

**КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ РУХУ ПРУЖНИХ ТІЛ УЗДОВЖ ТВЕРДИХ ПОВЕРХОНЬ**

*Запропоновано математичну модель руху пружного тіла вздовж твердої поверхні без використання сил тертя. Отримано формулювання задачі у вигляді варіаційної нерівності та у вигляді екстремальної варіаційної задачі. Для дискретизації екстремальної варіаційної задачі використано метод скінченних елементів. Як приклад розглянуто рух тіла прямокутного перерізу за умов плоскої деформації. Досліджено деформації і напруження, які виникають у випадку руху вздовж поверхонь у горизонтальному та вертикальному напрямках.*

**Вступ.** У сучасному світі існують різні способи руху тіл уздовж поверхонь. Одні з них характерні для руху живих істот у природі, інші – для руху технічних засобів. Можливість використання більшості способів пов'язана з наявністю тертя, і відповідно, сили, що притискає тіло до поверхні, найчастіше, сили тяжіння. Поряд із цим існує спосіб руху, який не вимагає наявності сили притиснення. Такий спосіб базується на періодичному з'єднанні і роз'єднанні частин поверхні тіла й поверхні переміщення. Це дозволяє рухатись уздовж довільно орієнтованих поверхонь, а також в умовах невагомості.

Важливо підкреслити, що за такого способу руху відбувається деформування тіла. Це дозволяє розглянути процес руху як послідовність задач контактної взаємодії тіла з поверхнею переміщення. Важлива особливість цих задач полягає в тому, що ділянка фактичного контакту становить тільки частину контактної поверхні й заздалегідь не є відомою. У рамках класичних підходів систематичні прийоми розв'язання проблеми невизначеного контакту відсутні. Специфічні труднощі пов'язані з умовами, що містять нерівності.

Зручним апаратом для дослідження і розв'язання контактних задач із невизначеними ділянками контакту є теорія варіаційних нерівностей, розвинена в роботах [3, 19]. Як ефективний метод розв'язування контактних задач, теорія варіаційних нерівностей набула розвитку у роботах [2, 4, 6, 8, 14, 20, 21]. У роботі А. Kravchuk, P. Neittaanmäki [17] отримано набір варіаційних принципів, включно з аналогами принципів Кастильяно, Рейснера та ін. Докладний огляд досліджень з варіаційних методів розв'язування контактних задач наведено у [5].

Варіаційні постановки є основою для побудови методів числового розв'язування крайових задач механіки деформівного тіла. Як правило, числовий розв'язок будують на основі дискретизації варіаційної нерівності або еквівалентної екстремальної варіаційної задачі. Найпоширенішими є методи дискретизації, засновані на локальній апроксимації – методи скінченних різниць і скінченних елементів [13]. Такі методи в широких межах нечутливі до форми границі області й дозволяють легко виконувати апроксимацію умов у вигляді нерівностей. Однак у методі скінченних різниць значення допустимих функцій поза вузлами фактично не є визначені, а в методі скінченних елементів вони можуть бути обчислені за вузловими значеннями.

Серед сучасних робіт, присвячених числовому розв'язуванню контактних задач, відмітимо дослідження P. Wriggers і Tod A. Laursen. У книзі P. Wriggers [22] розглядаються питання числового моделювання контактних задач для різних галузей. Основну увагу автор приділяє застосуванню метода скінченних елементів, розглядає нові адаптивні методи скінченних елементів. Tod A. Laursen у [18] всебічно аналізує питання скінченноелементної апроксимації при розв'язанні контактних задач. У монографії С. М. Алейникова [15] набув розвиток систематичний підхід до числового

розв'язання широкого кола просторових контактних задач геотехніки. На основі схем методу граничних елементів розглянуто нові методики й ефективні обчислювальні алгоритми.

Зазначимо, що контактні задачі зі складними умовами взаємодії за наявності теплових і дифузійних процесів розглядалися у роботах Р. М. Мартиняка [9, 10].

**Диференціальна постановка задачі.** Рух з використанням механізмів зчеплення можна уявити як послідовність кроків, що повторюються, і проілюструвати на прикладі переміщення гусениці. Виділимо три етапи при виконанні кожного кроку такого руху.

На *першому* етапі здійснюється зчеплення передньої частини тіла з поверхнею переміщення. Під дією внутрішніх джерел енергії відбувається деформація стискування і переміщення незакріплених областей тіла в напрямку руху.

На *другому* етапі виконується зчеплення задньої частини тіла з контактною поверхнею.

*Третій* етап полягає у звільненні спочатку закріпленої області. Тіло частково відновлює свою форму, і центр мас переміщається в напрямку руху.

Зчеплення пружного тіла із поверхнею руху може здійснюватись з використанням різних механізмів, зокрема, за допомогою клейких речовин, зчеплення кігтями або повітряного присмокування. У цій роботі не уточнюємо, який конкретний механізм забезпечує зчеплення пружного тіла із твердою поверхнею, і вводимо модельне уявлення про тонкий прошарок матеріалу зчеплення, у якому відбувається з'єднання і роз'єднання тіла та поверхні.

Розглянемо пружне тіло, що у початковому стані займає область  $\Omega$  тривимірного простору, обмежену гладкою поверхнею  $\Gamma$ . Позначимо через  $x = (x_1, x_2, x_3)$  координати деякої точки тіла у декартовій системі координат  $Ox_1x_2x_3$ .

Процес деформування будемо вважати квазістатичним, а переміщення і деформації, що виникають, – малими на кожному кроці. Припускаємо, що енергія деформації, що звільняється при розвантаженні тіла, повністю акумулюється в ньому і хвильових процесів не виникає. У загальному випадку відмінність форми твердої поверхні від форми поверхні рухомого тіла має порядок переміщень точок тіла, що дає змогу вивчати рух уздовж поверхонь із малими виступами та впадинами. Позначимо через  $u_i(x)$ ,  $\varepsilon_{ij}(x)$ ,  $\sigma_{ij}(x)$  компоненти вектора переміщень, тензора деформацій і тензора напружень у точці  $x$ . Тіло перебуває під дією об'ємних сил  $\mathbf{Q}(x)$ . Нехай  $\mathbf{v}(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))$  – одиничний вектор нормалі до  $\Gamma$  (зовнішньої відносно до області  $\Omega$ ). Розкладемо вектори переміщень  $\mathbf{u}$  і напружень  $\boldsymbol{\sigma}$  у точках поверхні  $\Gamma$  на нормальні  $\mathbf{u}_v$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_v$  і дотичні  $\mathbf{u}_\tau$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_\tau$  складові і подамо у вигляді:  $\mathbf{u} = u_v \mathbf{v} + \mathbf{u}_\tau$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_v \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma}_\tau$ .

Сформулюємо умови на границі  $\Gamma$  області  $\Omega$ . На першому етапі руху поверхня  $\Gamma$  складається із чотирьох частин, що не перетинаються:  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma \cup \Gamma_a \cup \Gamma_c$  (рис. 1а). На другому (рис. 1б) і третьому (рис. 1в) етапах – із трьох:  $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_a \cup \Gamma_c$ . Поверхня  $\Gamma_u$  обмежує задню частину тіла. Для початку процесу руху на цій поверхні фіксуються переміщення  $\mathbf{g}(x)$ :

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{g}(x) \quad \forall x \in \Gamma_u. \quad (1)$$

Поверхня  $\Gamma_\sigma$  вільна від навантажень:

$$\sigma_{ij}(x)v_j(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_\sigma. \quad (2)$$

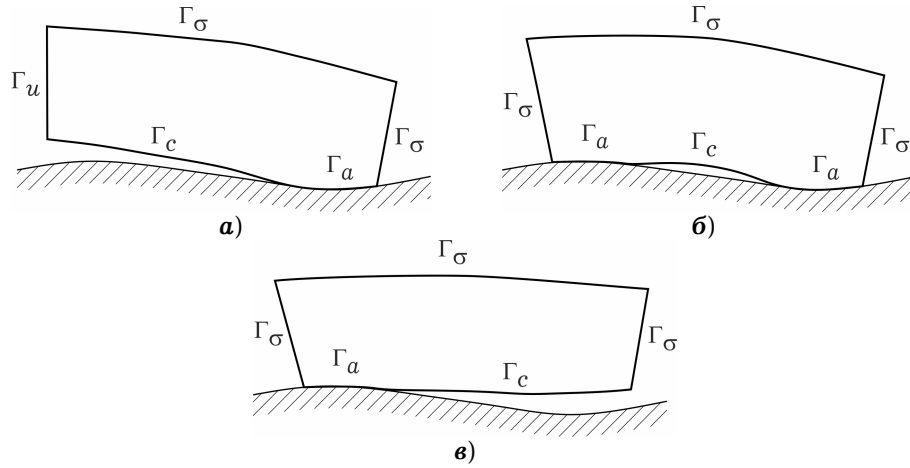


Рис. 1

Через  $\Gamma_c$  позначено область можливого контакту. Підкреслимо, що область фактичного контакту тіла з поверхнею переміщення у кожний момент часу становить деяку частину поверхні  $\Gamma_c$  і заздалегідь невідома. Тому на  $\Gamma_c$  задаються умови неповного контакту:

$$\sigma_\tau(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_c, \quad (3)$$

$$u_v(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Gamma_c, \quad (4)$$

$$\sigma_v(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Gamma_c, \quad (5)$$

$$u_v(x)\sigma_v(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_c. \quad (6)$$

Через  $\Gamma_a$  позначено область зчеплення. У найпростішому випадку умови на  $\Gamma_a$  можна моделювати як умови жорсткого зчеплення тіла з поверхнею переміщення. Використання такої моделі приводить до необмеженого зростання напружень в області зчеплення [7]. У реальних системах напруження не можуть бути нескінченними, оскільки відомі механізми зчеплення можуть забезпечити лише обмежені значення нормальних і дотичних зусиль зчеплення. При досягненні цих значень взаємне розташування часток матеріалу, що забезпечують зчеплення, змінюється і, зокрема, може відбуватися відрив тіла від поверхні переміщення. Таким чином, щоб забезпечити обмеження контактних напружень, модель повинна допускати можливість деформування прошарку зчеплення. Тіло буде залишатися жорстко зчепленим з поверхнею, поки напруження не перевищують деякого граничного значення. Зростання напружень, вище від граничного значення, не допускається.

Сформулюємо умови контактної взаємодії на  $\Gamma_a$ . Позначимо через  $\sigma_m$  і  $\tau_m$  максимально допустимі значення нормальних і дотичних напружень в області зчеплення.

Умови нормальної взаємодії будуть мати вигляд

$$|\sigma_v(x)| \leq \sigma_m, \quad \sigma_m > 0, \quad (7)$$

причому

$$u_v(x) = 0, \quad \text{якщо} \quad |\sigma_v(x)| < \sigma_m, \quad (8)$$

$$u_v(x) > 0, \quad \text{якщо} \quad \sigma_v(x) = -\sigma_m, \quad (9)$$

$$u_v(x) < 0, \quad \text{якщо} \quad \sigma_v(x) = \sigma_m. \quad (10)$$

Умови дотичної взаємодії сформулюємо у такому вигляді:

$$|\sigma_\tau(x)| \leq \tau_m, \quad \tau_m > 0, \quad (11)$$

причому

$$|\mathbf{u}_\tau(x)| = 0, \quad \text{якщо} \quad |\boldsymbol{\sigma}_\tau(x)| < \tau_m, \quad (12)$$

$$|\mathbf{u}_\tau(x)| > 0, \quad \text{якщо} \quad |\boldsymbol{\sigma}_\tau(x)| = \tau_m, \quad (13)$$

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}_\tau(x)}{|\boldsymbol{\sigma}_\tau(x)|} = -\frac{\mathbf{u}_\tau(x)}{|\mathbf{u}_\tau(x)|}. \quad (14)$$

Тут рівність (14) означає, що дотичні напруження діють у напрямку, протилежному до напрямку ковзання.

Отже, одержуємо задачу про визначення переміщень  $u_i(x)$ , деформацій  $\varepsilon_{ij}(x)$  і напружень  $\sigma_{ij}(x)$  в області  $\Omega$ , обмеженій поверхнею  $\Gamma$ , які задовольняють співвідношення Коші

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \forall x \in \Omega,$$

рівняння рівноваги

$$\sigma_{ij,j}(x) + Q_i(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

крайові умови (1)–(14) і співвідношення узагальненого закону Гука для однорідного ізотропного тіла

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

де  $W$  – питома потенціальна енергія деформації;  $\Theta$  – об’ємна деформація;  $\lambda$  та  $\mu$  – пружні сталі Ляме.

**Варіаційна постановка задачі.** Уведемо простір С. Л. Соболева  $[W_2^1(\Omega)]^3$  вектор-функцій, інтегровних в області  $\Omega$  з квадратом разом із першими похідними. Будемо вважати вектори переміщень точок тіла  $\Omega$  елементами простору  $[W_2^1(\Omega)]^3$ . Виділимо множину  $V \in W_2^1(\Omega)$  допустимих переміщень, у яку включимо всі вектори  $\mathbf{u}^*(x)$  переміщень, що задовольняють кінематичні умови із (1), (4), (6)–(14). Будь-який елемент  $\mathbf{u}^*$  множини  $V$  назвемо можливим переміщенням, а відповідні, згідно зі співвідношеннями Коші, величини  $\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*)$  – компонентами можливого тензора деформацій. Під  $u_i(x)$ ,  $\varepsilon_{ij}(x)$ ,  $\sigma_{ij}(x)$  будемо розуміти компоненти дійсного вектора переміщень, дійсних тензорів деформацій і напружень. Оскільки для дійсних напружень виконуються умови рівноваги, то для будь-яких  $\mathbf{u}^*(x) \in V$  справджується рівність

$$-(\sigma_{ij,j} + Q_i)(u_i^* - u_i) = 0.$$

Інтегруючи цю тотожність по області  $\Omega$  й застосовуючи формулу Остроградського – Гаусса, одержимо інтегральну рівність

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Omega} Q_i (u_i^* - u_i) d\Omega - \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \nu_j (u_i^* - u_i) d\Gamma = 0. \quad (15)$$

Подамо інтеграл по поверхні  $\Gamma$  у рівності (15) у вигляді суми поверхневих інтегралів по  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_\sigma$ ,  $\Gamma_c$  і  $\Gamma_a$ . Для елементів множини  $V$  інтеграл по  $\Gamma_u$  дорівнює нулеві, оскільки  $u_i^* = u_i$  на  $\Gamma_u$ . Інтеграл по  $\Gamma_\sigma$  також дорівнює нулеві, оскільки поверхневі сили відсутні.

Розглянемо інтеграл по  $\Gamma_c$ . Розкладемо вектори переміщень і вектори зусиль на  $\Gamma_c$  нормальні й дотичні складові. Оскільки тертя відсутнє, то

$(\sigma_\tau)_i = 0$ . Тоді підінтегральний вираз набуває вигляду

$$\sigma_{ij} v_j (u_i^* - u_i) = \sigma_v (u_v^* - u_v).$$

Покажемо, що  $\sigma_v (u_v^* - u_v) \geq 0$  у всіх точках  $\Gamma_c$ . Нехай  $\mathbf{x} \in \Gamma_c$  – довільна точка поверхні  $\Gamma_c$ . Можливі два варіанти: **а)** у точці  $\mathbf{x}$  відбувається фактичний контакт тіла з поверхнею переміщення; **б)** у точці  $\mathbf{x}$  контакт із поверхнею відсутній.

У першому випадку маємо:  $u_v = 0$ ,  $u_v^* \leq 0$ ,  $\sigma_v \leq 0$ . Тоді  $\sigma_v (u_v^* - u_v) \geq 0$ . У другому випадку маємо  $\sigma_v = 0$ . Отже, у всіх точках поверхні  $\Gamma_c$  виконується нерівність  $\sigma_v (u_v^* - u_v) \geq 0$ . Тоді

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_v (u_v^* - u_v) d\Gamma \geq 0. \quad (16)$$

Інтеграл по  $\Gamma_a$  подамо у вигляді суми інтегралів:

$$\int_{\Gamma_a} \sigma_{ij} v_j (u_i^* - u_i) d\Gamma = \int_{\Gamma_a} \sigma_v (u_v^* - u_v) d\Gamma + \int_{\Gamma_a} (\sigma_\tau)_i ((\mathbf{u}_\tau^*)_i - (\mathbf{u}_\tau)_i) d\Gamma.$$

Тоді, враховуючи (16), замість рівності (15) отримуємо нерівність

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Omega} Q_i (u_i^* - u_i) d\Omega - \int_{\Gamma_a} \sigma_v (u_v^* - u_v) d\Gamma - \\ - \int_{\Gamma_a} \sigma_\tau (\mathbf{u}_\tau^* - \mathbf{u}_\tau) d\Gamma \geq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Розглянемо вираз  $\sigma_v (u_v^* - u_v) = \sigma_v u_v^* - \sigma_v u_v$ . Нехай  $u_v \neq 0$ . З умов взаємодії (9), (10) одержимо  $\sigma_v u_v = -|\sigma_v| |u_v| = -\sigma_m |u_v|$ . Очевидно також, що  $\sigma_v u_v^* \geq -|\sigma_v| |u_v^*| \geq -\sigma_m |u_v^*|$ . Тоді  $\sigma_v (u_v^* - u_v) \geq -\sigma_m (|u_v^*| - |u_v|)$ . Отже,

$$-\sigma_v (u_v^* - u_v) \leq \sigma_m (|u_v^*| - |u_v|).$$

Нехай  $u_v = 0$ . Тоді

$$\sigma_v (u_v^* - u_v) = \sigma_v u_v^* \geq -|\sigma_v| |u_v^*| \geq -\sigma_m |u_v^*| = -\sigma_m (|u_v^*| - |u_v|).$$

Отже, у всіх точках поверхні  $\Gamma_a$  маємо, що

$$-\sigma_v (u_v^* - u_v) \leq \sigma_m (|u_v^*| - |u_v|).$$

Замінімо в нерівності (17) інтеграл  $-\int_{\Gamma_a} \sigma_v (u_v^* - u_v) d\Gamma$  інтегралом

$\int_{\Gamma_a} \sigma_m (|u_v^*| - |u_v|) d\Gamma$ . При цьому нерівність (17) тільки підсилиться.

Розглянемо вираз

$$\sigma_\tau (\mathbf{u}_\tau^* - \mathbf{u}_\tau) = \sigma_\tau \mathbf{u}_\tau^* - \sigma_\tau \mathbf{u}_\tau.$$

Нехай  $|\mathbf{u}_\tau| \neq 0$ . Використовуючи умову контактної взаємодії (14), одержимо

$$\sigma_\tau \mathbf{u}_\tau = -\sigma_\tau \frac{|\mathbf{u}_\tau| \sigma_\tau}{|\sigma_\tau|} = -|\sigma_\tau| |\mathbf{u}_\tau|.$$

Крім того, очевидно, що  $\sigma_\tau \mathbf{u}_\tau^* \geq -|\sigma_\tau| |\mathbf{u}_\tau^*|$ . Тоді

$$\sigma_\tau (\mathbf{u}_\tau^* - \mathbf{u}_\tau) \geq -|\sigma_\tau| (|\mathbf{u}_\tau^*| - |\mathbf{u}_\tau|).$$

Звідси випливає нерівність

$$-\sigma_\tau(\mathbf{u}_\tau^* - \mathbf{u}_\tau) \leq |\sigma_\tau| (|\mathbf{u}_\tau^*| - |\mathbf{u}_\tau|) = \tau_m (|\mathbf{u}_\tau^*| - |\mathbf{u}_\tau|).$$

Нехай  $|\mathbf{u}_\tau| = 0$ . Тоді  $\sigma_\tau(\mathbf{u}_\tau^* - \mathbf{u}_\tau) = \sigma_\tau \mathbf{u}_\tau^* \geq -|\sigma_\tau| |\mathbf{u}_\tau^*|$ . Отже,

$$-\sigma_\tau(\mathbf{u}_\tau^* - \mathbf{u}_\tau) \leq |\sigma_\tau| |\mathbf{u}_\tau^*| \leq \tau_m |\mathbf{u}_\tau^*| = \tau_m (|\mathbf{u}_\tau^*| - |\mathbf{u}_\tau|).$$

Таким чином, у всіх точках поверхні  $\Gamma_a$  виконується нерівність

$$-\sigma_\tau(\mathbf{u}_\tau^* - \mathbf{u}_\tau) \leq \tau_m (|\mathbf{u}_\tau^*| - |\mathbf{u}_\tau|).$$

Заміняючи в (17) інтеграл  $-\int_{\Gamma_a} \sigma_\tau(\mathbf{u}_\tau^* - \mathbf{u}_\tau) d\Gamma$  інтегралом  $\int_{\Gamma_a} \tau_m (|\mathbf{u}_\tau^*| - |\mathbf{u}_\tau|) d\Gamma$ ,

одержуємо інтегральну нерівність (так звану варіаційну нерівність [12]):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Omega} Q_i (u_i^* - u_i) d\Omega + \int_{\Gamma_a} \sigma_m (|u_v^*| - |u_v|) d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_a} \tau_m (|\mathbf{u}_\tau^*| - |\mathbf{u}_\tau|) d\Gamma \geq 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in V. \end{aligned} \quad (18)$$

Задача розв'язання варіаційної нерівності полягає у визначенні переміщень  $\mathbf{u}(x) \in V$  таких, що нерівність (18) виконується для всіх  $\mathbf{u}^*(x) \in V$ .

Одержимо наступний результат: розв'язок задачі у початковій диференціальній постановці є розв'язком варіаційної нерівності (18). Такій нерівності відповідає еквівалентна екстремальна задача [4]:

$$\begin{aligned} & \inf_{\mathbf{u}^* \in V} \left\{ J(\mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} W(\varepsilon_{ij}^*) d\Omega - \int_{\Omega} Q_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_a} \sigma_m |u_v^*| d\Gamma + \int_{\Gamma_a} \tau_m |\mathbf{u}_\tau^*| d\Gamma \right\} \\ & \forall \mathbf{u}^* \in V. \end{aligned} \quad (19)$$

**Числове дослідження.** Числове розв'язання варіаційних нерівностей ґрунтується на наближеній заміні початкової задачі деякою скінченновимірною задачею. Для дискретизації варіаційної задачі використаємо метод скінченних елементів. Виберемо прямокутні скінченні елементи з білінійною функцією форми. Умови непроникання у вигляді нерівностей накладаються у вузлах, а поза вузлами вони забезпечуються згідно з певним законом зміни переміщень на границях елементів.

Звернемо увагу, що в інтегралах по поверхні  $\Gamma_a$  містяться множники  $|u_v^*|$  і  $|\mathbf{u}_\tau^*|$ , отже, функціонал  $J(u_i^*)$  не є диференційовним. Відомо [1], що недиференційовність функціонала може призвести до явищ «заїдання» алгоритму в неоптимальній точці. Алгоритм мінімізації може збігатися до деякої функції  $v(x)$ , для якої  $|v_v(x)| = 0$ , або  $|\mathbf{v}_\tau(x)| = 0$ , хоча функція  $v(x)$  не є розв'язком екстремальної задачі. Щоб уникнути зазначеного небажаного ефекту, виконаємо заміну функцій  $|u_v^*|$  і  $|\mathbf{u}_\tau^*|$  диференційовними функціями  $\omega_\varepsilon(|u_v^*|)$  і  $\omega_\varepsilon(|\mathbf{u}_\tau^*|)$ :

$$\omega_\varepsilon(|u_v^*|) = \begin{cases} |u_v^*| - \frac{\varepsilon}{2}, & |u_v^*| > \varepsilon, \\ \frac{u_v^* u_v^*}{2\varepsilon}, & |u_v^*| \leq \varepsilon, \end{cases} \quad \omega_\varepsilon(|\mathbf{u}_\tau^*|) = \begin{cases} |\mathbf{u}_\tau^*| - \frac{\varepsilon}{2}, & |\mathbf{u}_\tau^*| > \varepsilon, \\ \frac{\mathbf{u}_\tau^* \mathbf{u}_\tau^*}{2\varepsilon}, & |\mathbf{u}_\tau^*| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Уведемо послідовність  $\{\varepsilon_n\}$  таких, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ . Замість екстремальної задачі (19) розглянемо послідовність регуляризованих екстремальних задач

$$J_n(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{u}^* \in V} \left\{ J_{\varepsilon_n}(\mathbf{u}^*) = \int_{\Omega} W(\varepsilon_{ij}^*) d\Omega - \int_{\Omega} Q_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_a} \sigma_m |\omega_{\varepsilon_n}(|u_v^*|)| d\Gamma + \int_{\Gamma_a} \tau_m |\omega_{\varepsilon_n}(|u_\tau^*|)| d\Gamma \right\}.$$

Позначимо через  $u_n$  розв'язок регуляризованої задачі при  $\varepsilon = \varepsilon_n$ . Збіжність розв'язків  $u_\varepsilon$  задачі при  $\varepsilon \rightarrow 0$  у задачах лінійної теорії пружності досліджена у [16].

Внаслідок дискретизації виникає задача знаходження мінімуму функції багатьох змінних з додатковими умовами у вигляді нерівностей. Така задача формально є задачею математичного програмування. Оскільки цільова функція є квадратичною, а обмеження – лінійні, то більш точно цю задачу слід назвати задачею квадратичного програмування. Підкреслимо, що кількість змінних у такій задачі є значною, але вони слабко пов'язані між собою. Ефективне розв'язання задачі є можливим за умови використання методів, які враховують її особливості. У роботі застосовано метод послідовної верхньої релаксації, модифікований для урахування обмежень у вигляді лінійних нерівностей.

Обчислювальні експерименти проводили для задачі про рух прямокутної смуги вздовж твердої прямолінійної основи в умовах плоскої деформації. Тіло знаходиться під дією сили тяжіння  $Q = \rho g$ , де  $\rho$  – густина речовини розглядуваного тіла,  $g$  – прискорення вільного падіння. Для того щоб охопити числовим розв'язанням більш широке коло задач і зменшити вплив помилок округлення, задачу зведено до безрозмірного вигляду. Позначимо довжину тіла через  $\ell$ , висоту – через  $h$ , зсув торця тіла на початку кожного кроку руху – через  $u_0$ . Безрозмірні координати, переміщення, компоненти тензорів деформацій і напружень означимо у такий спосіб:  $x_i^* = x_i/\ell$ ,  $u_i^* = u_i/u_0$ ,  $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij}\ell/u_0$ ,  $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}\ell/\mu u_0$ .

На задньому торці  $\Gamma_u$  задаємо початкові переміщення  $u_0$  в напрямку руху, тобто умова (1) набуває вигляду:  $u_v = u_0$  на  $\Gamma_u$ . Умови на  $\Gamma_c$  формулюємо у вузлових точках скінченноелементної сітки, які розташовані на поверхні  $\Gamma_c$ .

На похибку числового розв'язку впливає вибір таких параметрів: 1) кількість скінченних елементів; 2) параметр релаксації  $\omega$ ; 3) параметр, який використовується для переривання ітераційного процесу у методі послідовної верхньої релаксації; 4) регуляризуючий параметр  $\varepsilon$ .

У роботі [11] досліджено вплив цих параметрів на точність наближеного розв'язку і встановлено оцінки їх раціональних значень. Виходячи з цього, конкретні розрахунки виконано для скінченноелементної сітки  $72 \times 36$  при  $\omega = 1.96$  і  $\varepsilon = 0.1$ . Ітераційний процес мінімізації припиняли, коли середньоквадратичне відхилення набувало значення, менше ніж  $10^{-5}$ .

Результати розрахунків показують, що найбільші напруження характерні для першого етапу руху. Розглянемо докладніше контактні напруження, що виникають на цьому етапі при русі вздовж горизонтальної поверхні. На рис. 2 показано нормальні (рис. 2а) і дотичні (рис. 2б) контактні напруження для тіла зі співвідношенням сторін  $h/\ell = 1/2$  і довжинами ділянок зчеплення, що дорівнюють  $1/4$  довжини тіла. Суцільна лінія відповідає задачі руху з обмеженням контактних напружень. У розрахунках коефіцієнт Пуассона приймаємо рівним 0.3. За граничні значення нормальних і дотичних напружень були прийняті відповідно  $\sigma_m = 3$  і  $\tau_m = 2$ .

Штриховими лініями на рисунку показано напруження, обчислені без урахування обмежень на контактні напруження.

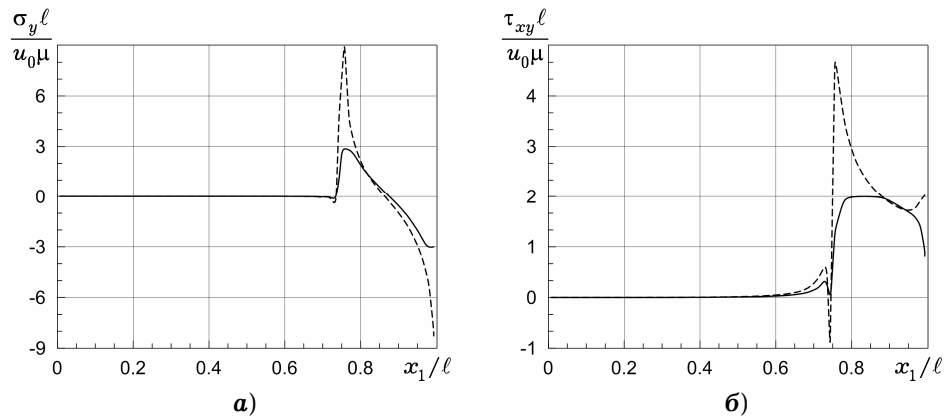


Рис. 2

На рис. 2 бачимо, що обмеження контактних напружень суттєво впливає на характер цих напружень у зоні зчеплення, і фактично не впливає поза зоною зчеплення. Ненульові нормальні і дотичні контактні напруження поза ділянкою зчеплення (при  $x_1/\ell < 0.75$ ) достатньо малі і їх виникнення пов'язане з похибкою обчислення напружень за переміщеннями. На рис. 3 показано викривлення прямокутної сітки, що виникають внаслідок деформування. Рис. 3а відповідає задачі визначення напружено-деформованого стану тіла без урахування обмежень контактних напружень, рис. 3б – задачі з урахуванням цих обмежень.

Проаналізувавши переміщення точок тіла, бачимо, що можливість обмеження напружень на контактній поверхні досягається за рахунок деформування шару, що забезпечує зчеплення. На передній (відносно напрямку руху) частині області зчеплення цей шар стискається, а на задній – розтягується (рис. 3б). В області зчеплення спостерігається також незначне проковзування тіла уздовж поверхні руху. Очевидно, що модель руху з обмеженням контактних напружень більш точно відбиває реальні процеси, що виникають у пружному тілі.

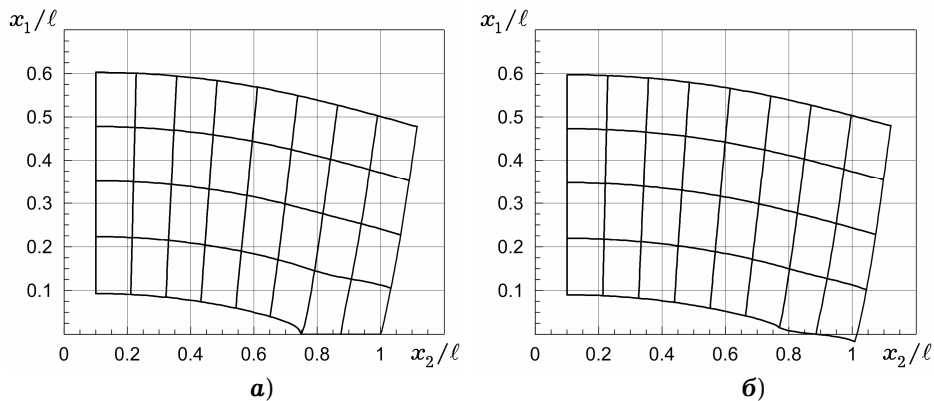


Рис. 3

З використанням запропонованої моделі виконано числове дослідження напружено-деформованого стану тіла у випадку руху вздовж плоскої вертикальної поверхні за напрямом вгору й вниз, а також при русі по горизонтальній поверхні в положенні «спиною вниз» (рух по стелі). На рис. 4 показано деформацію тіла і контактні напруження, що виникають при виконанні *першого* етапу руху вниз по вертикальній поверхні. Тут, як і у випадку руху по горизонтальній поверхні, спостерігається відрив незакріпле-



ної частини тіла від поверхні переміщення і деформування шару, що забезпечує зчеплення (рис 4а). На рис. 4б і рис. 4в можна бачити, що контактні напруження  $\sigma_y$  і  $\tau_{xy}$  найбільш інтенсивні в області зчеплення і обмежені в цій області граничними значеннями  $\sigma_m = 3$  і  $\tau_m = 2$  відповідно.

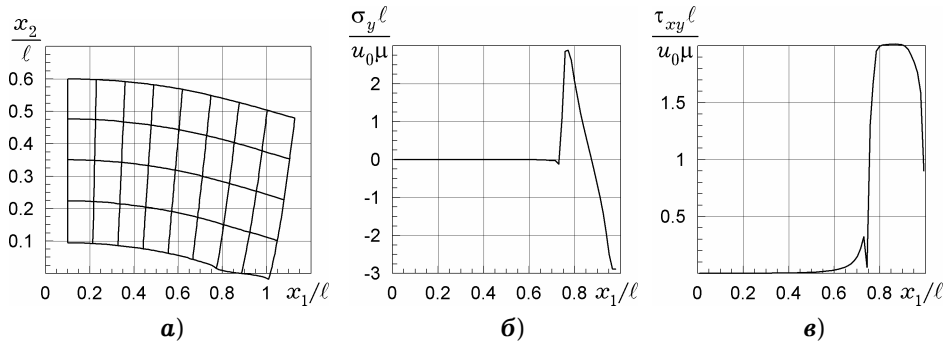


Рис. 4

При дослідженні руху вгору по вертикальній поверхні отримано аналогічні результати. Для руху в положенні «спиною вниз» характерний більш значний відрив незакріпленої частини тіла від поверхні переміщення і значне деформування шару, що забезпечує зчеплення, особливо на задній (відносно напрямку руху) ділянці зчеплення.

**Висновки.** Запропоновано варіаційну постановку і методику розв'язування нового класу контактних задач. Математична модель відкриває можливість дослідження процесу руху живих організмів без використання механізму тертя. Результати роботи можуть бути також використані при проектуванні засобів пересування в умовах невагомості. Некласичні умови контактної взаємодії виключають появу необмежених контактних зусиль. Подальший розвиток запропонованого підходу може бути присвячений дослідженню динамічних ефектів, одержанню можливих аналітичних розв'язків і розв'язанню конкретних прикладних задач.

1. Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – Киев: Вища шк., 1983. – 511 с.
2. Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я. Решение вариационных неравенств в механике. – Москва: Мир, 1986. – 270 с.
3. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольтер Р. Численное исследование вариационных неравенств. – Москва: Мир, 1979. – 574 с.
4. Кравчук А. С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. – Москва: Моск. гос. акад. приборостроения и автоматики, 1997. – 338 с.
5. Кравчук А. С. Вариационный метод в контактных задачах. Состояние проблемы, направления развития // Прикл. математика и механика. – 2009. – **73**, № 3. – С. 492–502.  
Te same: Kravchuk A. S. The variational method in contact problems. The present state of the problem and trends in its development // J. Appl. Math. Mech. – 2009. – **73**, No. 3. – P. 351–357.
6. Кравчук А. С. Развитие метода решения контактных задач с учетом трения при сложном нагружении // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2007. – № 3. – С. 22–32.  
Te same: Kravchuk A. S. Development of a solution method for frictional contact problems with complex loading // Mech. Solids. – 2007. – **42**, No. 3. – P. 346–355.
7. Кузьменко В. И., Михальчук А. И. Исследование напряженного состояния тела в контактных задачах адгезионного движения // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2004. – Вип. 8, т. 2. – С. 129–136.
8. Львов Г. И. Вариационная постановка контактной задачи для линейно-упругих и физически нелинейных пологих оболочек // Прикл. математика и механика. – 1982. – **46**, № 5. – С. 841–846.

9. Мартиняк Р. М. Термонапружений стан біматеріалу із закритою міжфазною тріщиною з шорсткими поверхнями // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2010. – **53**, № 1. – С. 71–79.  
Te same: *Martynyak R. M.* Thermal stress state of a bimaterial with a closed interfacial crack having rough surfaces // *J. Math. Sci.* – 2011. – **176**, No. 4. – P. 578–589.
10. Мартиняк Р. М., Слободян Б. С., Зеленьак В. М. Тиск пружного півпростору на жорстку основу з прямокутною виїмкою за наявності між ними рідинного містка // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2008. – **51**, № 1. – С. 150–156.  
Te same: *Martynyak R. M., Slobodyan B. S., Zelenyak V. M.* Pressure of an elastic half space on a rigid base with rectangular hole in the case of a liquid bridge between them // *J. Math. Sci.* – 2009. – **160**, No. 4. – P. 470–477.
11. Михальчук А. И., Кузьменко В. И. Компьютерный анализ процессов адгезионного движения // *Проблеми обчисл. механіки і міцності конструкцій.* – 2011. – Вип. 17. – С. 202–210.
12. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – Москва: Мир, 1985. – 590 с.
13. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – Москва: Мир, 1979. – 392 с.
14. Чернопазов С. А., Шишляев В. В. Вариационная постановка контактной задачи теории упругости с учетом трения на поверхности контакта // *Вестн. Перм. гос. техн. ун-та. Прикл. математика и механика.* – 2003. – № 1. – С. 83–90.
15. *Aleynikov S.* Spatial contact problems in geotechnics. Boundary-element method. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. – 648 p.
16. *Kikuchi N., Skalski K.* An elasto-plastic rigid punch problem using variational inequalities // *Arch. mech. stosow.* – 1981. – **33**, No. 6. – P. 865–877.
17. *Kravchuk A. Neittaanmäki P.* Variational and quasi-variational inequalities in mechanics. – Dordrecht: Springer, 2007. – 338 p.
18. *Laursen T. A.* Computational contact and impact mechanics: Fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis. – Heidelberg: Springer, 2002. – 471 p.
19. *Lions J.-L., Stampacchia G.* Variational inequalities // *Commun. Pure Appl. Math.* – 1967. – **20**, No. 3. – P. 493–519.
20. *Sofonea M., Matei A.* History-dependent quasi-variational inequalities arising in contact mechanics // *Eur. J. Appl. Math.* – 2011. – **22**, No. 5. – P. 471–491.
21. *Touzaine A.* Study of a viscoelastic frictional contact problem with adhesion // *Comment. Math. Univ. Carolin.* – 2011. – **52**, No. 2. – P. 257–272.
22. *Wriggers P.* Computational contact mechanics: 2<sup>nd</sup> ed. – Berlin–Heidelberg: Springer, 2006. – 518 p.

#### КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ ПО ТВЕРДЫМ ПОВЕРХНОСТЯМ

*Предложена математическая модель движения упругого тела по поверхности без использования сил трения. Получена формулировка задачи в виде вариационного неравенства и в виде экстремальной вариационной задачи. Для дискретизации экстремальной вариационной задачи использован метод конечных элементов. В качестве примера рассмотрено движение тела прямоугольного сечения в условиях плоской деформации. Исследованы деформации и напряжения, возникающие при движении по поверхностям в горизонтальном и вертикальном направлениях.*

#### CONTACT PROBLEMS ON ELASTIC BODIES MOTION ALONG HARD SURFACES

*The problem of elastic body motion without friction along the hard surface is discussed. The problem statement is proposed in terms of variational inequality and the extremal variational problem. The finite element method is used for sampling the extremal variational problem. As an example the motion of a body of rectangular cross-section under the conditions of plane deformation is considered. The strain and stress state of a body moving along the surfaces in vertical and horizontal directions is investigated.*

Дніпропетр. нац. ун-т  
ім. Олеся Гончара, Дніпропетровськ

Одержано  
24.07.12