УДК 519.62

М. В. Кутнів, О. І. Паздрій

ТРИТОЧКОВІ РІЗНИЦЕВІ СХЕМИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПІВПРЯМІЙ

Розроблено алгоритмічну реалізацію точної триточкової різницевої схеми розв'язування крайової задачі на півпрямій для систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку через триточкові різницеві схеми рангу $\overline{n} = 2[(n+1)/2]$ (де $[\cdot]$ – ціла частина). Доведено існування і єдиність розв'язку триточкових різницевих схем рангу $\overline{n}$ та отримано оцінку їхньої точності. Наведено результати чисельних експериментів.

Для чисельного розв'язування крайових задач на нескінченному проміжку існує декілька підходів. Перший полягає у заміні крайових умов на безмежності крайовими умовами в деяких скінченних точках, які знаходять методом проб (див., наприклад, [6]). Інший підхід полягає у заміні крайових умов на безмежності асимптотичними умовами в скінченній точці (див. [10, 12, 13]). В [11] запропоновано заміну змінних, яка дозволяє звести крайову задачу на безмежному інтервалі до сингулярної крайової задачі другого роду на скінченному інтервалі, а в [5] на основі методу колокації розроблено алгоритм їх чисельного розв'язування. Ще один підхід до розв'язування нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку на півосі ґрунтується на побудові триточкових різницевих схем (ТРС) високого порядку точності на скінченній нерівномірній сітці з нелінійною крайовою умовою на правому кінці сітки [1, 2, 7, 8].

У цій роботі результати, отримані в [2], узагальнено на випадок крайової задачі для системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку на півосі:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dx^2} + \boldsymbol{\mathcal{A}}\frac{d\mathbf{u}}{dx} = -\mathbf{f}(x,\mathbf{u}), \quad x \in (0,\infty), \tag{1}$$

$$\mathbf{u}(0) = \boldsymbol{\mu}_1, \qquad \lim_{x\to\infty} \mathbf{u}(x) = 0, \tag{2}$$

де $\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}_1 \in \mathbb{R}^n$, вектор-функція $\mathbf{f}(x,\mathbf{u}(x)) = \{f_i(x,\mathbf{u}(x))\}_{i=1}^n$ і матриця $\boldsymbol{\mathcal{A}} = [a_{is}]_{i,s=1}^n$.

Нехай виконуються такі умови:

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}^*, \qquad m^2\|\mathbf{v}\|^2 \le (\boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{v},\mathbf{v}) \le M^2\|\mathbf{v}\|^2 \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

$$f_{i\mathbf{u}}(x) \equiv f_i(x,\mathbf{u}) \in Q^0[0,\infty), \qquad |f_i(x,\mathbf{u})| \le K_i(x) \in L_2[0,\infty), \tag{4}$$

$$\forall x \in [0,\infty) \quad \mathbf{u} \in \Omega([0,\infty),r), \qquad r = \max\left\{\frac{1}{m^2},1\right\}\int_0^\infty \|\mathbf{K}(\xi)\|\,d\xi, \tag{5}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}}x}\int_0^x e^{\boldsymbol{\mathcal{A}}\xi}\mathbf{K}(\xi)\,d\xi = 0, \tag{6}$$

$$\|\mathbf{f}(x,\mathbf{u}) - \mathbf{f}(x,\mathbf{v})\| \le \mathcal{L}(x)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \qquad \forall x \in [0,\infty), \quad \mathbf{u},\mathbf{v} \in \Omega([0,\infty),r), \tag{7}$$

$$\mathcal{L}(x) \in L_1[0,\infty), \qquad q = \max\left\{\frac{1}{m^2},1\right\}\int_0^\infty \mathcal{L}(\xi)\,d\xi < 1. \tag{8}$$

Тоді задача (1), (2) у $\Omega([0,\infty),r)$ має єдиний розв'язок $\mathbf{u}(x)$ (див. [4]). Тут $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ – скалярний добуток двох векторів $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$; $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v},\mathbf{v})^{1/2}$ – норма

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2013. – 56, № 1. – С. 40-51.

вектора; $\mathbf{K}(x)=\{K_i(x)\}_{i=1}^n$, $Q^0[0,\infty)$ − клас кусково-неперервних функцій зі скінченною кількістю точок розриву першого роду, m та M − дійсні сталі; $\mathbf{u}^{(0)}(x)=e^{-\mathcal{A}x}\boldsymbol{\mu}_1$ − початкове наближення; множина

$$\Omega(D,\beta)=\left\{\mathbf{u}(x):\mathbf{u}(x)\in C^1[0,\infty),\ \left\|\mathbf{u}-\mathbf{u}^{(0)}\right\|_{1,\infty,D}\le\beta,\ D\subseteq[0,\infty)\right\},$$

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\infty,D}=\max\left\{\|\mathbf{u}\|_{0,\infty,D},\left\|\frac{d\mathbf{u}}{dx}\right\|_{0,\infty,D}\right\},\quad \|\mathbf{u}\|_{0,\infty,D}=\max_{x\in D}\|\mathbf{u}(x)\|.$$

Введемо на інтервалі $[0,\infty)$ нерівномірну сітку

$$\hat{\bar{\omega}}_N=\{x_j\in[0,\infty),\ j=0,1,\ldots,N,\ \ x_0=0,\ \ h_j=x_j-x_{j-1}>0,$$
$$h_1+h_2+\ldots+h_N=x_N\}$$

так, щоб точки розриву компонент вектора $\mathbf{f}(x,\mathbf{u})$ збігались з вузлами сітки. Множину всіх точок розриву позначимо через ρ і будемо вважати, що N таке, що $\rho\subseteq\hat{\bar{\omega}}_N$. Накладемо на кроки h_j сітки $\hat{\bar{\omega}}_N$ такі обмеження (див. [3]): $c_1\le h_{\max}/h_{\min}\le c_2$, де c_1,c_2 − дійсні сталі. Для того щоб різницева схема досягала максимального порядку збіжності, повинні виконуватись умови $1/h_{\max}\le x_N\le 1/h_{\min}$. Звідси випливають нерівності

$$h_{\max}\le\frac{c_2}{\sqrt{N}},\quad h_{\min}\ge\frac{1}{c_2\sqrt{N}},\quad \frac{\sqrt{N}}{c_2}\le h_{\min}N\le x_N\le h_{\max}N\le c_2\sqrt{N},$$

які забезпечують виконання природних обмежень для такої сітки:

$$h_{\max}\to 0,\qquad x_N\to\infty\qquad \text{при}\qquad N\to\infty.$$

У [4] доведено, що коли виконуються умови (3)−(8), то для задачі (1), (2) існує ТТРС вигляду

$$\frac{1}{\hbar_j}(B_j\mathbf{u}_{x,j}-A_j\mathbf{u}_{\bar{x},j})=-\boldsymbol{\varphi}(x_j,\mathbf{u}),\qquad j=1,2,\ldots,N-1,\tag{9}$$

$$\mathbf{u}_0=\boldsymbol{\mu}_1,\qquad -A_N\mathbf{u}_{\bar{x},N}=\mathcal{A}\mathbf{u}_N-\boldsymbol{\mu}_2(x_N,\mathbf{u}),\tag{10}$$

де

$$\hbar_j=(h_{j+1}+h_j)/2,\qquad A_j=h_j\mathcal{A}(e^{\mathcal{A}h_j}-\mathbf{I})^{-1},\qquad j=1,\ldots,N,$$

$$B_j=h_{j+1}\mathcal{A}(\mathbf{I}-e^{-\mathcal{A}h_{j+1}})^{-1},\qquad j=1,\ldots,N-1,$$

$$\boldsymbol{\varphi}(x_j,\mathbf{u})=\hbar_j^{-1}\big[\mathbf{Z}_2^j(x_j,\mathbf{u})-\mathbf{Z}_1^j(x_j,\mathbf{u})+\mathcal{A}(e^{\mathcal{A}h_j}-\mathbf{I})^{-1}\big(\mathbf{Y}_1^j(x_j,\mathbf{u})-\mathbf{u}_{j-1}\big)+$$
$$+\mathcal{A}(\mathbf{I}-e^{-\mathcal{A}h_{j+1}})^{-1}\big(\mathbf{Y}_2^j(x_j,\mathbf{u})-\mathbf{u}_{j+1}\big)\big],\qquad j=1,2,\ldots,N-1,$$

$$\boldsymbol{\mu}_2(x_N,\mathbf{u})=\mathbf{Z}_2^N(x_N,\mathbf{u})-\mathbf{Z}_1^N(x_N,\mathbf{u})+\mathcal{A}\mathbf{Y}_2^N(x_N,\mathbf{u})+$$
$$+\mathcal{A}(e^{\mathcal{A}h_N}-\mathbf{I})^{-1}\big(\mathbf{Y}_1^N(x_N,\mathbf{u})-\mathbf{u}_{N-1}\big),$$

$\mathbf{I}$ − одинична матриця; $\mathbf{Y}_\alpha^j(x_j,\mathbf{u})$, $\mathbf{Z}_\alpha^j(x_j,\mathbf{u})$, $\alpha=1,2$, − розв'язки задач Коші

$$\frac{d\mathbf{Y}_\alpha^j(x,\mathbf{u})}{dx}=\mathbf{Z}_\alpha^j(x,\mathbf{u}),\qquad \frac{d\mathbf{Z}_\alpha^j(x,\mathbf{u})}{dx}+\mathcal{A}\mathbf{Z}_\alpha^j(x,\mathbf{u})=-\mathbf{f}\big(x,\mathbf{Y}_\alpha^j(x,\mathbf{u})\big),$$
$$x_{j-2+\alpha}<x<x_{j-1+\alpha},\tag{11}$$

$$\mathbf{Y}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\mathbf{u})=\mathbf{u}_{j+(-1)^\alpha},\qquad \mathbf{Z}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\mathbf{u})=\left.\frac{d\mathbf{u}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}},$$
$$j=2-\alpha,\,3-\alpha,\,\ldots,\,N+1-\alpha,\qquad \alpha=1,2,\tag{12}$$

а $\mathbf{Y}_2^N(x,\mathbf{u})$, $\mathbf{Z}_2^N(x,\mathbf{u})$ – розв'язки крайової задачі

$$\frac{d\mathbf{Y}_2^N(x,\mathbf{u})}{dx} = \mathbf{Z}_2^N(x,\mathbf{u}),$$

$$\frac{d\mathbf{Z}_2^N(x,\mathbf{u})}{dx} + \boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{Z}_2^N(x,\mathbf{u}) = -\mathbf{f}(x, \mathbf{Y}_2^N(x,\mathbf{u})), \qquad x > x_N, \tag{13}$$

$$\mathbf{Y}_2^N(x_N,\mathbf{u}) = \mathbf{u}(x_N), \qquad \lim_{x\to\infty} \mathbf{Y}_2^N(x,\mathbf{u}) = 0. \tag{14}$$

Тобто для побудови ТТРС (9), (10) $\forall x_j \in \hat{\omega}_N$ необхідно розв'язати дві задачі Коші (11), (12) та крайову задачу (13), (14).

Для побудови ТРС рангу $\overline{n} = 2[(n+1)/2]$ ($[\cdot]$ – ціла частина) задачі Коші (11), (12) будемо розв'язувати чисельно за допомогою однокрокового методу (розвинення у ряд Тейлора або Рунґе – Кутта):

$$\mathbf{Y}_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,\mathbf{u}) = \mathbf{u}_{j+(-1)^\alpha} +$$
$$+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\boldsymbol{\Phi}_1\left(x_{j+(-1)^\alpha}, \mathbf{u}_{j+(-1)^\alpha}, \mathbf{u}'_{j+(-1)^\alpha}, (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right), \tag{15}$$

$$\mathbf{Z}_\alpha^{(n)j}(x_j,\mathbf{u}) = \mathbf{u}'_{j+(-1)^\alpha} +$$
$$+(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\boldsymbol{\Phi}_2\left(x_{j+(-1)^\alpha}, \mathbf{u}_{j+(-1)^\alpha}, \mathbf{u}'_{j+(-1)^\alpha}, (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right), \tag{16}$$

де $\boldsymbol{\Phi}_1(x,\mathbf{u},\mathbf{y},h)$, $\boldsymbol{\Phi}_2(x,\mathbf{u},\mathbf{y},h)$ – функції приросту. Значення наближеного розв'язку $\mathbf{Z}_\alpha^{(n)j}(x_j,\mathbf{u})$ апроксимує значення $\mathbf{Z}_\alpha^j(x_j,\mathbf{u})$ з порядком точності, не менше n, $\mathbf{Y}_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,\mathbf{u})$ апроксимує $\mathbf{Y}_\alpha^j(x_j,\mathbf{u})$ з порядком точності $\overline{n}$. Тоді, якщо праві частини системи диференціальних рівнянь диференційовні достатню кількість разів, то існують розклади

$$\mathbf{Y}_\alpha^j(x_j,\mathbf{u}) = \mathbf{Y}_\alpha^{(\overline{n})j}(x_j,\mathbf{u}) + [(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{\overline{n}+1}\boldsymbol{\psi}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\mathbf{u}) + O(h_{j-1+\alpha}^{\overline{n}+2}), \tag{17}$$

$$\mathbf{Z}_\alpha^j(x_j,\mathbf{u}) = \mathbf{Z}_\alpha^{(n)j}(x_j,\mathbf{u}) + [(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\psi}}_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\mathbf{u}) + O(h_{j-1+\alpha}^{n+2}). \tag{18}$$

Знайдемо наближений розв'язок задачі (13), (14). При цьому будемо припускати:

(PI) $f_i(x,\mathbf{u})$, $i = 1,\ldots,n$, – аналітичні в околі точки $(\infty, 0)$;

(PII) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \left.\frac{\partial f_i(x,\mathbf{u})}{\partial u_j}\right|_{\mathbf{u}=0} = 0, \quad i,j = 1,\ldots,n.$

Подамо точний розв'язок задачі (13), (14) у вигляді

$$\mathbf{Y}_2^N(x,\mathbf{u}) = \sum_{s=1}^\infty \frac{1}{x^s}\mathbf{D}_s + \mathbf{r}(x), \qquad \mathbf{Z}_2^N(x,\mathbf{u}) = -\sum_{s=1}^\infty \frac{s}{x^{s+1}}\mathbf{D}_s + \mathbf{r}'(x).$$

Тут $\mathbf{r}(x) = \{r_i(x)\}_{i=1}^n$, $r_i(x) \in C^\infty[x_N,\infty)$ і $\lim_{x\to\infty} x^k\mathbf{r}(x) = 0$, $k = 1,2,\ldots$. Підставивши цей розв'язок у (13), отримаємо

$$\mathbf{F}(x,\{\mathbf{D}\}) = \sum_{s=1}^\infty \frac{s(s+1)}{x^{s+2}}\mathbf{D}_s - \boldsymbol{\mathcal{A}}\sum_{s=1}^\infty \frac{s}{x^{s+1}}\mathbf{D}_s +$$
$$+\mathbf{f}\left(x, \sum_{s=1}^\infty \frac{1}{x^s}\mathbf{D}_s + \mathbf{r}(x)\right) + \mathbf{r}''(x) + \boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{r}'(x) = 0,$$

де $\{\mathbf{D}\} = \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \ldots$.

Зробимо заміну $t = 1/x$ і введемо позначення $\tilde{\mathbf{F}}(t, \{\mathbf{D}\}) = \mathbf{F}(1/t, \{\mathbf{D}\})$. Тоді, враховуючи умови, накладені на $\mathbf{f}(x, \mathbf{u})$, для визначення $\mathbf{D}_s$, $s = 1, 2, \dots$, одержимо явну рекурентну систему рівнянь

$$\left. \frac{d^k \tilde{\mathbf{F}}(t, \{\mathbf{D}\})}{dt^k} \right|_{t=0} = 0, \qquad k = 1, 2, \dots. \tag{19}$$

Зазначимо, що у випадку системи автономних диференціальних рівнянь (1) система (19) матиме лише нульові розв'язки.

Наближений розв'язок задачі (13), (14) будемо шукати у вигляді

$$\mathbf{Y}_2^{(\bar{n}-1)N}(x, \mathbf{u}) = \sum_{s=1}^{\bar{n}-1} \frac{1}{x^s} \mathbf{D}_s, \qquad \mathbf{Z}_2^{(\bar{n}-1)N}(x, \mathbf{u}) = -\sum_{s=1}^{\bar{n}-2} \frac{s}{x^{s+1}} \mathbf{D}_s . \tag{20}$$

Вектори $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \dots, \mathbf{D}_{\bar{n}-1}$ послідовно знаходимо з (19). При цьому може виникнути два випадки. У першому випадку всі $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \dots, \mathbf{D}_{\bar{n}-1}$ є нульовими векторами. Тоді

$$\mathbf{Y}_2^{(\bar{n}-1)N}(x, \mathbf{u}) \equiv 0, \qquad \mathbf{Z}_2^{(\bar{n}-1)N}(x, \mathbf{u}) \equiv 0 .$$

В іншому випадку хоч один з векторів $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \dots, \mathbf{D}_{\bar{n}-1}$ є ненульовим. Для цього необхідно і достатньо, щоб

$$f_i(x, 0) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{f_{is}}{x^s}, \qquad \sum_{s=1}^{\infty} |f_{is}|^2 \neq 0, \qquad i = 1, \dots, n .$$

Тоді наближений розв'язок матиме вигляд (20).

Справджується таке твердження.

Лема 1. *Нехай*

$$f_i(x, \mathbf{u}) \in \bigcup_{j=1}^{N} C^{n+1}([x_{j-1}, x_j] \times \Omega([0, \infty), r + \Delta)) \cup$$
$$\cup\, C^{n+1}([x_N, \infty) \times \Omega([0, \infty), r + \Delta)) ,$$

виконуються припущення (**PI**), (**PII**), *і для чисельного методу* (15), (16) *існують розклади* (17), (18). *Тоді справджуються співвідношення*

$$\mathbf{Y}_\alpha^j(x_j, \mathbf{u}) = \mathbf{Y}_\alpha^{(\bar{n})j}(x_j, \mathbf{u}) + (-1)^{\alpha+1} \boldsymbol{\psi}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}, \mathbf{u}) h_{j-1+\alpha}^{\bar{n}+1} + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar{n}+2}) ,$$

$$\mathbf{Z}_\alpha^j(x_j, \mathbf{u}) = \mathbf{Z}_\alpha^{(n)j}(x_j, \mathbf{u}) + [(-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha}]^{n+1} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}, \mathbf{u}) + O(h_{j-1+\alpha}^{n+2}) ,$$

$$\mathbf{Y}_2^N(x_N, \mathbf{u}) = \mathbf{Y}_2^{(\bar{n}-1)N}(x_N, \mathbf{u}) + O\left(\frac{1}{x_N}\right)^{\bar{n}} ,$$

$$\mathbf{Z}_2^N(x_N, \mathbf{u}) = \mathbf{Z}_2^{(\bar{n}-1)N}(x_N, \mathbf{u}) + O\left(\frac{1}{x_N}\right)^{\bar{n}} .$$

Д о в е д е н н я таке саме, як в одновимірному випадку [8].

Замість ТТРС (9), (10) можна тепер скористатися відсіченою ТРС рангу $\bar{n}$, яка має вигляд

$$\hbar_j^{-1}\left(B_j \mathbf{y}_{x,j}^{(\bar{n})} - A_j \mathbf{y}_{\bar{x},j}^{(\bar{n})}\right) = -\boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j, \mathbf{y}^{(\bar{n})}), \qquad j = 1, 2, \dots, N-1 , \tag{21}$$

$$\mathbf{y}_0^{(\bar{n})} = \boldsymbol{\mu}_1, \qquad -A_N \mathbf{y}_{\bar{x},N}^{(\bar{n})} = \boldsymbol{\mathcal{A}} \mathbf{y}_N^{(\bar{n})} - \boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N, \mathbf{y}^{(\bar{n})}) , \tag{22}$$

де

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j, \mathbf{u}) = \hbar_j^{-1}\big[&\mathbf{Z}_2^{(n)j}(x_j, \mathbf{u}) - \mathbf{Z}_1^{(n)j}(x_j, \mathbf{u}) + \\ &+ \boldsymbol{\mathcal{A}}(e^{\boldsymbol{\mathcal{A}} h_j} - \mathbf{I})^{-1}\big(\mathbf{Y}_1^{(\bar{n})j}(x_j, \mathbf{u}) - \mathbf{u}_{j-1}\big) + \\ &+ \boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{I} - e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}} h_{j+1}})^{-1}\big(\mathbf{Y}_2^{(\bar{n})j}(x_j, \mathbf{u}) - \mathbf{u}_{j+1}\big)\big] , \end{aligned} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N,\mathbf{u}) = -\mathbf{Z}_1^{(n)N}(x_N,\mathbf{u}) + \boldsymbol{\mathcal{A}}\big(e^{\boldsymbol{\mathcal{A}}h_N} - \mathbf{I}\big)^{-1}\big(\mathbf{Y}_1^{(\bar{n})N}(x_N,\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{N-1}\big) +$$
$$+ x_N^{-1}\boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{D}_1 + x_N^{-2}(\boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) + \ldots +$$
$$+ x_N^{-(\bar{n}-1)}(\boldsymbol{\mathcal{A}}\mathbf{D}_{\bar{n}-1} - (\bar{n}-2)\mathbf{D}_{\bar{n}-2}),$$

якщо хоча б один з векторів $\mathbf{D}_s$, $s = 1,2,\ldots,\bar{n}-1$, є ненульовим, і

$$\boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N,\mathbf{u}) = -\mathbf{Z}_1^{(n)N}(x_N,\mathbf{u}) + \boldsymbol{\mathcal{A}}(e^{\boldsymbol{\mathcal{A}}h_N} - \mathbf{I})^{-1}\big(\mathbf{Y}_1^{(\bar{n})N}(x_N,\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{N-1}\big), \quad (24)$$

якщо $\mathbf{D}_s = 0$, $s = 1,2,\ldots,\bar{n}-1$.

Для доведення існування і єдиності розв'язку ТРС (21), (22), а також для встановлення її точності потрібне таке твердження.

Лема 2. *Нехай виконані умови леми 1. Тоді справджуються оцінки*:

$$\boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varphi}(x_j,\mathbf{u}) = \Big\{h_j^{n+1}\big[h_j\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{I} - e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}}h_j})^{-1}\boldsymbol{\psi}_1^j(x,\mathbf{u})\Big|_{x=x_j+0} -$$
$$- \tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^j(x,\mathbf{u})\Big|_{x=x_j+0}\big]\Big\}_{\hat{x}} + O\left(\frac{h_j^{n+2} + h_{j+1}^{n+2}}{\hbar_j}\right), \quad (25)$$

якщо n непарне,

$$\boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varphi}(x_j,\mathbf{u}) = \Big\{h_j^{n+1}\,\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{I} - e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}}h_j})^{-1}\boldsymbol{\psi}_1^j(x,\mathbf{u})\Big|_{x=x_j+0}\Big\}_{\hat{x}} +$$
$$+ O\left(\frac{h_j^{n+1} + h_{j+1}^{n+1}}{\hbar_j}\right), \quad (26)$$

якщо n парне,

$$\left\|\boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\mu}_2(x_N,\mathbf{u})\right\| \le M\left(\max\left\{|h|^{\bar{n}}, \left(\frac{1}{x_N}\right)^{\bar{n}}\right\}\right), \qquad N\to\infty,$$

$$\left\|\boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j,\mathbf{u})\right\| \le K_i(x_j) + M|h| \qquad \forall\mathbf{u}\in\Omega(\hat{\hat{\omega}}_N, r+\Delta), \quad (27)$$

$$\left\|\boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j,\mathbf{v})\right\| \le (\mathcal{L}(x_j) + M|h|)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{1,\infty,\hat{\omega}_N^+}$$
$$\forall\mathbf{u},\,\mathbf{v}\in\Omega(\hat{\hat{\omega}}_N, r+\Delta), \quad (28)$$

$$\left\|\boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N,\mathbf{u})\right\| \le K_i(x_N) + M\max\left\{|h|, \left(\frac{1}{x_N}\right)\right\}$$
$$\forall\mathbf{u}\in\Omega(\hat{\hat{\omega}}_N, r+\Delta), \quad N\to\infty, \quad (29)$$

$$\left\|\boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N,\mathbf{v})\right\| \le \left(\mathcal{L}(x_N) + M\max\left\{|h|, \frac{1}{x_N}\right\}\right)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{0,\infty,\hat{\omega}_N^+},$$
$$\forall\mathbf{u},\,\mathbf{v}\in\Omega(\hat{\hat{\omega}}_N, r+\Delta), \quad N\to\infty. \quad (30)$$

де стала M не залежить від $|h|$.

Д о в е д е н н я аналогічне, як в одновимірному випадку [8].

На підставі попередніх тверджень доводимо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (3)–(8), *умови леми 1 і* $\mathbf{K}(x)$, $\mathcal{L}(x)$ – *монотонно спадні. Тоді* $\exists N_0 > 0$ *таке, що при* $N \ge N_0$ *ТРС* (21), (22) *має єдиний розв'язок, точність якого характеризується оцінкою*

$$\left\|\mathbf{y}^{(\bar{n})} - \mathbf{u}\right\|_{1,\infty,\hat{\hat{\omega}}_N}^{*} = \max\left\{\left\|\mathbf{y}^{(\bar{n})} - \mathbf{u}\right\|_{0,\infty,\hat{\hat{\omega}}_N}, \left\|\frac{d\mathbf{y}^{(\bar{n})}}{dx} - \frac{d\mathbf{u}}{dx}\right\|_{0,\infty,\hat{\hat{\omega}}_N}\right\} \le$$
$$\le M\max\left\{|h|^{\bar{n}}, \left(\frac{1}{x_N}\right)^{\bar{n}}\right\} \le M|h|^{\bar{n}} \le MN^{-\bar{n}/2},$$

де

$$\frac{d\mathbf{y}^{(\bar n)}(x_0)}{dx} = \mathbf{Z}_2^{(n)0}(x_0, \mathbf{y}^{(\bar n)}) + \mathcal{A}(\mathbf{I} - e^{-\mathcal{A}h_1})^{-1}\big(\mathbf{Y}_2^{(\bar n)0}(x_0, \mathbf{y}^{(\bar n)}) - \mathbf{y}_0^{(\bar n)}\big),$$

$$\frac{d\mathbf{y}^{(\bar n)}(x_j)}{dx} = \mathbf{Z}_1^{(n)j}(x_j, \mathbf{y}^{(\bar n)}) + \mathcal{A}(e^{\mathcal{A}h_j} - \mathbf{I})^{-1}\big(\mathbf{y}_j^{(\bar n)} - \mathbf{Y}_1^{(\bar n)j}(x_j, \mathbf{y}^{(\bar n)})\big),$$

$$j = 1, 2, \ldots, N,$$

сталі M *не залежать від* $|h|$, $1/x_N$.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що за умов теореми ТРС $\bar n$-го рангу (21), (22) має єдиний розв'язок $\mathbf{y}_s^{(\bar n)}$, $s = 1, 2, \ldots, N$. Використаємо принцип стискувальних відображень. Розглянемо операторне рівняння

$$\mathbf{y}_s^{(\bar n)} = \tilde{\Re}_h(x_s, \mathbf{y}^{(\bar n)}) = \sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j \tilde G(x_s, x_j)\boldsymbol{\varphi}^{(\bar n)}(x_j, \mathbf{y}^{(\bar n)}) +$$

$$+ \tilde G(x_s, x_N)\boldsymbol{\mu}_2^{(\bar n)}(x_N, \mathbf{y}^{(\bar n)}) + \mathbf{u}^{(0)}(x_s), \quad s = 1, 2, \ldots, N,$$

де

$$\tilde G(x, \xi) = \begin{cases} \mathcal{A}^{-1}e^{-\mathcal{A}\xi}(\mathbf{I} - e^{-\mathcal{A}x}), & 0 \le x \le \xi, \\ \mathcal{A}^{-1}e^{-\mathcal{A}x}(\mathbf{I} - e^{-\mathcal{A}\xi}), & x \ge \xi. \end{cases}$$

Оскільки $\mathbf{K}(x)$ − монотонно спадна функція, то

$$\sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j \tilde G(x_s, x_j)\mathbf{K}(x_s) + \tilde G(x_s, x_N)\mathbf{K}(x_N) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\mathcal{A}^{-1}e^{-\mathcal{A}x_s}(\mathbf{I} - e^{-\mathcal{A}x_s})\left(\sum_{j=1}^{s} h_j \mathbf{K}(x_j) + \sum_{j=1}^{s} h_{j+1}\mathbf{K}(x_j)\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\mathcal{A}^{-1}e^{-\mathcal{A}x_s}(\mathbf{I} - e^{-\mathcal{A}x_s})\left(\sum_{j=s+1}^{N-1} h_j \mathbf{K}(x_j) + \sum_{j=s+1}^{N-1} h_{j+1}\mathbf{K}(x_j)\right) +$$

$$+ \mathcal{A}^{-1}e^{-\mathcal{A}x_N}(\mathbf{I} - e^{-\mathcal{A}x_s})\mathbf{K}(x_N) \le$$

$$\le \mathcal{A}^{-1}e^{-\mathcal{A}x_s}(\mathbf{I} - e^{-\mathcal{A}x_s})\int_0^\infty \mathbf{K}(\eta)\, d\eta + M_1|h|,$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j \tilde G_{\bar x}(x_s, x_j)\mathbf{K}(x_j) + \tilde G_{\bar x}(x_s, x_N)\mathbf{K}(x_N) \le$$

$$\le h_s^{-1}\mathcal{A}^{-1}e^{-\mathcal{A}x_s}(e^{-\mathcal{A}x_{s-1}} - e^{-\mathcal{A}x_s})\int_0^\infty \mathbf{K}(\eta)\, d\eta + M_1|h| \le$$

$$\le e^{-\mathcal{A}x_s}\int_0^\infty \mathbf{K}(\eta)\, d\eta + M_1|h|.$$

Тоді на підставі (27), (29) отримаємо

$$\left\|\Re_h(x, \mathbf{v}) - \mathbf{u}^{(0)}(x)\right\|_{1,\infty,\hat{\hat\omega}_N} \le \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|\left\|e^{-\mathcal{A}x_s}(\mathbf{I} - e^{-\mathcal{A}x_s})\right\|_{1,\infty,\hat{\hat\omega}_N} \times$$

$$\times \int_0^\infty \|\mathbf{K}(\eta)\|\, d\eta + M_1 \max\left\{|h|, \frac{1}{x_N}\right\} \le r + M_1 \max\left\{|h|, \frac{1}{x_N}\right\} \le$$

$$\le r + \Delta \qquad \forall \mathbf{v} \in \Omega\big(\hat{\hat\omega}_N, r + \Delta\big),$$

тобто оператор $\Re_h(x, \mathbf{v})$ переводить $\Omega\big(\hat{\hat\omega}_N, r + \Delta\big)$ в себе.

Крім того, враховуючи нерівності (28), (30), маємо

$$\left\| \Re_h(x,\mathbf{u}) - \Re_h(x,\mathbf{v}) \right\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} \le$$

$$\le \left\| \boldsymbol{\mathcal{A}}^{-1} e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}} x_s} (\mathbf{I} - e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}} x_s}) \right\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} \int_0^\infty \mathcal{L}(\eta)\, d\eta \, \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} +$$

$$+ M_1 \max\left\{ |h|, \frac{1}{x_N} \right\} \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} \le$$

$$\le q_2 \, \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} \qquad \forall \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in \Omega(\hat{\bar{\omega}}_N, r).$$

Якщо вибрати N_0 так, що $q_2 = \max\left\{ \dfrac{1}{m^2}, 1 \right\} \int_0^\infty \mathcal{L}(\eta)\, d\eta + M \max\left\{ |h|, \dfrac{1}{x_N} \right\} < 1$, то відображення $\Re_h(x,\mathbf{u})$ є стискувальним.

Для похибки $\mathbf{z}_j = \mathbf{y}_j^{(\bar{n})} - \mathbf{u}(x_j)$, $j = 0,1,\ldots,N$, отримаємо задачу

$$\hbar_j^{-1}(B_j \mathbf{z}_{x,j} - A_j \mathbf{z}_{\bar{x},j}) = \boldsymbol{\varphi}(x_j,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j, \mathbf{y}^{(\bar{n})}), \quad j = 1,2,\ldots,N-1,$$

$$\mathbf{z}_0 = 0, \qquad -A(x_N)\mathbf{z}_{\bar{x},N} = \boldsymbol{\mathcal{A}} \mathbf{z}_N + \boldsymbol{\mu}_2(x_N,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N, \mathbf{y}^{(\bar{n})}),$$

розв'язок якої та його різницеву похідну за допомогою функції Ґріна можемо подати у вигляді

$$\mathbf{z}_s = \sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j \tilde{G}(x_s,x_j)\left[\boldsymbol{\varphi}(x_j,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j,\mathbf{y}^{(\bar{n})}) \right] +$$
$$+ \tilde{G}(x_s,x_N)\left[\boldsymbol{\mu}_2(x_N,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N,\mathbf{y}^{(\bar{n})}) \right], \quad s = 1,2,\ldots,N, \tag{31}$$

$$\mathbf{z}_{\bar{x},s} = \sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j \tilde{G}_{\bar{x}}(x_s,x_j)\left[\boldsymbol{\varphi}(x_j,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j,\mathbf{y}^{(\bar{n})}) \right] +$$
$$+ \tilde{G}_{\bar{x}}(x_s,x_N)\left[\boldsymbol{\mu}_2(x_N,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N,\mathbf{y}^{(\bar{n})}) \right], \quad s = 1,2,\ldots,N. \tag{32}$$

Для непарного n, враховуючи (25), з (31), (32) отримаємо

$$\mathbf{z}_s = -\sum_{j=1}^{N} h_j \tilde{G}_{\bar{\xi}}(x_s,x_j) \times$$
$$\times \left\{ h_j^{n+1} \left[h_j \boldsymbol{\mathcal{A}} (\mathbf{I} - e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}} h_j})^{-1} \boldsymbol{\psi}_1^j(x,\mathbf{u})\Big|_{x=x_j+0} - \tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^j(x,\mathbf{u})\Big|_{x=x_j+0} \right] \right\} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j \tilde{G}(x_s,x_j)\left[\boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j,\mathbf{y}^{(\bar{n})}) + O(|h|^{n+1}) \right] +$$
$$+ \tilde{G}(x_s,x_N)\left[\boldsymbol{\mu}_2(x_N,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N,\mathbf{u}) \right] +$$
$$+ \tilde{G}(x_s,x_N)\left[\boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N,\mathbf{y}^{(\bar{n})}) \right],$$

$$\mathbf{z}_{\bar{x},s} = -\sum_{j=1}^{N} h_j \tilde{G}_{\bar{x}\bar{\xi}}(x_s,x_j) \times$$
$$\times \left\{ h_j^{n+1} \left[h_j \boldsymbol{\mathcal{A}} (\mathbf{I} - e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}} h_j})^{-1} \boldsymbol{\psi}_1^j(x,\mathbf{u})\Big|_{x=x_j+0} - \tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^j(x,\mathbf{u})\Big|_{x=x_j+0} \right] \right\} +$$
$$+ h_s^{n+1} B^{-1}(x_s) \left[h_s \boldsymbol{\mathcal{A}} (\mathbf{I} - e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}} h_s})^{-1} \boldsymbol{\psi}_1^s(x,\mathbf{u})\Big|_{x=x_s} - \tilde{\boldsymbol{\psi}}_1^s(x,\mathbf{u})\Big|_{x=x_s} \right] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j \tilde{G}_{\bar{x}}(x_s,x_j)\left[\boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j,\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j,\mathbf{y}^{(\bar{n})}) + O(|h|^{n+1}) \right] +$$

$$+\tilde{G}_{\bar{x}}(x_s, x_N)\left[\boldsymbol{\mu}_2(x_N, \mathbf{u}) - \boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N, \mathbf{u})\right] +$$

$$+\tilde{G}_{\bar{x}}(x_s, x_N)\left[\boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N, \mathbf{u}) - \boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N, \mathbf{y}^{(\bar{n})})\right].$$

Звідси на підставі нерівностей

$$\sum_{j=1}^{N} h_j \tilde{G}_{\bar{\xi}}(x_s, x_j) = \boldsymbol{\mathcal{A}}^{-1} e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}} x_N}(\mathbf{I} - e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}} x_s}) \le M_3,$$

$$\sum_{j=1}^{N} h_j G_{\bar{x}\bar{\xi}}(x_s, x_j) = h_s^{-1} \boldsymbol{\mathcal{A}}^{-1} e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}} x_N}(e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}} x_{s-1}} - e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}} x_s}) \le M_4$$

випливають оцінки

$$\left\|\mathbf{z}_s\right\| \le M \max\left\{|h|^{n+1}, \left(\frac{1}{x_N}\right)^{n+1}\right\} + q_2 \left\|\mathbf{z}\right\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N},$$

$$\left\|\mathbf{z}_{\bar{x},s}\right\| \le M_1 \max\left\{|h|^{n+1}, \left(\frac{1}{x_N}\right)^{n+1}\right\} + q_2 \left\|\mathbf{z}\right\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N}.$$

Якщо n є парним, то враховуючи (26), рівності (31), (32) запишемо у вигляді

$$\mathbf{z}_s = -\sum_{j=1}^{N} h_j \tilde{G}_{\bar{\xi}}(x_s, x_j)\left\{h_j^{n+1} \boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{I} - e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}} h_j})^{-1} \boldsymbol{\psi}_1^j(x, \mathbf{u})\Big|_{x=x_j+0}\right\} +$$

$$+\sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j \tilde{G}(x_s, x_j)\left[\boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j, \mathbf{u}) - \boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j, \mathbf{y}^{(\bar{n})}) + O(|h|^n)\right] +$$

$$+\tilde{G}(x_s, x_N)\left[\boldsymbol{\mu}_2(x_N, \mathbf{u}) - \boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N, \mathbf{u})\right] +$$

$$+\tilde{G}(x_s, x_N)\left[\boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N, \mathbf{u}) - \boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N, \mathbf{y}^{(\bar{n})})\right],$$

$$\mathbf{z}_{\bar{x},s} = -\sum_{j=1}^{N} h_j \tilde{G}_{\bar{x}\bar{\xi}}(x_s, x_j)\left\{h_j^{n+1} \boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{I} - e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}} h_j})^{-1} \boldsymbol{\psi}_1^j(x, \mathbf{u})\Big|_{x=x_j+0}\right\} +$$

$$+h_s^{n+1} B^{-1}(x_s)\, \boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{I} - e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}} h_s})^{-1} \boldsymbol{\psi}_1^s(x, \mathbf{u})\Big|_{x=x_s} +$$

$$+\sum_{j=1}^{N-1} \hbar_j \tilde{G}_{\bar{x}}(x_s, x_j)\left[\boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j, \mathbf{u}) - \boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j, \mathbf{y}^{(\bar{n})}) + O(|h|^n)\right] +$$

$$+\tilde{G}_{\bar{x}}(x_s, x_N)\left[\boldsymbol{\mu}_2(x_N, \mathbf{u}) - \boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N, \mathbf{u})\right] +$$

$$+\tilde{G}_{\bar{x}}(x_s, x_N)\left[\boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N, \mathbf{u}) - \boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N, \mathbf{y}^{(\bar{n})})\right].$$

Звідси

$$\left\|\mathbf{z}_s\right\| \le M \max\left\{|h|^{n}, \left(\frac{1}{x_N}\right)^{n}\right\} + q_2 \left\|\mathbf{z}\right\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N},$$

$$\left\|\mathbf{z}_{\bar{x},s}\right\| \le M_1 \max\left\{|h|^{n}, \left(\frac{1}{x_N}\right)^{n}\right\} + q_2 \left\|\mathbf{z}\right\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N}.$$

Отже, отримуємо оцінку

$$\left\|\mathbf{z}\right\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} \le \frac{M \max\left\{|h|^{\bar{n}}, \left(\frac{1}{x_N}\right)^{\bar{n}}\right\}}{1 - q_2},$$

з якої на підставі того, що $q_2 < 1$, випливає оцінка

$$\left\|\mathbf{z}\right\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} \le M_1 \max\left\{|h|^{\bar{n}}, \left(\frac{1}{x_N}\right)^{\bar{n}}\right\}.$$

Оскільки $\mathbf{y}_0^{(\bar{n})} = \mathbf{Y}_2^0(x_0, \mathbf{y}^{(\bar{n})})$, $\mathbf{y}_j^{(\bar{n})} = \mathbf{Y}_1^j(x_j, \mathbf{y}^{(\bar{n})})$, то

$$\left\|\frac{d\mathbf{z}(x_0)}{dx}\right\| \le \left\|\mathbf{Z}_2^{(n)0}(x_0, \mathbf{y}^{(\bar{n})}) - \mathbf{Z}_2^0(x_0, \mathbf{y}^{(\bar{n})})\right\| + \left\|\mathbf{Z}_2^0(x_0, \mathbf{y}^{(\bar{n})}) - \mathbf{Z}_2^0(x_0, \mathbf{u})\right\| +$$

$$+ \boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{I} - e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}}h_1})^{-1} \left\|\mathbf{Y}_2^{(\bar{n})0}(x_0, \mathbf{y}^{(\bar{n})}) - \mathbf{Y}_2^0(x_0, \mathbf{y}^{(\bar{n})})\right\| \le$$

$$\le M_1 |h|^{\bar{n}} + \left\|\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{Z}_2^0(x_0, \mathbf{u})\Big|_{\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}}}\right\| \|\mathbf{z}\|_{0,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} \le M |h|^{\bar{n}},$$

$$\left\|\frac{d\mathbf{z}(x_j)}{dx}\right\| \le \left\|\mathbf{Z}_1^{(n)j}(x_j, \mathbf{y}^{(\bar{n})}) - \mathbf{Z}_1^j(x_j, \mathbf{y}^{(\bar{n})})\right\| + \left\|\mathbf{Z}_1^j(x_j, \mathbf{y}^{(\bar{n})}) - \mathbf{Z}_1^j(x_j, \mathbf{u})\right\| +$$

$$+ \boldsymbol{\mathcal{A}}(e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}}h_j} - \mathbf{I})^{-1} \left\|\mathbf{Y}_1^j(x_j, \mathbf{y}^{(\bar{n})}) - \mathbf{Y}_1^{(\bar{n})j}(x_j, \mathbf{y}^{(\bar{n})})\right\| \le$$

$$\le M_1 |h|^{\bar{n}} + \left\|\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{Z}_1^j(x_j, \mathbf{u})\Big|_{\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}}}\right\| \|\mathbf{z}\|_{0,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N} \le M |h|^{\bar{n}},$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

Звідси отримуємо, що

$$\|\mathbf{z}\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N}^* \le M \max\left\{|h|^{\bar{n}}, \left(\frac{1}{x_N}\right)^{\bar{n}}\right\}.$$

Враховуючи обмеження на сітку, будемо мати $1/x_N \le h_{\max} = |h| \le \le c_2 N^{-1/2}$. Отже, ТРС (21), (22) матиме порядок точності $O(|h|^{\bar{n}})$ або $O(N^{-\bar{n}/2})$. Теорему доведено. ♦

Розв'язок нелінійної ТРС $\bar{n}$-го порядку точності (21), (22) можна знайти методом послідовних наближень.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді розв'язок задачі* (21), (22) *можна знайти методом послідовних наближень*:

$$\hbar_j^{-1}(B_j \mathbf{y}_{x,j}^{(\bar{n},k)} - A_j \mathbf{y}_{\bar{x},j}^{(\bar{n},k)}) = -\boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j, \mathbf{y}^{(\bar{n},k-1)}), \quad j = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\mathbf{y}_0^{(\bar{n},k)} = \boldsymbol{\mu}_1, \qquad -A_N \mathbf{y}_{\bar{x},N}^{(\bar{n},k)} = \boldsymbol{\mathcal{A}} \mathbf{y}_N^{(\bar{n},k)} - \boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N, \mathbf{y}^{(\bar{n},k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\mathbf{y}^{(\bar{n},0)}(x_j) = e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}}x_j} \boldsymbol{\mu}_1, \qquad \frac{d\mathbf{y}^{(\bar{n},0)}(x_j)}{dx} = -\boldsymbol{\mathcal{A}} e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}}x_j} \boldsymbol{\mu}_1, \qquad j = 0, 1, \dots, N,$$

і справджується оцінка

$$\left\|\mathbf{y}^{(\bar{n},k)} - \mathbf{u}\right\|_{1,\infty,\hat{\bar{\omega}}_N}^* \le M(|h|^{\bar{n}} + q_2^k),$$

де

$$\frac{d\mathbf{y}^{(\bar{n},k)}(x_0)}{dx} = \mathbf{Z}_2^{(n)0}(x_0, \mathbf{y}^{(\bar{n},k)}) + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{I} - e^{-\boldsymbol{\mathcal{A}}h_1})^{-1}(\mathbf{Y}_2^{(\bar{n})0}(x_0, \mathbf{y}^{(\bar{n},k)}) - \mathbf{y}_0^{(\bar{n},k)}),$$

$$\frac{d\mathbf{y}^{(\bar{n},k)}(x_j)}{dx} = \mathbf{Z}_1^{(n)j}(x_j, \mathbf{y}^{(\bar{n},k)}) + \boldsymbol{\mathcal{A}}(e^{\boldsymbol{\mathcal{A}}h_j} - \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{y}_j^{(\bar{n},k)} - \mathbf{Y}_1^{(\bar{n})j}(x_j, \mathbf{y}^{(\bar{n},k)})),$$

$$j = 1, 2, \dots, N.$$

Стала M *не залежить від* $|h|$, n, k, *а величина* $q_2 = q + M|h| < 1$.

Твердження теореми випливає із тверджень теореми 1. ♦

З практичної точки зору для розв'язування систем нелінійних рівнянь (21), (22) доцільніше використовувати ітераційний метод Ньютона, оскільки він має вищу швидкість збіжності. Лінеаризуємо (21), (22) з урахуванням рівностей

$$\boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j, \mathbf{u}) = \hbar_j^{-1} \sum_{\alpha=1}^{2} \left\{ \frac{h_{j-1+\alpha}}{2} \mathbf{f}(x_{j+(-1)^\alpha}, \mathbf{u}_{j+(-1)^\alpha}) \right\} + O\left(\frac{h_j^2 + h_{j+1}^2}{\hbar_j} \right),$$

$$\boldsymbol{\mu}_2^{(\bar{n})}(x_N, \mathbf{u}) = \frac{h_N}{2} \mathbf{f}(x_{N-1}, \mathbf{u}_{N-1}) + O\left(\max\left\{ h_N^2, \frac{1}{x_N} \right\} \right).$$

Тоді модифікований ітераційний метод Ньютона матиме вигляд

$$\frac{1}{\hbar_j}\left(B_j \nabla \mathbf{y}_{x,j}^{(\bar{n},k)} - A_j \nabla \mathbf{y}_{\bar{x},j}^{(\bar{n},k)}\right) + \frac{h_j}{2\hbar_j} \frac{\partial \mathbf{f}(x_{j-1}, \mathbf{y}_{j-1}^{(\bar{n},k-1)})}{\partial \mathbf{u}} \nabla \mathbf{y}_{j-1}^{(\bar{n},k)} +$$

$$+ \frac{h_{j+1}}{2\hbar_j} \frac{\partial \mathbf{f}(x_{j+1}, \mathbf{y}_{j+1}^{(\bar{n},k-1)})}{\partial \mathbf{u}} \nabla \mathbf{y}_{j+1}^{(\bar{n},k)} = -\boldsymbol{\varphi}^{(\bar{n})}(x_j, \mathbf{y}^{(\bar{n},k-1)}) -$$

$$- \frac{1}{\hbar_j}\left(B_j \mathbf{y}_{x,j}^{(\bar{n},k-1)} - A_j^{(\bar{n})} \mathbf{y}_{\bar{x},j}^{(\bar{n},k-1)}\right), \qquad j = 1, \ldots, N-1, \tag{33}$$

$$\nabla \mathbf{y}_0^{(\bar{n},k)} = 0, \tag{34}$$

$$- A_N \nabla \mathbf{y}_{\bar{x},N}^{(\bar{n},k)} - \boldsymbol{\mathcal{A}} \nabla \mathbf{y}_N^{(\bar{n},k)} + \frac{h_N}{2} \frac{\partial \mathbf{f}(x_{N-1}, \mathbf{y}_{N-1}^{(\bar{n},k-1)})}{\partial \mathbf{u}} \nabla \mathbf{y}_{N-1}^{(\bar{n},k)} =$$

$$= -\mu_2^{(\bar{n})}(x_N, \mathbf{y}^{(\bar{n},k-1)}) + A_N \mathbf{y}_{\bar{x},N}^{(\bar{n},k-1)} + \boldsymbol{\mathcal{A}} \mathbf{y}_N^{(\bar{n},k-1)}, \tag{35}$$

$$\mathbf{y}_j^{(\bar{n},k)} = \mathbf{y}_j^{(\bar{n},k-1)} + \nabla \mathbf{y}_j^{(\bar{n},k)}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Наведемо результати чисельних експериментів.

Приклад. Розглянемо систему двох нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{du_1}{dx} = -u_2^2(2u_1 + 1),$$

$$\frac{d^2 u_2}{dx^2} + \frac{du_2}{dx} = u_1 u_2(2u_1 + 3)$$

з крайовими умовами

$$u_1(0) = -1, \qquad \lim_{x \to \infty} u_1(x) = 0, \qquad u_2(0) = 1, \qquad \lim_{x \to \infty} u_2(x) = 0$$

та відомим точним розв'язком

$$u_1(x) = \operatorname{th} x - 1, \qquad u_2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

Задачу розв'язано чисельно за допомогою ТРС рангу $n = \bar{n} = 4$ (21)–(23), (24), де $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \mathbf{I}$, $\mathbf{Z}_\alpha^{(4)j}(x_j, \mathbf{u})$, $\mathbf{Y}_\alpha^{(4)j}(x_j, \mathbf{u})$ – чисельні розв'язки задач Коші (11), (12), одержані методом Рунґе – Кутта четвертого порядку точності (див. [9, с. 138]).

Для знаходження розв'язку різницевої схеми $\mathbf{y}_j^{(4)}$, $j = 1, \ldots, N-1$, використано модифікований ітераційний метод Ньютона (33)–(35), а для розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь з блочною тридіагональною матрицею – метод матричної прогонки.

Результати чисельного розв'язування задачі на рівномірній сітці $\overline{\omega}_N = \{x_j,\ j = 0,1,\dots,N,\ h = 1/\sqrt{N}\}$ наведено в табл. 1, де

$$\mathrm{er} = \left\| \mathbf{z}^{(4)} \right\|^*_{1,\infty,\overline{\omega}_N} = \left\| \mathbf{y}^{(4)} - \mathbf{u} \right\|^*_{1,\infty,\overline{\omega}_N}, \qquad p = \log_2 \frac{\left\| \mathbf{z}^{(4)} \right\|^*_{1,\infty,\overline{\omega}_N}}{\left\| \mathbf{z}^{(4)} \right\|^*_{1,\infty,\overline{\omega}_N}}.$$

N	er	p
256	$0.5751 \cdot 10^{-6}$	
1024	$0.3606 \cdot 10^{-7}$	4.0
4096	$0.2256 \cdot 10^{-8}$	4.0
16384	$0.1409 \cdot 10^{-9}$	4.0
65536	$0.8695 \cdot 10^{-11}$	4.0

Результати розв'язування задачі підтверджують теоретичні висновки (див. теорему 1), що ТРС (21), (22) має четвертий порядок точності.

1. *Кутнів М. В., Паздрій О. І.* Точна триточкова різницева схема для нелінійної крайової задачі на півосі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 4. – С. 75–86.

   Те саме: *Kutniv M. V., Pazdrii O. I.* Exact three-point difference scheme for a nonlinear boundary-value problem on the semiaxis // J. Math. Sci. – 2012. – **181**, No. 3. – P. 383–400.
2. *Кутнів М., Паздрій О.* Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку на півосі // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2011. – Вип. 17. – С. 10–21.
3. *Макаров В. Л., Гочева С. Г.* Разностные схемы любого порядка точности для дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси // Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 3. – С. 527–540.
4. *Паздрій О. І.* Точна триточкова різницева схема для систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку на півпрямій // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2012. – № 740. – С. 49–60.
5. *Auzinger W., Kneisl G., Koch O., Weinmüller E.* A collocation code for singular boundary value problems in ordinary differential equations // Numer. Algorithms. – 2003. – **33**, No. 1-4. – P. 27–39.
6. *Collatz L.* The numerical treatment of differential equations. – Berlin: Springer-Verlag, 1960. – 568 p.
7. *Gavrilyuk I. P., Hermann M., Kutniv M. V., Makarov V. L.* Difference schemes for nonlinear BVPs on the semiaxis // Comput. Methods Appl. Math. – 2007. – **7**, No. 1. – P. 25–47.
8. *Gavrilyuk I. P., Hermann M., Kutniv M. V., Makarov V. L.* Exact and truncated difference schemes for boundary value ODEs. – Springer–Basel AG: Birkhäuser, 2011. – xi+247 p. – (Int. Series of Numer. Math. – Vol. 159).
9. *Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G.* Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems. – Springer: Berlin–Heidelberg, 2009. – 528 p. – (Springer Series in Comput. Math. – Vol. 8)
10. *De Hoog F. R., Weiss R.* An approximation theory for boundary value problems on infinite intervals // Computing. – 1980. – **24**, No. 2-3. – P. 227–239.
11. *De Hoog F. R., Weiss R.* The numerical solution of boundary value problems with an essential singularity // SIAM J. Numer. Anal. – 1979. – **16**, No. 4. – P. 637–669.
12. *Lentini M., Keller H. B.* Boundary value problems on semi-infinite intervals and their numerical solution // SIAM J. Numer. Anal. – 1980. – **17**, No. 4. – P. 577–604.
13. *Markowich P. A., Ringhofer C. A.* Collocation methods for boundary value problems on long intervals // Math. Comput. – 1983. – **40**, No. 161. – P. 123–150.

ТРЕХТОЧЕЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПОЛУПРЯМОЙ

Разработана алгоритмическая реализация точной трехточечной разностной схемы решения краевой задачи на полупрямой для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка через трехточечные разностные схемы ранга $\overline{n} = 2[(n+1)/2]$ *(где* $[\cdot]$ *− целая часть). Доказаны существование и единственность решения трехточечных разностных схем ранга* $\overline{n}$ *и получена оценка их точности. Приведены результаты численных экспериментов.*

THREE-POINT DIFFERENCE SCHEMES OF HIGH-ORDER ACCURACY FOR SYSTEMS OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER ON SEMIAXIS

Algorithmical implementation of exact three-point difference scheme for solution of boundary value problem on semiaxis for systems of nonlinear ordinary differential equations of the second order by three-point difference schemes of rang $\overline{n} = 2[(n+1)/2]$ ($[\cdot]$ *is the integer part of an expression in brackets) is constructed. The existence and uniqueness for solution of the three-point difference schemes of rang* $\overline{n}$ *are proved and the accuracy of this scheme is estimated. Results of numerical experiments are given.*

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано 15.01.13