ge \frac{c}{1-\gamma}, \qquad q_0 a + 2p_0 r_0 + 2q_0 r_0 < 1\,,$$

$$\gamma = \frac{p_0 r_0 + q_0(r_0 + a)}{1 - q_0 a - 2p_0 r_0 - 2q_0 r_0}, \qquad 0 \le \gamma < 1\,; \tag{7}$$

6) *замкнена куля $U = \{x : \|x - x_0\| \le r_0\}$ міститься в D.*

Тоді ітераційний процес (3) *є добре визначений і генерована ним послідовність збігається до розв'язку x^* рівняння* (1) і *для всіх $n \in \{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$ справджуються нерівності*

$$\|x_n - x_{n+1}\| \le t_n - t_{n+1}\,, \tag{8}$$

$$\left\| x_n - x^* \right\| \le t_n - t^*\,, \tag{9}$$

де послідовність $\{t_n\}_{n \ge -1}$, визначена за формулами

$$t_{-1} = r_0 + a, \qquad t_0 = r_0, \qquad t_1 = r_0 - c\,,$$

$$t_{n+1} - t_{n+2} = \frac{p_0(t_n - t_{n+1}) + q_0(t_{n-1} - t_{n+1})}{1 - q_0 a - 2p_0(t_0 - t_{n+1}) - q_0(2t_0 - t_n - t_{n+1})}(t_n - t_{n+1}), \quad n \ge 0\,, \tag{10}$$

є спадною і невід'ємною і збігається до t^* такого, що $r_0 - \dfrac{c}{1-\gamma} \le t^* < t_{-1}$.

Д о в е д е н н я. Методом математичної індукції покажемо, що для всіх $k \ge 0$ виконується

$$t_{k+1} \ge t_{k+2} \ge r_0 - \frac{1-\gamma^{k+2}}{1-\gamma} c \ge r_0 - \frac{c}{1-\gamma} \ge 0\,, \tag{11}$$

$$t_{k+1} - t_{k+2} \le \gamma (t_k - t_{k+1})\,. \tag{12}$$

З (10) для $k = 0$ отримаємо

$$t_1 - t_2 = \frac{p_0(t_0 - t_1) + q_0(t_{-1} - t_1)}{1 - q_0 a - 2p_0(t_0 - t_1) - q_0(2t_0 - t_0 - t_1)}(t_0 - t_1) \le \gamma(t_0 - t_1)\,,$$

$$t_0 \ge t_1\,,$$

$$t_1 \geq t_2 \geq t_1 - \gamma(t_0 - t_1) = r_0 - (1+\gamma)c = r_0 - \frac{(1-\gamma^2)c}{1-\gamma} \geq r_0 - \frac{c}{1-\gamma} \geq 0 .$$

Припустимо, що (11) і (12) виконуються для $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тоді для $k = n$ отримаємо

$$t_{n+1} - t_{n+2} = \frac{p_0(t_n - t_{n+1}) + q_0(t_{n-1} - t_{n+1})}{1 - q_0 a - 2p_0(t_0 - t_{n+1}) - q_0(2t_0 - t_n - t_{n+1})}(t_n - t_{n+1}) \leq$$

$$\leq \frac{p_0 t_n + q_0 t_{n-1}}{1 - q_0 a - 2p_0 t_0 - 2q_0 t_0}(t_n - t_{n+1}) \leq \gamma(t_n - t_{n+1}),$$

$$t_{n+1} \geq t_{n+2} \geq t_{n+1} - \gamma(t_n - t_{n+1}) \geq r_0 - \frac{1-\gamma^{n+2}}{1-\gamma} c \geq r_0 - \frac{c}{1-\gamma} \geq 0 .$$

Отже, $\{t_n\}_{n\geq -1}$ − спадна невід'ємна послідовність і збігається до $t^* \geq r_0 - \dfrac{c}{1-\gamma} \geq 0$.

Методом математичної індукції доведемо, що ітераційний процес (3) є коректно визначений і для всіх n виконується нерівність (8).

Враховуючи (6) і те, що $t_{-1} - t_0 = a,\ t_0 - t_1 = c$, отримаємо, що $x_1 \in U$ і (8) виконується для $k \in \{-1, 0\}$. Нехай умови (8) виконуються для $k = 1, \ldots, n$. Доведемо, що ітераційний процес (3) є добре визначений для $k = n+1$.

Позначимо $A_n = F'(x_n) + G(x_{n-1}, x_n)$. Використовуючи умови Ліпшиця (4) і (5), матимемо

$$\left\| I - A_0^{-1} A_{n+1} \right\| = \left\| A_0^{-1}(A_0 - A_{n+1}) \right\| \leq \left\| A_0^{-1}(F'(x_0) - F'(x_{n+1})) \right\| +$$

$$+ \left\| A_0^{-1}(G(x_{-1}, x_0) - G(x_n, x_0) + G(x_n, x_0) - G(x_n, x_{n+1})) \right\| \leq$$

$$\leq 2p_0 \|x_0 - x_{n+1}\| + q_0(\|x_{-1} - x_0\| + \|x_0 - x_n\| + \|x_0 - x_{n+1}\|) \leq$$

$$\leq 2p_0 \|x_0 - x_{n+1}\| + q_0 a + q_0(\|x_0 - x_n\| + \|x_0 - x_{n+1}\|) \leq$$

$$\leq q_0 a + 2p_0(t_0 - t_{n+1}) + q_0(2t_0 - t_{n+1} - t_n) \leq$$

$$\leq q_0 a + 2p_0 r_0 + 2q_0 r_0 < 1 .$$

Згідно з теоремою Банаха про оборотні оператори, оператор A_{n+1} має обернений і

$$\left\| A_{n+1}^{-1} A_0 \right\| \leq (1 - 2p_0\|x_0 - x_{n+1}\| - q_0 a - q_0(\|x_0 - x_n\| + \|x_0 - x_{n+1}\|))^{-1} .$$

Враховуючи означення поділеної різниці та умови (4), (5), отримаємо

$$\left\| A_0^{-1}(F(x_{n+1}) + G(x_{n+1})) \right\| =$$

$$= \left\| A_0^{-1}(F(x_{n+1}) + G(x_{n+1}) - F(x_n) - G(x_n) - A_n(x_{n+1} - x_n)) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| A_0^{-1} \left(\int_0^1 \{F'(x_{n+1} + t(x_n - x_{n+1})) - F'(x_n)\}\, dt \right) \right\| \|x_n - x_{n+1}\| +$$

$$+ \left\| A_0^{-1}(G(x_{n+1}, x_n) - G(x_{n-1}, x_n)) \right\| \|x_n - x_{n+1}\| \leq$$

$$\leq \left(p_0 \|x_n - x_{n+1}\| + q_0(\|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n-1} - x_n\|)\right) \|x_n - x_{n+1}\| .$$

Звідси, врахувавши умову (8), маємо

$$\|x_{n+1}-x_{n+2}\| = \left\|A_{n+1}^{-1}(F(x_{n+1})+G(x_{n+1}))\right\| \le$$

$$\le \left\|A_{n+1}^{-1}A_0\right\|\left\|A_0^{-1}(F(x_{n+1})+G(x_{n+1}))\right\| \le$$

$$\le \frac{p_0\|x_n-x_{n+1}\|+q_0(\|x_n-x_{n+1}\|+\|x_{n-1}-x_n\|)}{1-q_0a-2p_0\|x_0-x_{n+1}\|-q_0(\|x_0-x_{n+1}\|+\|x_0-x_n\|)}\|x_n-x_{n+1}\| \le$$

$$\le \frac{p_0(t_n-t_{n+1})+q_0(t_{n-1}-t_{n+1})}{1-q_0a-2p_0(t_0-t_{n+1})-q_0(2t_0-t_n-t_{n+1})}(t_n-t_{n+1}) = t_{n+1}-t_{n+2}.$$

Отже, ітераційний процес (3) добре визначений для всіх n. Звідси випливає, що

$$\|x_n-x_k\| \le t_n-t_k, \qquad -1 \le n \le k, \tag{13}$$

тобто послідовність $\{x_n\}_{n\ge0}$ є фундаментальною і збіжною до деякого $x^* \in X$. З (13) при $k\to\infty$ випливає нерівність (9). Покажемо, що x^* є коренем рівняння $F(x)+G(x)=0$. Справді

$$\left\|A_0^{-1}(F(x_{n+1})+G(x_{n+1}))\right\| =$$

$$= \left\|A^{-1}(F(x_{n+1},x_n)+G(x_{n+1},x_n)-A)(x_{n+1}-x_n)\right\| \le$$

$$\le (p_0\|x_n-x_{n+1}\|+q_0(\|x_n-x_{n+1}\|+\|x_{n-1}-x_n\|))\times$$

$$\times\|x_n-x_{n+1}\| \to 0, \qquad n\to\infty.$$

Отже, $F(x^*)+G(x^*)=0$. Теорему доведено. ♦

Наслідок 1. *Порядок збіжності методу* (3) *дорівнює* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Д о в е д е н н я. З (10), врахувавши, що $t_n-t_{n+1} \le \gamma(t_{n-1}-t_n)$, отримаємо

$$t_{n+1}-t_{n+2} = \frac{p_0(t_n-t_{n+1})+q_0(t_n-t_{n+1}+t_{n-1}-t_n)}{1-q_0a-2p_0(t_0-t_{n+1})-q_0(2t_0-t_n-t_{n+1})}(t_n-t_{n+1}) \le$$

$$\le \frac{p_0\gamma(t_{n-1}-t_n)+q_0(1+\gamma)(t_{n-1}-t_n)}{1-q_0a-2p_0(t_0-t_{n+1})-q_0(2t_0-t_n-t_{n+1})}(t_n-t_{n+1}) =$$

$$= \frac{p_0\gamma+q_0(1+\gamma)}{1-q_0a-2p_0(t_0-t_{n+1})-q_0(2t_0-t_n-t_{n+1})}\times$$

$$\times(t_n-t_{n+1})(t_{n-1}-t_n) \le$$

$$\le \frac{p_0\gamma+q_0(1+\gamma)}{1-q_0a-2p_0t_0-2q_0t_0}(t_n-t_{n+1})(t_{n-1}-t_n).$$

Позначимо $C=\frac{p_0\gamma+q_0(1+\gamma)}{1-q_0a-2p_0t_0-2q_0t_0}$. Очевидно, що

$$t_{n+1}-t_{n+2} \le C(t_{n-1}-t^*)(t_n-t^*). \tag{14}$$

Оскільки для будь-якого $k\ge2$ справджується оцінка

$$t_{n+k-1}-t_{n+k} \le \gamma^{k-2}(t_{n+1}-t_{n+2}),$$

то

$$t_{n+1} - t_{n+k} = t_{n+1} - t_{n+2} + t_{n+2} - t_{n+3} + \ldots + t_{n+k-1} - t_{n+k} \le$$
$$\le (1 + \gamma + \ldots + \gamma^{k-2})(t_{n+1} - t_{n+2}) =$$
$$= \frac{1 - \gamma^{k-1}}{1 - \gamma}(t_{n+1} - t_{n+2}) \le \frac{1}{1 - \gamma}(t_{n+1} - t_{n+2}).$$

Врахувавши (14), при $k \to \infty$ отримаємо

$$t_{n+1} - t^* \le \frac{C}{1 - \gamma}(t_n - t^*)(t_{n-1} - t^*).$$

Звідси випливає, що порядок збіжності послідовності $\{t_n\}_{n \ge -1}$ дорівнює $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ і, згідно з (9), послідовність $\{x_n\}_{n \ge 0}$ збігається з тим же порядком.

Зауваження 1. У праці [5] проведено дослідження методу типу хорд за умови

$$\|H(x,y) - H(u,v)\| \le \omega(\|x - u\|, \|y - v\|), \qquad x, y, u, v \in D, \tag{15}$$

де $H(x) = F(x) + G(x)$, а $\omega : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – неперервна неспадна функція двох аргументів. Ця умова узагальнює класичні умову Ліпшиця при $\omega(u_1, u_2) = k(u_1 + u_2)$ та умову Гельдера при $\omega(u_1, u_2) = k(u_1^p + u_2^p)$, $p \in (0,1]$ для поділених різниць першого порядку. Якщо ж $\omega(0,0) = 0$, то оператор H є диференційовним [5] і $H'(x) = H(x,x)$, $x \in D$. У загальному випадку умова (15) не включає диференційовності H.

Зауваження 2. Очевидно, що для умови (5) маємо $\omega(0,0) = 0$, тому оператор G є диференційовним за Фреше в D.

2. Чисельні експерименти. Існують різні способи обчислення A_n. Розглянемо дев'ять з них:

1°) $A_n = F'(x_n) + G(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$ – комбінований метод Ньютона і Курчатова);

2°) $A_n = F'(x_n) + G(x_{n-1}, x_n)$ – комбінований метод Ньютона і хорд);

3°) $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}) + G(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$ – метод Курчатова [1]);

4°) $A_n = F(x_{n-1}, x_n) + G(x_{n-1}, x_n)$ – метод хорд);

5°) $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}) + G(x_{n-1}, x_n)$ – комбінація методів Курчатова і хорд);

6°) $A_n = F(x_{n-1}, x_n) + G(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$ – комбінація методів хорд і Курчатова);

7°) $A_n = F'(x_n)$;

8°) $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$;

9°) $A_n = F(x_{n-1}, x_n)$.

Протестуємо метод (2) з вибором A_n у вигляді ***1°*** – ***9°*** на конкретних прикладах.

Приклад 1.

$$3x^2 y + y^2 - 1 + |x - 1| = 0,$$
$$x^4 + xy^3 - 1 + |y| = 0,$$
$$(x^*, y^*) = (0.894655373334687,\ 0.327826521746298).$$

Приклад 2.

$$z^2(1-y)-xy+|y-z^2|=0,$$

$$z^2(x^3-x)-y^2+|3y^2-z^2+1|=0,$$

$$6xy^3+y^2z^2-xy^2z+|x+z-y|=0,$$

$$(x^*,y^*,z^*)=(-1,\ 2,\ 3).$$

Для *прикладу 1* будемо використовувати різні початкові наближення. Спочатку протестуємо методи для початкового наближення $x_{-1}=(5,5)$, $x_0=(1,0)$.

Використовуючи метод (2), де $A_n=F(x_{n-1},x_n)$ (спосіб ***9°***), розв'язок отримаємо за 34 ітерації (див. табл. 1, де наведено значення наближення до розв'язку та норми різниці сусідніх наближень на кожній ітерації). Якщо ж $A_n=F(2x_n-x_{n-1},x_{n-1})$ (спосіб ***8°***), одержимо такі ж результати за 33 ітерації, а у випадку вибору $A_n=F'(x_n)$ (спосіб **7°**) – за 32 ітерації. Отже, швидкість збіжності практично однакова. Кількість ітерацій відрізняється неістотно, проте є достатньо великою, оскільки в операторі A_n не використовується інформація про G.

Таблиця 1

n	x_n^1	x_n^2	$\|x_n-x_{n-1}\|$
−1	5	5	
0	1	0	5
1	0.9899839743590	0.0125	0.0125
2	0.9968146230778	0.3287042925137	0.3162042925137
3	0.9072783652459	0.3544089918895	0.0895362578320
4	0.8881088373887	0.3394750162909	0.0191695278572
5	0.8905956629508	0.3284261592128	0.0110488570781
6	0.8946286003630	0.3265079767781	0.0040329374121
7	0.8951416441184	0.3275466934852	0.0010387167072
8	0.8947410197543	0.3279365138554	0.0004006243641
9	0.8946122847128	0.3278794154516	0.0001287350415
10	0.8946375072413	0.3278227224249	$5.6693026693533\cdot10^{-5}$
11	0.8946573815369	0.3278195212349	$1.9874295595024\cdot10^{-5}$
…			
34	0.8946553733347	0.327826521746298	$3.8857805861881\cdot10^{-16}$

Протестуємо *комбіновані* різницеві методи на системі рівнянь з *прикладу 1*. У табл. 2 подано результати обчислень, отримані методом (2) з вибором $A_n=F(2x_n-x_{n-1},x_{n-1})+G(x_{n-1},x_n)$ – спосіб **5°**.

Таблиця 2

n	x_n^1	x_n^2	$\|x_n-x_{n-1}\|$
−1	5	5	
0	1	0	5
1	1.0098600932712	0.0257161892072	0.0257161892072
2	0.9168521523308	0.3422833129352	0.3165671237280
3	0.9012543256152	0.3152397068173	0.0270436061180
4	0.8945350900263	0.3284539218010	0.0132142149838
5	0.8946575149779	0.3278213954207	0.0006325263803
6	0.8946553728081	0.3278265231449	$5.1277241693293\cdot10^{-6}$
7	0.8946553733347	0.3278265217463	$1.3985939073535\cdot10^{-9}$
8	0.8946553733347	0.3278265217463	$6.1062266354384\cdot10^{-16}$

За таку ж кількість ітерацій отримано розв'язок методом (2) у випадку $A_n = F(x_{n-1}, x_n) + G(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$ – спосіб ***6°***.

Для комбінацій методів Курчатова та хорд отримали приблизно однакові результати, тому при достатньо близькому до розв'язку початковому наближенні можемо використовувати будь-який із цих методів.

Застосовуючи метод хорд з $A_n = F(x_{n-1}, x_n) + G(x_{n-1}, x_n)$ (спосіб ***4°***) і метод Курчатова, в якому $A_n = F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}) + G(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$ (спосіб ***3°***), отримуємо розв'язок за 8 ітерацій. Отже, одержані результати подібні до результатів застосування комбінованих методів Курчатова та хорд.

Найкращих результатів можна досягнути при використанні ітераційних процесів з аналітично заданими похідними для F і поділеними різницями для G. Такими методами є комбінація методів Ньютона та хорд або Ньютона та Курчатова. Для методу (2) з $A_n = F'(x_n) + G(x_{n-1}, x_n)$ (спосіб ***2°*** – комбінація методів Ньютона та хорд) одержані результати обчислень подано в табл. 3.

Таблиця 3

n	x_n^1	x_n^2	$\lVert x_n - x_{n-1} \rVert$
−1	5	5	
0	1	0	5
1	0.9090909090909	0.3636363636364	0.3636363636364
2	0.8948869458741	0.3290986382031	0.0345377254333
3	0.8946555319915	0.3278275447456	0.0012710934575
4	0.8946553733348	0.3278265217469	$1.0229986626142 \cdot 10^{-6}$
5	0.8946553733347	0.3278265217463	$6.0895732900689 \cdot 10^{-13}$
6	0.8946553733347	0.3278265217463	$5.5511151231257 \cdot 10^{-17}$

У випадку комбінації методів Ньютона та Курчатова (спосіб ***1°***), тобто поклавши в (2) $A_n = F'(x_n) + G(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$, отримаємо результати, наведені в табл. 4.

Таблиця 4

n	x_n^1	x_n^2	$\lVert x_n - x_{n-1} \rVert$
−1	5	5	
0	1	0	5
1	1	0.3333333333333	0.3333333333333
2	0.9003051881994	0.3574092912851	0.0996948118006
3	0.8947572607934	0.3283714367598	0.0290378545254
4	0.8946554021147	0.3278267124428	0.0005447243170
5	0.8946553733347	0.3278265217463	$1.9069645346148 \cdot 10^{-7}$
6	0.8946553733347	0.3278265217463	$2.0872192862953 \cdot 10^{-14}$
7	0.8946553733347	0.3278265217463	$5.5511151231258 \cdot 10^{-17}$

Як бачимо, комбінований метод Ньютона – хорд виявився швидшим, ніж комбінований метод Ньютона – Курчатова. Це пояснюється тим, що початкові наближення не є близькі між собою. Як відомо, метод Курчатова добре працює при близьких початкових наближеннях, це буде показано нижче.

У табл. 1 – табл. 4 точність наближеного розв'язку $\varepsilon = 10^{-15}$.

Наведені обчислення для *прикладу 1* свідчать, що метод (2) з вибором A_n у вигляді ***1° – 6°*** збігається з надлінійною швидкістю збіжності, а з вибором A_n способами ***7° – 9°*** збіжність є гіршою, з лінійною швидкістю.

Змінимо початкові наближення і точність, з якою шукаємо наближений розв'язок. Виберемо початкові наближення $x_0 = (d, 0)$, $x_{-1} = x_0 - 10^{-4}$, де $d = 1, 10, 100$, та задамо точність $\varepsilon = 10^{-5}$ і $\varepsilon = 10^{-15}$. Кількість ітерацій, необхідних для знаходження розв'язку *прикладу 1* методом (2) при виборі A_n у вигляді ***1°* − *9°***, подано у табл. 5.

Таблиця 5

d	ε	Вибір A_n								
		1°	***2°***	***3°***	***4°***	***5°***	***6°***	***7°***	***8°***	***9°***
1	10^{-5}	5	6	6	6	7	6	11	11	11
	10^{-15}	7	8	8	9	9	8	33	33	32
10	10^{-5}	13	13	15	17	14	18	20	19	23
	10^{-15}	14	15	16	20	16	20	41	41	45
100	10^{-5}	21	21	23	29	23	29	27	29	34
	10^{-15}	22	23	25	31	26	31	49	51	56

Як бачимо, методи з використанням A_n у вигляді ***1°*** і ***3°*** дещо швидше збігаються, ніж з A_n у вигляді ***2°*** і ***4°***. Особливо ця перевага помітна для різницевих методів при x_0, «далеких» від розв'язку.

Для *прикладу 2* за початкові наближення виберемо $x_0 = (-1.5, 2.5, 3.5)$, $x_{-1} = x_0 - 10^{-4}$ і точність $\varepsilon = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}$. Кількість ітерацій, необхідних для знаходження розв'язку системи з *прикладу 2* методом (2) при виборі A_n у вигляді ***1°* − *9°***, наведено в табл. 6.

Таблиця 6

ε	Вибір A_n								
	1°	***2°***	***3°***	***4°***	***5°***	***6°***	***7°***	***8°***	***9°***
10^{-3}	5	5	5	6	5	6	11	49	12
10^{-6}	7	7	7	8	7	8	33	111	75
10^{-9}	8	8	8	10	8	10	55	174	137

Можна зауважити, що метод (2) з вибором A_n за формулами ***7°* − *9°*** збігається дуже повільно. Тому варто застосовувати методи, які в A_n використовують не тільки оператор F, але ще й оператор G.

3. Висновки. У цій статті розглянуто методи для розв'язування нелінійних рівнянь з недиференційовним операторам. Досліджено напівлокальну збіжність ітераційного процесу (3) і проведено порівняння його на тестових задачах з іншими методами, які є модифікаціями методу Ньютона. Сам метод Ньютона не можна використовувати для рівнянь з недиференційовними операторами, оскільки він потребує аналітично заданих похідних.

На прикладах показано, як відрізняється збіжність методів. Числові експерименти показали, що найшвидшими методами виявилися ті, в яких використовували аналітично задану похідну для оператора F та поділені різниці для G, тобто ***1°*** і ***2°*** (комбінований метод Ньютона та Курчатова і комбінований метод Ньютона та хорд). Методи, які використовували будь-які комбінації тільки поділених різниць ***3°* − *6°***, збігаються повільніше, а методи з вибором оператора A_n за формулами **7° – 9°** збігаються найгірше. Методи з поділеними різницями $G(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})$ давали кращий результат, ніж методи з $G(x_{n-1}, x_n)$, коли були задані близькі між собою початкові наближення x_{-1}, x_0. В іншому випадку вибір поділених різниць не відігравав істотної ролі.

1. *Курчатов В. А.* Об одном методе линейной интерполяции решения функциональных уравнений // Докл. АН СССР. – 1971. – **198**, № 3. – С. 524–526.
2. *Шахно С. М., Ярмола Г. П.* Двоточковий метод для розв'язування нелінійних рівнянь з недиференційовним оператором // Мат. студії. – 2011. – **36**, № 2. – С. 213–220.
3. *Argyros I. K.* A unifying local-semilocal convergence analysis and applications for two-point Newton-like methods in Banach space // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – **298**, No. 2. – P. 374–397.
4. *Argyros I. K.* Improving the rate of convergence of Newton methods on Banach spaces with a convergence structure and applications // Appl. Math. Lett. – 1997. – **10**, No. 6. – P. 21–28.
5. *Hernández M. A., Rubio M. J.* A uniparametric family of iterative processes for solving nondifferentiable equations // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – **275**, No. 2. – P. 821–834.
6. *Hernández M. A., Rubio M. J.* The secant method for nondifferentiable operators // Appl. Math. Lett. – 2002. – **15**, No. 4. – P. 395–399.
7. *Zabrejko P. P., Nguen D. F.* The majorant method in the theory of Newton-Kantorovich approximations and the Pták error estimates // Numer. Funct. Anal. Optim. – 1987. – **9**, No. 5-6. – P. 671–684.

АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ КОМБИНИРОВАННОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследована полулокальная сходимость комбинированного метода для решения нелинейных уравнений, построенного на основе методов Ньютона и хорд, и установлен порядок сходимости. На тестовых примерах с недифференцируемым оператором проведен численные эксперименты.

CONVERGENCE ANALYSIS OF COMBINED METHOD FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS

The semilocal convergence of a combined method for solving nonlinear equations, based on Newton's method and secant method, is investigated and the convergence order is set. A numerical experiment is carried out on the test examples with nondifferentiable operator.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
04.07.12