

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ У ПЛАСТИНКАХ З ТРІЩИНАМИ ЗА ДИСКРЕТНОГО КОНТАКТУ ЇХ БЕРЕГІВ

Наведено алгоритм визначення напруженого стану ізотропних пластинок з тріщинами з урахуванням контакту їх берегів, який ґрунтується на методах інтегральних рівнянь та квадратичного програмування. Досліджено контактні напруження біля тріщин у смузі за різних навантажень з несиметрично розміщеними ділянками контакту. Встановлено вплив контакту берегів тріщин на значення коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Методи дослідження напруженого стану біля тріщин в ізотропних пластинках достатньо повно розроблені при розтягувальних навантаженнях. При стиску і зсуві пластинок може виникати контакт берегів тріщин, який істотно змінює їх напружений стан і коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН). Контакт берегів тріщин може мати місце і за розтягу пластинок з отворами, якщо тріщини розміщені в зонах стискувальних напружень. Огляд виконаних в цьому напрямку робіт для ізотропних пластинок наведено в [3–5].

При дослідженні напружено-деформованого стану (НДС) пластинок із тріщинами широко використовують метод граничних інтегральних рівнянь. При цьому, як правило, застосовують ітераційні процедури, за допомогою яких досліджено, в основному, задачі для випадку, коли є одна область контакту, яка прилягає до вершини тріщини або розміщена симетрично. У цій роботі запропоновано підхід, застосовний у загальному випадку, коли область контакту може складатися з декількох ділянок. Для розв'язування контактної задачі використано методи інтегральних рівнянь і квадратичного програмування.

Постановка задачі. Розглянемо нескінченну пластину з отвором, послаблену системою внутрішніх тріщин, що розміщені вздовж кривих L_j , $j = 1, \dots, J$. Приймемо, що пластина перебуває під дією зосереджених сил, двостороннього розтягу на нескінченності та прикладених до тріщини зусиль q_T , які вважаємо однаковими на її протилежних берегах. Тут $n_q = N_q + iT_q$, де N_q , T_q – нормальна та дотична проекції вектора зусиль, що прикладені до берегів тріщини.

Загальний розв'язок задачі теорії пружності для нескінченної пластини з внутрішніми тріщинами запишемо через комплексні потенціали Колосова – Мухелішвілі $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ у вигляді [5]

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{Q_S(t) dt}{t-z} + \Phi_c(z), \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{\bar{Q}_S d\bar{t}}{t-z} - \frac{\bar{t}Q_S dt}{(t-z)^2} \right] + \Psi_c(z),\end{aligned}\quad (1)$$

де $Q_S = -\frac{2Gi}{\chi+1} \frac{d}{dt} (g_1 + ig_2)$; $L = L_1 + L_2 + \dots + L_J$; $g_1 = [u]$ і $g_2 = [v]$ – стрибки переміщень на контурі L ; G – модуль зсуву, $\chi = (3-\nu)/(1+\nu)$; ν – коефіцієнт Пуассона, $\Phi_c(z)$ і $\Psi_c(z)$ – потенціали для суцільної пластини, навантаженої на нескінченності зосередженими силами.

Вектор напружень $q_\Gamma = N_\Gamma + iT_\Gamma$ у довільній точці z кривої Γ на дотичній до неї площині знаходимо через комплексні потенціали:

$$q_{\Gamma}(z) = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \frac{d\bar{z}}{dz} [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}], \quad (2)$$

де dz – диференціал змінної z на кривій.

Щоб отримати інтегральні рівняння для знаходження функції Q_S , підставимо потенціали (1) у формулу (2), спрямуємо $z \rightarrow L$ та врахуємо, що на тріщині $q_L = q_T$.

Модифіковані інтегральні рівняння для пластини з отвором і тріщинами. Розглянемо пластину з отвором. Позначимо через D область, яку займає її серединна площина.

Для запису інтегральних рівнянь для пластини з отвором і тріщинами перепишемо формулу (1) у вигляді

$$\Phi(z) = \int_L \frac{Q(t) ds}{t-z} + \Phi_c(z), \quad \Psi(z) = \int_L \left[\frac{\bar{Q}}{t-z} - \frac{\bar{t}Q}{(t-z)^2} \right] ds + \Psi_c(z), \quad (3)$$

де ds – диференціал дуги, $Q = -\tilde{G}i \frac{d}{ds}(g_1 + ig_2) = \frac{1}{2\pi} Q_S \frac{dt}{ds}$, $\tilde{G} = \frac{G}{\pi(\chi+1)}$.

З огляду на зображення (3) введемо у розгляд потенціали

$$\Phi_0(z, a) = \frac{P}{a-z}, \quad \Psi_0(z, a) = \frac{\bar{P}}{a-z} - \frac{\bar{a}P}{(a-z)^2}, \quad (4)$$

де P, a – довільні комплексні сталі, причому $a \in D$.

Розглянемо НДС, який відповідає потенціалам $\Phi_0(z, a)$, $\Psi_0(z, a)$ за довільних значень комплексної величини P і розміщення точки a . Відповідні їм головний вектор (X, Y) і момент M_a на довільному контурі, який обмежує точку a , дорівнюють нулеві. За повного обходу навколо точки a вздовж довільного контуру Γ переміщення отримують стрибок $(u - iv)_{\Gamma} = Pi/\tilde{G}$. Тобто потенціали Φ_0 , Ψ_0 належать до класу дислокаційних розв'язків. Про дислокаційність розв'язків вигляду (4) вказано у [4].

Побудуємо для області D розв'язок $\Phi_G(z, a)$, $\Psi_G(z, a)$ при $(a, z) \in D$, який задовольняє умову відсутності напружень на межі отвору та має такі ж полюси в точці $a \in D$, як і функції Φ_0 , Ψ_0 . Запишемо ці потенціали у вигляді

$$\Phi_G(z, a) = P\Phi_1(z, a) + \bar{P}\Phi_2(z, a), \quad \Psi_G(z, a) = P\Psi_1(z, a) + \bar{P}\Psi_2(z, a).$$

Зазначимо, що потенціали $\Phi_G(z, a)$, $\Psi_G(z, a)$ мають такі ж властивості, як і вказані вище потенціали $\Phi_0(z, a)$, $\Psi_0(z, a)$, тобто є дислокаційними.

За побудованими дислокаційними потенціалами інтегральне подання для пластини з отвором і внутрішніми розрізами запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \int_L [Q(t)\Phi_1(z, t) + \overline{Q(t)}\Phi_2(z, t)] ds + \Phi_D(z), \\ \Psi(z) &= \int_L [Q(t)\Psi_1(z, t) + \overline{Q(t)}\Psi_2(z, t)] ds + \Psi_D(z), \end{aligned} \quad (5)$$

де $\Phi_D(z)$, $\Psi_D(z)$ – комплексні потенціали для пластини з вільним від навантаження отвором, які відповідають прикладеному зовнішньому навантаженню (без урахування зусиль, що діють на берегах тріщини).

Для однозначності переміщень при обході контуру L необхідно забезпечити виконання умов

$$\int_{L_j} Q ds = 0, \quad j = 1, \dots, J.$$

У співвідношеннях (5) підінтегральні функції за побудовою мають такі ж особливості, як і в (1). Тому вирази (5) і (1) визначають однакові стрибки переміщень на контурі L . Крім того, потенціали (5) за побудовою автоматично задовольняють умову відсутності напружень на межі отвору.

При проведенні розрахунків зручно перейти до дійсних невідомих. Для цього зобразимо $Q = Q_2 - iQ_1$, причому

$$Q_1 = \tilde{G} \frac{dg_1}{ds}, \quad Q_2 = \tilde{G} \frac{dg_2}{ds}.$$

Тоді співвідношення (5) перепишемо так:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \int_L [Q_2(t)\Phi_R(z, t) - Q_1(t)\Phi_I(z, t)] ds + \Phi_D(z), \\ \Psi(z) &= \int_L [Q_2(t)\Psi_R(z, t) - Q_1(t)\Psi_I(z, t)] ds + \Psi_D(z), \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_R(z, a) &= \Phi_1(z, a) + \Phi_2(z, a), & \Psi_R(z, a) &= \Psi_1(z, a) + \Psi_2(z, a), \\ \Phi_I(z, a) &= i[\Phi_1(z, a) - \Phi_2(z, a)], & \Psi_I(z, a) &= i[\Psi_1(z, a) - \Psi_2(z, a)]. \end{aligned}$$

Зазначимо, що функції $\Phi_R(z, a)$, $\Phi_I(z, a)$ можна записати безпосередньо через потенціали Φ_G, Ψ_G :

$$\begin{aligned} \Phi_R(z, a) &= \Phi_G(z, a), & \Psi_R(z, a) &= \Psi_G(z, a) \quad \text{при } P = 1, \\ \Phi_I(z, a) &= \Phi_G(z, a), & \Psi_I(z, a) &= \Psi_G(z, a) \quad \text{при } P = i. \end{aligned}$$

Інтегральні рівняння для знаходження невідомих функцій Q_1, Q_2 отримуємо після підстановки інтегрального зображення (6) у формулу (2), граничного переходу $z \rightarrow L$ (з використанням формули Племеля – Сохоцького) та врахування того, що на тріщині $q_L = q_T$. В результаті отримуємо систему інтегральних рівнянь

$$\int_{L_j} [Q_2(t)q_R(z, t) - Q_1(t)q_I(z, t)] ds = q_T(z) - q_D(z), \quad z \in L, \quad (7)$$

де $q_R(z, a)$, $q_I(z, a)$, $q_D(z)$ – вектори напружень q_L в точці z на кривій L , які визначаються за формулою (2) через комплексні потенціали $(\Phi_R(z, a), \Psi_R(z, a))$, $(\Phi_I(z, a), \Psi_I(z, a))$, $(\Phi_D(z), \Psi_D(z))$ відповідно. Зазначимо, що функції $q_R(z, a)$, $q_I(z, a)$ мають ядра типу Коші.

Крім цього, невідомі функції задовольняють умови однозначності переміщень

$$\int_{L_j} Q_1 ds = 0, \quad \int_{L_j} Q_2 ds = 0, \quad j = 1, \dots, J.$$

Для розв'язування рівнянь (7) використаємо метод механічних квадратур. Розглянемо спочатку детальніше випадок, коли є тільки одна тріщина. Запишемо рівняння тріщини у параметричному вигляді

$$\xi = \alpha(\xi), \quad \eta = \beta(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1,$$

і використаємо зображення

$$Q_1(\alpha(\xi), \beta(\xi)) = \frac{U(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad Q_2(\alpha(\xi), \beta(\xi)) = \frac{V(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}}.$$

Застосовуючи квадратурні формули Лобатто до інтегралів у рівнянні (7),

отримуємо систему алгебричних рівнянь [1]

$$\sum_{n=1}^N (a_{vn} V_n - b_{vn} U_n) = d_v, \quad v = 1, \dots, N-1, \quad (8)$$

де N – вибрана кількість вузлових точок,

$$a_{vn} = A_n q_R(z_v, t_n), \quad b_{vn} = A_n q_I(z_v, t_n), \quad q_v = q_v^T - q_v^D, \quad q_v^T = q_T(z_v),$$

$$q_v^D = q_D(z_v), \quad U_n = U(\xi_n), \quad V_n = V(\xi_n), \quad t_n = \omega(\xi_n),$$

$$z_v = \omega(\tau_v), \quad \tau_v = \cos[\pi_N(v - 0.5)],$$

$$\xi_n = -\cos(\pi_N(n-1)), \quad A_k = s'_k \delta_k \pi_N, \quad \pi_N = \frac{\pi}{N-1}, \quad s'_k = s'(\xi_k),$$

$$\delta_k = 1, \quad 1 < k < N, \quad \delta_1 = \delta_N = 0.5,$$

$$\omega(\xi) = \alpha(\xi) + i\beta(\xi), \quad s'(\xi) = |\omega'(\xi)|.$$

Зазначимо, що ξ_k при $1 < k < N-1$ є коренями полінома Чебишева $U_{N-2}(\xi)$.

Додаткові два рівняння отримуємо із умов однозначності переміщень

$$\sum_{n=1}^N A_n U_n = 0, \quad \sum_{n=1}^N A_n V_n = 0,$$

які разом із рівняннями (8) складають замкнену систему рівнянь. Через визначені із цієї системи коефіцієнти на основі [4] визначимо КІН за формулою

$$K_I^\pm - iK_{II}^\pm = \mp 2\pi\sqrt{\pi}\sqrt{|\omega'(\pm 1)|} (U_{1,N} + iV_{1,N}).$$

Система рівнянь (8) справджується і для системи тріщин, якщо в ній покласти $N = N_1 + N_2 + \dots + N_J$; N_k – кількість вузлових точок на k -му розрізі; t_1, t_2, \dots, t_{N_j} – сукупність впорядкованих вузлових точок $\{t_i^{(j)}, i = 1, \dots, N_j, j = 1, \dots, J\}$; $z_1, z_2, \dots, z_{N_j-1}$ – сукупність точок $\{z_i^{(j)}, i = 1, \dots, N_j - 1, j = 1, \dots, J\}$; A_1, A_2, \dots, A_{N_j} – сукупність коефіцієнтів $\{A_i^{(j)}, i = 1, \dots, N_j, j = 1, \dots, J\}$; U_1, U_2, \dots, U_{N_j} – сукупність значень $\{U_i^{(j)}, i = 1, \dots, N_j, j = 1, \dots, J\}$; V_1, V_2, \dots, V_{N_j} – сукупність значень $\{V_i^{(j)}, i = 1, \dots, N_j, j = 1, \dots, J\}$. Індeksi зверху вказують на належність введених вище коефіцієнтів чи величин до тріщини з відповідним номером.

У цьому випадку до системи рівнянь (8) необхідно додати рівняння

$$\sum_{n=1}^{N_j} A_n^{(j)} U_n^{(j)} = 0, \quad \sum_{n=1}^{N_j} A_n^{(j)} V_n^{(j)} = 0, \quad j = 1, \dots, J.$$

Система рівнянь відносно переміщень. Для врахування можливості контакту берегів тріщини модифікуємо спочатку систему рівнянь (8) таким чином, щоби невідомими в ній були стрибки переміщень.

З цієї метою розглянемо довільну точку K , яка лежить на тріщині. Позначимо в ній через u_α , u_β проекції вектора переміщень на дотичну і нормаль до тріщини. Тоді переміщення у декартовій системі координат будуть

$$u + iv = (u_\alpha + iu_\beta) \frac{dz}{ds} = (u_\alpha + iu_\beta) e^{i\gamma}, \quad (9)$$

де γ – кут нахилу дотичної до тріщини в точці K до осі Ox .

Рівняння тріщини опишемо у параметричному вигляді: $x + iy = \omega(\xi)$, $-1 \leq \xi \leq 1$. Зобразимо у нових змінних стрибки переміщень u_α, u_β на тріщині

$$g_\alpha = U_\alpha(\xi) \sqrt{1 - \xi^2} \frac{1}{\tilde{G}}, \quad g_\beta = U_\beta(\xi) \sqrt{1 - \xi^2} \frac{1}{\tilde{G}},$$

де U_α, U_β – гладкі функції.

Тоді для стрибків переміщень у декартовій системі координат маємо

$$g_1 + ig_2 = f(\xi) \sqrt{1 - \xi^2} \frac{1}{\tilde{G}},$$

де $f(\xi) = (U_\alpha + iU_\beta) \exp(i\gamma(\xi))$. Звідси отримаємо

$$\tilde{G} \frac{d(g_1 + ig_2)}{d\xi} = \frac{f'(\xi)(1 - \xi^2) - \xi f(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}}.$$

Вище похідні від стрибків записано у вигляді

$$\tilde{G} \frac{d(g_1 + ig_2)}{d\xi} = \frac{U + iV}{\sqrt{1 - \xi^2}},$$

де U, V – основні функції, через які записано розв'язок задачі для тріщин. Таким чином, отримуємо взаємозв'язок між введеними функціями:

$$U + iV = f'(\xi)(1 - \xi^2) - \xi f(\xi). \quad (10)$$

Для функції $f(\xi)$ при $|\xi| \leq 1$ використаємо інтерполяційну формулу [8] з вузловими точками, що складаються із коренів полінома Чебишева $U_{M-1}(\xi)$ та точок -1 і 1

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^M \varepsilon_n C_n T_n(\xi), \quad (11)$$

де

$$C_n = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^M \varepsilon_k f_k T_n(\xi_k), \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & 0 < n < M, \\ 1/2, & n = 0, n = M, \end{cases}$$

$$f_k = f(\xi_k), \quad \xi_k = \cos \frac{\pi(M-k)}{M},$$

Підставивши формулу (11) у (10), маємо

$$U + iV = \sum_{n=0}^M C_n w_n(\xi),$$

де $w_n(\xi) = -(n+1)\xi T_n(\xi) + nT_{n-1}(\xi)$ при $n > 0$, а $w_0(\xi) = -\varepsilon_0 T_1(\xi)$. Тут враховано, що при $n > 0$ справджується рекурентна формула

$$(1 - \xi^2) T_n'(\xi) = n[T_{n-1}(\xi) - \xi T_n(\xi)].$$

Переставивши у виразі для функції $U + iV$ порядок підсумовування, запишемо

$$U + iV = \sum_{k=0}^M f_k W_k(\xi), \quad (12)$$

де

$$W_k(\xi) = \frac{2\varepsilon_k}{M} \sum_{n=0}^M T_n(\xi_k) w_n(\xi).$$

При $\xi = \cos \theta$, враховуючи, що $\xi_k = \cos \lambda_k$, $\lambda_k = \pi(M-k)/M$, формула для

знаходження функції W_k набуде вигляду

$$W_k(\cos \theta) = -\frac{2\varepsilon_k}{M} \sum_{n=0}^M \cos n\lambda_k [(n+1) \cos \theta \cos n\theta + n \cos(n-1)\theta].$$

Використовуючи формули для сум тригонометричних функцій, можна отримати прості замкнені формули для визначення функції $W_k(\cos \theta)$:

$$W_k(\cos \theta) = -\frac{\varepsilon_k}{M} \{ \cos \theta [S_1(\theta + \lambda_k, M) + S_1(\theta - \lambda_k, M)] + \\ + \sin \theta [S_2(\theta + \lambda_k, M) + S_2(\theta - \lambda_k, M)] \},$$

де

$$S_1(x, n) = -(n+1) \cos(n+1)x + \\ + (\cos x + 1) \left[\frac{(1 - \cos(n+1)x)}{2(\cos x - 1)} + \frac{(n+3/2) \sin(n+1)x}{\sin x} \right], \\ S_2(x, n) = \frac{n+1}{2} \sin(n+1)x + \frac{(n+1) \sin x \cos(n+1)x - \sin(n+1)x}{2(\cos x - 1)}.$$

Поклавши у формулі (12) $\xi = \xi_n$, $M = N - 2$, для невідомих в системі рівнянь (8) отримаємо

$$U_n + iV_n = \sum_{k=0}^{N-2} f_k W_{nk}, \quad n = 1, \dots, N,$$

де $W_{nk} = W_k(\xi_n)$.

Враховавши, що $f(\xi) = (U_\alpha + iU_\beta) \exp(i\gamma(\xi))$, отримаємо

$$U_n = \sum_{k=0}^{N-2} W_{nk} (U_k^\alpha \ell_k - U_k^\beta m_k), \quad V_n = \sum_{k=0}^{N-2} W_{nk} (U_k^\alpha m_k + U_k^\beta \ell_k), \quad (13)$$

де $U_k^\alpha = U_\alpha(\xi_k)$, $U_k^\beta = U_\beta(\xi_k)$, $\ell_k = \cos \gamma_k$, $m_k = \sin \gamma_k$, $\gamma_k = \gamma(\xi_k)$.

Підставивши у рівняння (8) співвідношення (13), отримуємо систему рівнянь відносно стрибків переміщень

$$\sum_{k=0}^{N-2} \alpha_{vk} U_k^\alpha + \sum_{k=0}^{N-2} \beta_{vk} U_k^\beta = q_v, \quad v = 1, \dots, N-1, \quad (14)$$

де

$$\alpha_{vk} = A_{vk} m_k - B_{vk} \ell_k, \quad \beta_{vk} = A_{vk} \ell_k + B_{vk} m_k, \\ A_{vk} = \sum_{n=1}^N a_{vn} W_{nk}, \quad B_{vk} = \sum_{n=1}^N b_{vn} W_{nk}.$$

Додаткове рівняння, яке забезпечує однозначність переміщень, не записуємо, оскільки у використаному підході ці умови виконуються тотожно.

Коефіцієнти в цих рівняннях можна записати у матричному вигляді $A = aW$, $B = bW$, де a і b – матриці з коефіцієнтами a_{vk} , b_{vk} ; A , B , W – матриці з коефіцієнтами A_{vn} , B_{vn} , W_{nk} .

Знаходження КІН. КІН визначаємо через величини $U(\pm 1)$, $V(\pm 1)$. Їх знаходимо з формули (10) у вигляді

$$(U + iV)(\pm 1) = \mp f(\pm 1) = \mp (U_\alpha(\pm 1) + iU_\beta(\pm 1)) \exp(i\gamma(\pm 1)).$$

Тут $U_\alpha(1) = U_{N-2}^\alpha$, $U_\beta(1) = U_{N-2}^\beta$, $U_\alpha(-1) = U_0^\alpha$, $U_\beta(-1) = U_0^\beta$.

Знаходження контактних напружень. Для розв'язання контактної задачі спочатку спростимо систему (14), виключивши із неї невідомі U_k^β . Для цього перепишемо систему у матричному вигляді [2]

$$\begin{aligned} D_{11}U^\alpha + D_{12}U^\beta &= S, \\ D_{21}U^\alpha + D_{22}U^\beta &= T, \end{aligned} \quad (15)$$

де $D_{11} = \operatorname{Re} \alpha$, $D_{12} = \operatorname{Re} \beta$, $D_{21} = \operatorname{Re} \beta$, $D_{22} = \operatorname{Im} \beta$, α і β – матриці, які складаються з коефіцієнтів α_{vk} і β_{vk} ; $S = \operatorname{Re} q$; $T = \operatorname{Im} q$; U^α , U^β , q – стовпчики, що складаються з коефіцієнтів U_k^α , U_k^β , q_v відповідно.

Із другого рівняння системи (15) маємо $U^\alpha = -(D_{21}^{-1}D_{22})U^\beta + D_{21}^{-1}T$. Тоді з першого рівняння отримуємо систему рівнянь відносно стрибків нормальних переміщень у матричному вигляді

$$DU^\beta = S - (D_{11}D_{21}^{-1})T, \quad (16)$$

де $D = D_{12} - D_{11}D_{21}^{-1}D_{22}$.

При розгляді контактних задач вважатимемо, що зовнішнє навантаження до берегів тріщини не прикладене. Тоді в (16) $q_v = \sigma_v + i\tau_v - q_v^D$, де σ_v , τ_v – проекції вектора контактних напружень на нормаль і дотичну до тріщини в точці z_v .

Далі обмежуємося випадком гладких берегів тріщин. Тоді в системі (16) маємо $\tau_v = 0$, а σ_v є невідомими контактними напруженнями в області контакту ($v = 1, \dots, N-1$), причому поза ділянками контакту $\sigma_v = 0$.

Тоді система рівнянь (16) набуде вигляду

$$\sum_{k=0}^{N-2} d_{nk}U_k^\beta = p_n + \sigma_n, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad (17)$$

де p_n – елементи стовпчика $p = -\operatorname{Re} q^D + (D_{11}D_{21}^{-1})\operatorname{Im} q^D$; d_{nk} – коефіцієнти матриці D ; q^D – стовпчик, що складається із коефіцієнтів q_k^D .

Невідомі контактні напруження і стрибки переміщень у вузлових точках задовольняють нерівності $\sigma_n \leq 0$, $U_n^\beta \geq 0$. У зв'язку з цим розв'язок контактної задачі задовольняє альтернативну систему рівнянь-нерівностей

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-2} d_{nk}U_k^\beta &= p_n \quad \text{при} \quad U_n^\beta > 0, \\ \sum_{k=0}^{N-2} d_{nk}U_k^\beta &\leq p_n \quad \text{при} \quad U_n^\beta = 0, \quad n = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Введемо у розгляд величину

$$I = - \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{k=0}^{N-2} (d_{nk}U_k^\beta - p_n)U_n^\beta$$

та приймемо, що змінні U_k^β задовольняють умови

$$\sum_{k=0}^{N-2} d_{nk}U_k^\beta \leq p_n, \quad U_n^\beta > 0 \quad \text{при} \quad n = 1, \dots, N-1. \quad (18)$$

Очевидно, що величина I є додатною і на точному розв'язку контактної задачі вона дорівнює нулеві. У зв'язку з цим розглянемо наступну задачу: знайти мінімум величини I при виконанні умов (18).

Така задача належить до добре вивченої задачі квадратичного програмування. Після її розв'язування просто здійснюється контроль за точністю розв'язку – на основі отриманого значення величини I , яка на точному розв'язку дорівнює нулеві.

Після знаходження величин U_n^β із задачі квадратичного програмування контактні напруження визначаються за формулами

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{N-2} d_{nk} U_n^\beta - p_n.$$

Результати розрахунків. Обчислення виконано для смуги $-H < y < 0$, послабленої прямолінійною тріщиною півдовжини a . Дислокаційний розв'язок, на основі якого вище записано інтегральні рівняння, наведено у [7].

Розглянуто смугу з вертикальною центральною тріщиною за згину на безмежності моментом M . При розрахунках враховано контакт берегів тріщини. Віднесені до величини $S_M = 6M \frac{1}{H^2}$ контактні напруження при $a/H = 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45$ наведено на рис. 1а.

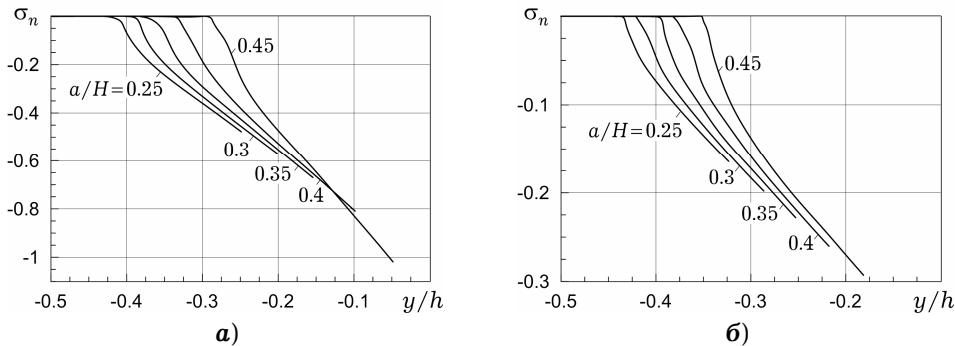


Рис. 1. Відносні контактні напруження при згині смуги: а) із центральною вертикальною тріщиною; б) із нахиленою тріщиною.

На рис. 1а видно, що область контакту мала місце у верхній частині тріщини і її довжина становить приблизно $0.5a$.

Відносні КІН $F_I = \frac{K_I}{\sqrt{\pi a} S_M}$ і \tilde{F}_I для нижньої вершини тріщини (з ура-

хуванням і без урахування контакту берегів тріщини) наведено в табл. 1. Для порівняння наведено відносні КІН без урахування контакту берегів, визначені іншим методом у [6].

Таблиця 1

a/H	F_I	\tilde{F}_I	\tilde{F}_I [6]
0.25	0.2877	0.2572	0.2572
0.3	0.3604	0.3196	0.3196
0.35	0.4523	0.3986	0.3984
0.4	0.5897	0.5185	0.5185
0.45	0.8774	0.7776	0.7777

Із табл. 1 бачимо, що знайдені різними методами КІН \tilde{F}_I без урахування контакту берегів практично збігаються. КІН F_I з урахуванням контакту берегів для всіх випадків є більшими за величиною на $10 \div 13\%$ від КІН, знайдених без урахування контакту берегів.

Аналогічні результати для нахиленої під кутом 45° центральної тріщини наведено на рис. 1б і в табл. 2. Тут A і B – нижня і верхня вершини тріщини.

Таблиця 2

a/H	$F_I(A)$	$F_{II}(A)$	$F_I(B)$	$F_{II}(B)$	$\tilde{F}_I(A)$	$\tilde{F}_{II}(A)$
0.25	0.1026	-0.0887	0	0.0902	0.0905	-0.0894
0.3	0.1272	-0.1074	0	0.1098	0.111	-0.1085
0.35	0.1548	-0.1273	0	0.1308	0.1337	-0.129
0.4	0.1866	-0.1492	0	0.154	0.1598	-0.1517
0.45	0.2249	-0.1743	0	0.1806	0.1912	-0.178

Для нахиленої тріщини контакт берегів мав місце також у верхній частині тріщини (в околі вершини B). Врахування контакту берегів неістотно змінює КІН K_{II} в обох вершинах тріщини, в той же час для тріщин великої довжини неврахування контакту може призвести при знаходженні КІН $K_I(A)$ до похибки $\approx 25\%$.

Розглянемо триточковий згин смуги силами $-P$, $2P$, $-P$, прикладеними в точках $(-\ell, -H)$, $(0, 0)$, $(\ell, -H)$. Розраховані відносні контактні напруження $\sigma_n = \sigma/S_p$ при $\ell = 2H$, $S_p = 6P\ell/H^2$ для різних довжин a/H тріщини наведено на рис. 2.

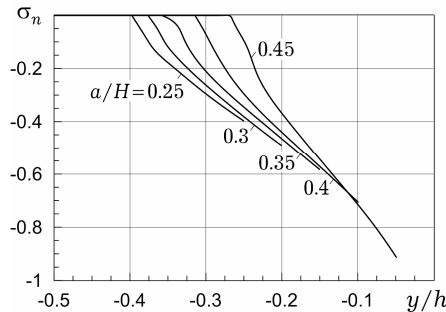


Рис. 2. Відносні контактні напруження при триточковому згині смуги із центральною тріщиною.

Розраховані відносні КІН $F_I = \frac{K_I}{(2P/H)\sqrt{\pi a}}$ для вертикальної центральної тріщини наведено у табл. 3. Для порівняння наведено також відносні КІН без урахування контакту берегів, визначені іншим методом у [6].

Таблиця 3

a/H	F_I	$F_I(A)$	$\tilde{F}_I(A)$ [6]	$F_I(B)$	$\tilde{F}_I(B)$ [6]
0.25	3.3727	3.1111	3.1095	-2.4708	-2.4714
0.3	4.2018	3.8415	3.8405	-3.1158	-3.1177
0.35	5.2674	4.7839	4.7822	-3.9264	-3.9294
0.4	6.8750	6.2273	6.2281	-5.1466	-5.1562
0.45	10.2723	9.3573	9.3547	-7.7669	-7.8157

Розглянемо смугу з тріщиною, що лежить на дузі параболи і описується рівнянням $y/a = (x-c)^2/a^2 - 1$, $-a \leq x-c \leq a$. Розраховані відносні контактні напруження при $a = 0.25H$ для значень $c/H = 0, 0.025, 0.05, 0.75, 0.1$ при триточковому згині наведено на рис. 3.

Видно, що область контакту складається із трьох ділянок, які для зсувнутої тріщини розміщені несиметрично. Зазначимо, що при використанні методу ітерації визначають межі ділянок контакту, що зводиться до знаходження чотирьох коренів системи нелінійних рівнянь, які не можна записати у явному вигляді. Зазначимо, що для пошуку таких коренів у літературі пропонується використовувати метод половинного ділення, який застосовний тільки для випадку, коли є одна ділянка контакту і вона прилягає до однієї із вершин тріщини.

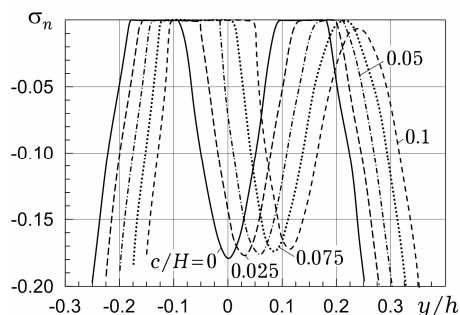


Рис. 3. Відносні контактні напруження при триточковому згині смуги із криволінійною тріщиною.

Відносні КІН у вершинах криволінійної тріщини наведено у табл. 4.

Таблиця 4

c/H	$F_I(A)$	$F_{II}(A)$	$F_I(B)$	$F_{II}(B)$	$\tilde{F}_I(A)$	$\tilde{F}_{II}(A)$	$\tilde{F}_I(B)$	$\tilde{F}_{II}(B)$
0.0	0	0.023	0	-0.023	-0.090	0.055	-0.090	-0.055
0.025	0	0.026	0	-0.019	-0.082	0.060	-0.097	-0.049
0.05	0	0.029	0	-0.015	-0.074	0.065	-0.104	-0.044
0.075	0	0.031	0	-0.011	-0.065	0.068	-0.110	-0.038
0.1	0	0.033	0	-0.007	-0.056	0.071	-0.115	-0.032

Висновки. Запропоновано алгоритм дослідження напруженого стану ізотропних пластинок із тріщинами з урахуванням контакту їх берегів, який базується на методі інтегральних рівнянь. Задача знаходження стрибків переміщень зведена до системи альтернативних рівнянь-нерівностей і далі до задачі квадратичного програмування. Ефективність алгоритму проілюстрована при дослідженні напружень біля тріщин при різних навантаженнях з несиметрично розміщеними ділянками контакту. Встановлено випадки, коли врахування контакту берегів тріщини мало або істотно впливає на значення КІН.

1. Божидарнік В. В., Максимович О. В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 226 с.
2. Божидарнік В. В., Максимович О. В. Розрахунок напруженого стану анізотропних пластинок із крайовими тріщинами за врахування контакту їх берегів // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2011. – Вип. 15, т. 2, № 5. – С. 29–39.
3. Дацишин О. П., Марченко Г. П. Напружений стан півплощини з крайовою половою тріщиною під герцівським навантаженням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – 44, № 1. – С. 23–35.
Te same: Datsyshyn O. P., Marchenko H. P. Stressed state of a half plane with shallow edge crack under Hertzian loading (a survey) // Mater. Sci. – 2008. – 44, No. 1. – P. 22–34.
4. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1983. – 278 с.
5. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
6. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с. – Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие в 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка. – Т. 2.
7. Саврук М. П., Максимович Я. В. Побудова розв'язку типу Гріна задачі теорії пружності для смуги // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – 35, № 6. – С. 17–21.
Te same: Savruk M. P., Maksymovych Ya. V. Green-type solution of a problem of the theory of elasticity for a strip // Mater. Sci. – 1999. – 35, No. 6. – P. 770–776.
8. Mason J. C., Handscomb D. C. Chebyshev polynomials. – London, New York, Washington: CRC Press LLC, 2003. – 335 p.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИНКАХ С ТРЕЩИНАМИ
ПРИ ДИСКРЕТНОМ КОНТАКТЕ ИХ БЕРЕГОВ**

Приведен алгоритм определения напряженного состояния изотропных пластинок с трещинами с учетом контакта их берегов, базирующийся на методах интегральных уравнений и квадратичного программирования. Исследованы контактные напряжения возле трещин в полосе при различных нагрузениях с несимметрично размещенными зонами контакта. Установлено влияние контакта берегов трещин на значения коэффициентов интенсивности напряжений.

**DETERMINATION OF STRESSES IN PLATES WITH CRACKS AT
DISCRETE CONTACT OF THEIR FACES**

The algorithm for determining the stress state of isotropic plates with cracks taking into account the contact of their faces, based on the methods of integral equations and quadratic programming is presented. Contact stresses near cracks in the strip at various loadings with asymmetrically placed contact zones are investigated. The effect of the contact of the crack faces on the values of the stress intensity factors is established.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
17.11.11