

ДОСЛІДЖЕННЯ ЯВИЩА ЗАНУРЕННЯ НА ДІАГРАМІ ІНТЕНСИВНІСТЬ НАПРУЖЕНЬ – ІНТЕНСИВНІСТЬ ДЕФОРМАЦІЙ ПРИ СКЛАДНОМУ НАВАНТАЖЕННІ ПРУЖНОПЛАСТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ

З використанням варіанта теорії пластичності [5], заснованої на концепції ковзання [7], наведено тлумачення і з'ясовано можливість аналітичного опису встановленого в експерименті [1, 3] явища занурення на діаграмі $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ за складного по дволанкових траєкторіях навантаження пружнопластичних матеріалів. Записано умови, за яких явище занурення, а також інші можливі форми збурення діаграми $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ можуть бути реалізовані при зламі траєкторії навантаження.

1. Вихідні положення. Розглянемо в умовах плоского напруженого стану два процеси навантаження елемента тіла: простий Oab і складний Oab_1 по дволанковій траєкторії з кутом зламу λ (рис. 1). Такий напружений стан наближено можна реалізувати в стандартних тонкостінних трубчатих зразках під дією осової розтягувальної сили та внутрішнього радіального тиску.

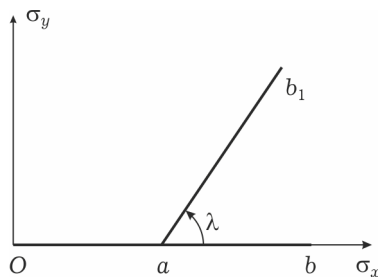


Рис. 1

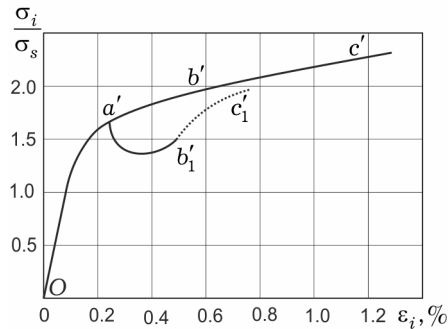


Рис. 2

Якісна картина виявленого в експерименті [1, 3] явища занурення з утворенням лунки на діаграмі $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ відображена на рис. 2, де лінією $Oa'b'c'$ показана діаграма при простому навантаженні, а $Oa'b'_1c'_1$ – при складному для значних ($\lambda \approx \pi/2$) кутів зламу траєкторії навантаження. Далі дослідження явища занурення проводиться з позиції варіанта теорії ковзання [4, 5] з використанням сингулярної функції зміцнення $F(\omega)$.

2. Математичні засади теорії пластичності [5], заснованої на концепції ковзання [7]. Задача визначення деформації нелінійної моделі плоскопластичного ($\varepsilon_z^{(p)} = 0$) середовища [4, 5] при довільному навантаженні зводиться до визначення швидкості інтенсивності зсуву $\varphi'_t(\theta, t)$ і меж напрямків зсуву $-\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ із системи інтегральних рівнянь

$$\int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} R[\varepsilon_i^{(p)}(t), \lambda_k^*(t), |\theta - \theta_0|] \varphi'_t(\theta, t) d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos[\vartheta(t) - 2\theta_0 - \Phi_0], \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \tau_s + \int_{t_0 - \alpha_1(\xi)}^t \int_{-\alpha_1(\xi)}^{\alpha_2(\xi)} R[\varepsilon_i^{(p)}(\xi), \lambda_k^*(\xi), |\theta - \theta_0|] \varphi'_\xi(\theta, \xi) d\theta d\xi = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} S(t) \cos 2[\theta_0 - \Phi(t)], \quad \theta_0 \in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут і далі використовуємо прийняті раніше [4, 6] позначення, зокрема $\omega = |\theta - \theta_0|$ – кут між напрямком $\mathbf{n}(\theta)$ зсуву і довільним напрямком $\mathbf{m}(\theta_0)$ у площині деформації Oxy ; t_0 і t – початковий і довільний моменти пластичного деформування,

$$\begin{aligned} S(t) &= \sqrt{S_1^2(t) + S_3^2(t)}, \quad S_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} [\sigma_x(t) - \sigma_y(t)], \quad S_3(t) = \sqrt{2} \tau_{xy}(t), \\ \Phi(t) &= \Phi_1(t) - \Phi_0, \quad 2\Phi_1(t) = \arctg[S_3(t)/S_1(t)], \quad \Phi_0 = \Phi_1(t_0), \\ \vartheta(t) &= \arctg[dS_3(t)/dS_1(t)], \quad dt = \sqrt{dS_1^2 + dS_3^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Постулюємо [4, 5], що універсальну функцію матеріалу $R[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*, \omega]$ можна подати у вигляді добутку двох функцій

$$R[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*, \omega] = \Pi[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*] F(\omega), \quad (4)$$

одна з яких (F) враховує перехресну взаємодію систем ковзання і визначає деформаційну анізотропію матеріалу, а друга (Π) – вплив на R інтенсивності пластичної деформації та її екстремальних значень λ_k^* , що відповідають зміні знаку швидкості $\dot{\varepsilon}_i^{(p)}(t)$ на протилежний. У випадку пластичного деформування, для якого $\varepsilon_i^{(p)}$ є неспадною функцією часу ($\dot{\varepsilon}_i^{(p)} \geq 0$), замість виразу (4) приймаємо $R = \Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}] F(\omega)$. Методика визначення $\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]$ наведена в [4, 6]. Сингулярну функцію зміцнення $F(\omega)$ з точністю до адитивної сталої, яка далі включається множителем у функцію пластичності $\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]$, задаємо формулою [4, 6]

$$F(\omega) = a_0 + a_2 \cos 2\omega + a_3 \delta(\omega) + a_4 \delta(\pi/2 - \omega), \quad (5)$$

де $\delta(\omega)$ – дельта-функція Дірака, $a_i \sim \text{const}$.

За відомих $\varphi'_t(\theta, t)$, $\alpha_{1,2}(t)$ компоненти вектора швидкості $\dot{\Gamma}^{(p)}$ плоско-пластичної деформації визначаються квадратурами

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_1^{(p)} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi'_t(\theta, t) \cos 2(\theta + \Phi_0) d\theta, \\ \dot{\Gamma}_3^{(p)} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi'_t(\theta, t) \sin 2(\theta + \Phi_0) d\theta, \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\dot{\Gamma}_1^{(p)}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} [\dot{\varepsilon}_x^{(p)}(t) - \dot{\varepsilon}_y^{(p)}(t)], \quad \dot{\Gamma}_3^{(p)}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\gamma}_{xy}^{(p)}(t).$$

Пружні складові вектора швидкості $\dot{\Gamma}^{(e)}$ задаються законом Гука

$$\dot{\Gamma}_1^{(e)}(t) = \frac{\dot{S}_1(t)}{2G}, \quad \dot{\Gamma}_3^{(e)}(t) = \frac{\dot{S}_3(t)}{2G}, \quad \dot{\Gamma}(t) = \dot{\Gamma}^{(e)}(t) + \dot{\Gamma}^{(p)}(t), \quad G = \frac{E}{3}. \quad (7)$$

Зазначимо, що визначальні рівняння (6) і (7) задовольняють постулат ізотропії Гльюшина.

3. Задача про занурення для дволанкової траєкторії навантаження.

Складному процесу навантаження Oab_1 (рис. 1) тонкостінної трубки в площині OS_1S_2 (тут $S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$, $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma - \sigma_z)$, $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/3$, $\sigma_z = 0$)

п'ятивимірному простору Ільюшина [2] відповідає траєкторія $OA_1B_1C_1$ з кутом зламу $\vartheta_1 = \arctg[(1 + \tg \lambda)/(\sqrt{3}(1 - \tg \lambda))]$ (рис. 3). Одночасно з траєкторією $OA_1B_1C_1$ будемо розглядати в площині OS_1S_3 (тут $S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$, $S_3 = \sqrt{2}\tau_{xy}$) допоміжну траєкторію $OABC$, яка відповідає плоскопластичній деформації ($\varepsilon_z^{(p)} = 0$). Якщо покласти $OA = OA_1$ і $\vartheta = \vartheta_1$, то згідно з постулатом ізотропії Ільюшина образи процесів [2] і, зокрема, залежність між інтенсивностями σ_i і ε_i ($\sigma_i = \sqrt{3/2}S$, $\varepsilon_i = \sqrt{2/3}\Gamma$) для двох зазначених траєкторій навантаження будуть співпадати. У такий спосіб задачу про занурення за плоского напруженого стану звели до аналогічної задачі за умови плоскопластичної деформації.

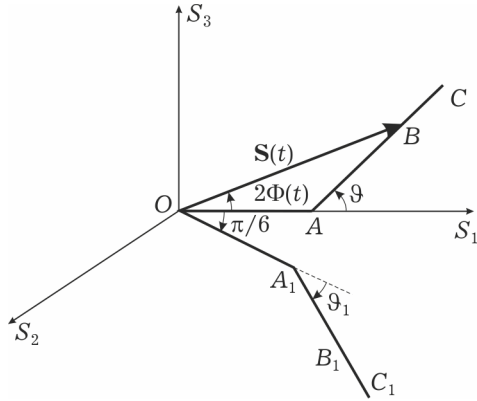


Рис. 3

Зв'язок між кутами λ і ϑ зламу траєкторій Oab_1 (рис. 1) і OAB (рис. 3) задається формулою

$$\lambda = \arctg \left[\frac{\sqrt{3} \tg(\vartheta + \pi/6) - 1}{\sqrt{3} \tg(\vartheta + \pi/6) + 1} \right]. \quad (8)$$

Характерні значення кутів ϑ і λ та зв'язок між ними наведено в табл. 1. Формулу для визначення $\alpha_A = \alpha(t_A)$ буде записано нижче.

Таблиця 1

ϑ	0	$\pi/3$	$\pi/2 + 2\alpha_A$	$2\pi/3$	π
λ	0	$\arctg 2$	$\arctg \frac{\sqrt{3} + \tg(\pi/6 + 2\alpha_A)}{\sqrt{3} - [\pi/6 - \tg(\pi/6 - 2\alpha_A)]}$	$\pi/2$	π

4. Плоскопластична деформація при простому навантаженні. Розглянемо спочатку процес пружнопластичного деформування елемента тіла для першого етапу навантаження $OA = S(t_A)$ дволанкової траєкторії $OABC$ (рис. 3). На основі формул (3) і (4) можемо записати

$$S_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_x(t), \quad S_3(t) = 0, \quad \Phi(t) = 0, \quad \Phi_1(t) = \Phi_1(t_0) = \Phi_0 = 0,$$

$$\vartheta = 0, \quad \alpha_1(t) = \alpha_2(t) = \alpha(t), \quad dt = dS_1, \quad t \in [t_0, t_A].$$

Рівняння (1) і (2) перепишемо так:

$$\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}(t)] \int_{-\alpha(t)}^{\alpha(t)} F(|\theta - \theta_0|) \varphi'_t(\theta, t) d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\theta_0, \quad (9)$$

$$\tau_s + \int_{t_0}^t \Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}(\xi)] \int_{-\alpha(\xi)}^{\alpha(\xi)} F(|\theta_0 - \theta|) \varphi'_\xi(\theta, \xi) d\theta d\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} S(t) \cos 2\theta_0,$$

$$\theta_0 \in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)], \quad t \in [t_0, t_A]. \quad (10)$$

Для $F(\omega)$ з (5) розв'язок системи інтегральних рівнянь (9) і (10) задаємо формулами [4, 6]

$$\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}(t)]\varphi_i'(\theta, t) \equiv \psi(\theta, t) = A_1(\alpha) \cos 2\theta + C_1(\alpha), \quad (11)$$

$$A_1(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a_3 + 2a_0\alpha}{[a_3 + a_2(\alpha + 0.25 \sin 4\alpha)](a_3 + 2a_0\alpha) - a_0a_2 \sin^2 2\alpha},$$

$$C_1(\alpha) = -A_1(\alpha) \frac{a_0 \sin 2\alpha}{a_3 + 2a_0\alpha}. \quad (12)$$

Функція $\alpha(t)$ і, зокрема, $\alpha_A = \alpha(t_A)$ визначається рівнянням

$$\frac{(a_3 + 2a_0\alpha) \cos 2\alpha - a_0 \sin 2\alpha}{a_3 + a_2(\alpha - 0.25 \sin 4\alpha)} = \frac{\sqrt{2} \tau_s}{S(t)}, \quad (13)$$

де

$$\frac{S(t)}{\sqrt{2} \tau_s} \equiv \frac{\sigma_i(t)}{\sigma_s}, \quad \sigma_s = \sqrt{3} \tau_s.$$

Для компонент вектора $\dot{\Gamma}^{(p)}(t)$ швидкості плоскопластичної деформації за формулами (6) і (11) одержуємо

$$\dot{\Gamma}_1^{(p)}(t) = \frac{B_{11}(\alpha)}{\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}(t)]}, \quad \dot{\Gamma}_3^{(p)}(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_A],$$

$$B_{11}(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} A_1(\alpha) \left[\alpha + 0.25 \sin 4\alpha - \frac{a_0 \sin^2 2\alpha}{a_3 + 2a_0\alpha} \right]. \quad (14)$$

Функцію пластичності $\Pi_0 = \Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]$ визначаємо шляхом співставлення експериментальної і теоретичної діаграм $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ за простого навантаження. Відповідна методика описана в роботі [6]. Зокрема, для сталі-45 можемо записати

$$\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}] = d_1 + d_2(\varepsilon_i^{(p)})^{-r}, \quad (15)$$

де $d_1 = 0.56$ МПа, $d_2 = 3.15$ МПа, $r = 0.29$. Діаграма $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ для зазначеного матеріалу при простому навантаженні зображена на рис. 2 суцільною лінією $Oa'b'c'$. Її апроксимація за межею пружності визначається формулою [6]

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_s} = 1 - \frac{c_1}{\sigma_s} + \frac{c_2}{\sigma_s} (\varepsilon_i - \varepsilon_s + c_3)^n \quad (16)$$

при $\sigma_s = 220$ МПа, $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа, $\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E} 100\%$, $c_1 = 1125$ МПа, $c_2 = 1360$ МПа, $c_3 = 0.023$ МПа, $n = 0.05$.

5. Деформаційна анізотропія матеріалу. Пластична деформація початково ізотропного матеріалу призводить до утворення деформаційної анізотропії. У рамках моделі плоскопластичного середовища [4, 5] характеристикою анізотропії є опір зсуву $R_m(\theta_0, t)$. Для пропорційного навантаження $\mathbf{OA} = \mathbf{S}(t)$ (рис. 3), зокрема, маємо

$$R_m(\theta_0, t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} S(t) \cos 2\theta_0, & \theta_0 \in [-\alpha(t), \alpha(t)], \\ Q_1(\theta_0, t), & \theta_0 \in \left[\alpha(t), \frac{\pi}{2} - \alpha(t) \right], \\ Q_2(\theta_0, t), & \theta_0 \in \left[\frac{\pi}{2} - \alpha(t), \frac{\pi}{2} + \alpha(t) \right], \end{cases}$$

$$R_{m'}(\theta_0 \pm \pi, t) = R_m(\theta_0, t), \quad R_{-m}(\theta_0, t) = R_m(\pi/2 + \theta_0, t). \quad (17)$$

Тут

$$\begin{aligned}
 Q_1(\theta_0, t) &= b_0(\alpha) + b_1(\alpha) \cos 2\theta_0, \\
 Q_2(\theta_0, t) &= Q_1(\theta_0, t) - A_0(\alpha) \tau_s a_4 (\cos 2\theta_0 - \cos 2\alpha), \\
 b_0(\alpha) &= \tau_s [1 + A_0(\alpha) a_0 (\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)], \\
 b_1(\alpha) &= \tau_s A_0(\alpha) a_2 (\alpha - 0.25 \sin 4\alpha), \\
 A_0(\alpha) &= [(a_3 + 2a_0\alpha) \cos 2\alpha - a_0 \sin 2\alpha]^{-1}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Якщо функція $R_m(\theta_0, t)$ відома, то лінія Σ навантаження (перетин поверхні навантаження площиною OS_1S_3) визначається формулами

$$\begin{aligned}
 S_1(t) &= \sqrt{2} R_m(\theta_0, t) \cos 2\theta_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial R_m(\theta_0, t)}{\partial \theta_0} \sin 2\theta_0, \\
 S_3(t) &= \sqrt{2} R_m(\theta_0, t) \sin 2\theta_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial R_m(\theta_0, t)}{\partial \theta_0} \cos 2\theta_0.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Для простого навантаження $\mathbf{OA} = \mathbf{S}(t_A)$ лінія Σ симетрична відносно вектора $\mathbf{S}(t_A)$ (рис. 4) і складається із трьох характерних частин:

а) дуг B_1C_1 і B_2C_2 кола радіуса R з центром в точці O_1 , де

$$R_1 = \sqrt{2} b_0(\alpha_A), \quad |\mathbf{OO}_1| = \sqrt{2} b_1(\alpha_A); \tag{20}$$

б) кута B_1AB_2 ($2\beta^* = \pi - 4\alpha_A$), сторони якого дотикаються до кола радіуса R ;

в) дуги C_1DC_2 кола радіуса R_1 з центром у точці O_2 , де

$$R_1 = \sqrt{2} [b_0 + \tau_s A_0 |a_4| \cos 2\alpha_A], \quad |\mathbf{OO}_2| = |\mathbf{OO}_1| + \sqrt{2} \tau_s A_0(\alpha_A) |a_4|.$$

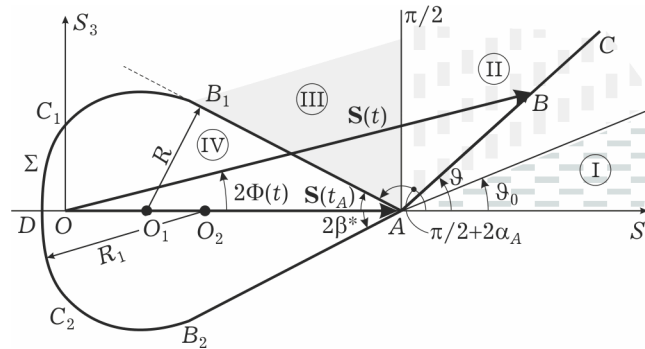


Рис. 4

Відрізок OD характеризує міру ефекту Баушінгера. Величина кута конусності $2\beta^*$ поверхні навантаження Σ в точці A (рис. 4) визначається довжиною вектора $\mathbf{S}(t_A)$, але не залежить від його орієнтації в площині OS_1S_3 . Заштриховані в різний спосіб області **I–III** напрямків довантаження \mathbf{AB} на рис. 4 відповідають різним розв'язкам пружнопластичної задачі про вплив кутової точки на діаграму $\sigma_i \sim \varepsilon_i$. Обмежена лінією Σ область **IV** ($\vartheta \in [\pi/2 + 2\alpha_A, \pi]$) призводить до розвантаження за пружним законом. Усі чотири області доповнюються симетричними відносно осі OS_1 областями.

6. Про (не)можливі умови реалізації явища занурення на діаграмі $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ за дволанкової траєкторії навантаження. У раніше опублікованих роботах [4, 6] питання про причини утворення занурення на діаграмі $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ безпосередньо не розглядалося, але одержані там результати шляхом простих перерахунків компонент тензора напружень і деформацій на інтенсивності σ_i , ε_i дають можливість однозначно зробити такі висновки:

1°. Якщо кут зламу $\vartheta = \arctg(dS_3/dS_1)$ траєкторії OAB (рис. 4) менший або дорівнює куту ϑ_0 , що визначається формулами

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{2\sqrt{2} \tau_s}{S(t_A) f'(\alpha_A)}, \quad f'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{a_0 \sin 2\alpha - (a_3 + 2a_0 \alpha \cos 2\alpha)}{a_3 + a_2(\alpha - 0.25 \sin 4\alpha)} \right], \quad (21)$$

то процес пружнопластичного деформування здійснюється на шляхах повного довантаження без часткового гальмування систем ковзання і відбувається так звана монотонна деформація [5]. Отже,

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2}(t_A + 0) &= \alpha_{1,2}(t_A - 0), & \dot{\Gamma}_{1,3}(t_A + 0) &= \dot{\Gamma}_{1,3}(t_A - 0), \\ E_{it}(t_A + 0) &= E_{it}(t_A - 0), \end{aligned} \quad (22)$$

де

$$E_{it} = d\sigma_i/d\varepsilon_i, \quad \dot{S}(t) = \sqrt{2/3} \dot{\sigma}_i(t) > 0, \quad \dot{\Gamma}(t) = \sqrt{3/2} \dot{\varepsilon}_i(t) > 0.$$

Кутова точка на траєкторії навантаження не вносить збурення в діаграму $\sigma_i \sim \varepsilon_i$. При цьому межі напрямків ковзання визначаються формулою

$$\alpha_{1,2}(t) = \alpha(t) \mp \Phi(t), \quad (23)$$

де $\alpha(t) < \pi/4$ – корінь рівняння (13). А для компонент швидкості монотонної плоскопластичної деформації після зламу траєкторії навантаження на основі (6) і (11) одержуємо

$$\dot{\Gamma}_1^{(p)} = \frac{B_{11}(\alpha)}{\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]} \cos 2\Phi, \quad \dot{\Gamma}_3^{(p)} = \frac{B_{11}(\alpha)}{\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]} \sin 2\Phi, \quad t > t_A. \quad (24)$$

2°. Якщо кут зламу траєкторії OAB змінюється в межах $\vartheta \in \left[\vartheta_0, \frac{\pi}{2} + 2\alpha_A \right]$,

де $\alpha = \alpha_A$ визначається рівнянням (13), то цьому випадку відповідають дві області напрямків довантаження **AB**, позначені на рис. 4 цифрами **II** ($\vartheta \in [\vartheta_0, \pi/2]$) і **III** ($\vartheta \in [\pi/2, \pi/2 + 2\alpha_A]$). Тут, на відміну від монотонної деформації, при переході через кутову точку траєкторії OAB процес здійснюється з частковим або (при $\vartheta = \pi/2 + 2\alpha_A$) повним гальмуванням систем ковзання, що призводить до стрибкоподібного збурення компонент тензора швидкостей деформації і величини дотичного модуля $E_{it} = d\sigma_i/d\varepsilon_i$. Для аналітичних розрахунків в областях **II** і **III** в малому околі точки зламу траєкторії навантаження маємо такі формули [6]:

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_1 &= \frac{\cos \vartheta}{2G} + \frac{B_{11}(\alpha^*) \cos(\vartheta - 2\chi^*) \cos 2\chi^* - B_{12}(\alpha^*) \sin(\vartheta - 2\chi^*) \sin 2\chi^*}{\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]}, \\ \dot{\Gamma}_3 &= \frac{\sin \vartheta}{2G} + \frac{B_{11}(\alpha^*) \cos(\vartheta - 2\chi^*) \sin 2\chi^* + B_{12}(\alpha^*) \sin(\vartheta - 2\chi^*) \cos 2\chi^*}{\Pi_0[\varepsilon_i^{(p)}]}, \\ E_{it}(t_A + 0) &= \lim_{t \rightarrow t_A + 0} \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \frac{3}{2} \frac{\cos \vartheta}{\dot{\Gamma}_1(t_A + 0)}, \end{aligned} \quad (25)$$

де

$$B_{11}(\alpha^*) = \frac{\sqrt{2}}{2} A_1(\alpha^*) \left[\alpha^* + 0.25 \sin 4\alpha^* - \frac{a_0 \sin^2 2\alpha^*}{a_3 + 2a_0\alpha^*} \right],$$

$$B_{12}(\alpha^*) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^* - 0.25 \sin 4\alpha^*}{a_3 + a_2(\alpha^* - 0.25 \sin 4\alpha^*)}.$$

Значення $2\alpha^* = \alpha_2(t_A - 0) + \alpha_1(t_A + 0)$, $2\chi^* = \alpha_2(t_A - 0) - \alpha_1(t_A + 0)$ функцій $2\alpha(t)$ і $2\chi(t)$ визначаються системою рівнянь

$$\arctg[r(\alpha^*)] - 2\alpha^* = \vartheta - 2\alpha_2(t_A - 0), \quad \chi^* = \alpha_2(t_A - 0) - \alpha^*, \quad (26)$$

де

$$r(\alpha^*) = \frac{A_1(\alpha^*) \cos 2\alpha^* + C_1(\alpha^*)}{B_1(\alpha^*) \sin 2\alpha^*},$$

$$B_1(\alpha^*) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{a_3 + a_2(\alpha^* - 0.25 \sin 4\alpha^*)}.$$

Якісна різниця між областями **II** і **III** (рис. 4) полягає в тому, що в **II** маємо $\vartheta \leq \pi/2$, отже, $\dot{S} = \sqrt{2/3} \dot{\sigma}_i \geq 0$, $\dot{\Gamma} = \sqrt{3/2} \dot{\varepsilon}_i > 0$ і збурення процесу пластичного деформування відбувається без занурення на діаграмі $\sigma_i \sim \varepsilon_i$. В області **III** кут $\vartheta > \pi/2$ і в околі точки зламу траєкторії **OAB** маємо $\dot{\sigma}_i(t) < 0$, що призводить до зменшення інтенсивності напружень, тобто до занурення на діаграмі $\sigma_i \sim \varepsilon_i$. Зазначену умову ($\vartheta > \pi/2$) виникнення занурення з утворенням лунки раніше було виявлено в експерименті [1].

У площині $O\sigma_x\sigma_y$ (рис. 1) області **III** відповідає кут зламу λ , що змінюється в інтервалі $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$, де позначено

$$\lambda_1^* = \arctg 2, \quad \lambda_2^* = \arctg \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}(\pi/6 + 2\alpha_A)}{\sqrt{3}[\pi/6 - \operatorname{tg}(\pi/6 + 2\alpha_A)]}.$$

З^о. Нарешті, коли $|\vartheta| \in [\pi/2 + 2\alpha_A, \pi]$ (область **IV**, обмежена на рис. 4 лінією Σ), відбувається розвантаження за пружним законом і

$$\dot{\Gamma}_1(t) = \dot{S}_1(t)/(2G), \quad \dot{\Gamma}_3(t) = \dot{S}_3(t)/(2G), \quad E_{it} = 3G, \quad t \geq t_A + 0.$$

Графіки залежностей $E_{it}^\pm \sim \vartheta$ (де $E_{it}^+ = E_{it}(t_A + 0)$, $E_{it}^- = E_{it}(t_A - 0)$), побудовані для сталі-45 при $\sigma_i(t_A)/\sigma_s = 1.61$ ($\alpha_A = 0.225$), показано на рис. 5 для всіх чотирьох областей довантаження. Якісна картина зміни модуля E_{it}^+ з ростом кута ϑ залишається такою ж і для інших можливих сингулярних функцій зміцнення $F(\omega)$ [4].

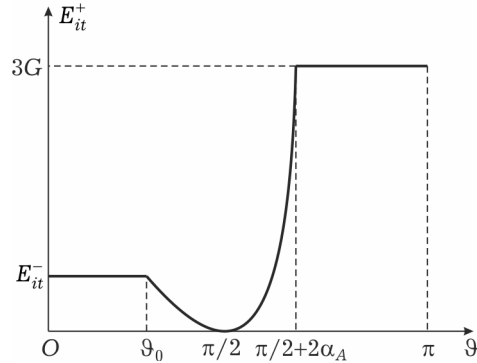


Рис. 5

7. Особливості деформації елемента тіла в околі точки зламу траєкторії навантаження.

Спочатку зупинимось на деяких особливостях діаграми $\sigma_i \sim \varepsilon_i$, побудованої з використанням результатів робіт [4, 6] і, зокрема, формул (24)–(26), поблизу кутової точки траєкторії навантаження. Її якісний вигляд відображено на рис. 6. Ділянку $a_1 b_1 c_1$ діаграми $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ для сталі-45 побудовано при простому навантаженні, а її відрізок $a_1 m c_1'$ – при складному навантаженні для $\sigma_i(t_A)/\sigma_s = 1.61$ і $\vartheta =$

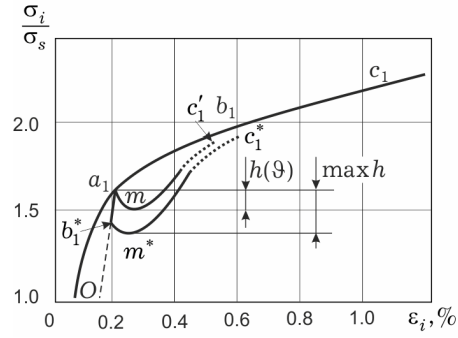


Рис. 6

$= \pi/2 + 1.5\alpha_A$. Лінія $a_1 b_1^* m^* c_1^*$ належить граничному випадку ($\vartheta = \pi/2 + 2\alpha_A$), коли відбувається розвантаження за пружним законом. Приріст пластичної деформації поновлюється з точки b_1^* , якій на рис. 4 відповідає точка B_1 .

Глибина лунки h визначається формулою

$$h = \sigma_i(t_A)(1 - \sin \vartheta), \quad \vartheta \in [\pi/2, \pi/2 + 2\alpha_A], \quad (27)$$

і, зокрема, для її максимального значення маємо вираз

$$\max h = \lim_{\vartheta \rightarrow \pi/2 + 2\alpha_A} \sigma_i(t_A)(1 - \sin \vartheta) = 2\sigma_i(t_A) \sin^2 \alpha_A. \quad (28)$$

У другому граничному випадку маємо

$$\min h = \lim_{\vartheta \rightarrow \pi/2} \sigma_i(t_A)(1 - \sin \vartheta) = 0, \quad (29)$$

і лунка стягується в точку (занурення відсутнє). Кількісна оцінка залежності $h \sim \vartheta \in [\pi/2, \pi/2 + 2\alpha_A]$ задається табл. 2, яка побудована для сталі-45 при $\sigma_i(t_A)/\sigma_s = 1.61$. Глибина h зростає з ростом пластичної деформації $\varepsilon_i^{(p)}(t_A)$ і кута ϑ зламу траєкторії навантаження.

Таблиця 2

ϑ	$\pi/2$	$\pi/2 + \alpha_A$	$\pi/2 + 1.5\alpha_A$	$\pi/2 + 2\alpha_A$
$h/\sigma_s, \%$	0	3.7	8.7	16.3

8. Довжина сліду впливу кутової точки траєкторії навантаження на діаграму $\sigma_i \sim \varepsilon_i$. При довільному навантаженні елемента тіла компоненти вектора швидкості $\dot{\Gamma}^{(p)}$ плоскопластичної деформації задаються формулами (6). Функції $\varphi'_t(\theta, t)$, $\alpha_{1,2}(t)$, що входять у ці формули, при монотонній деформації визначаються аналітично або чисельно, якщо умови монотонності не виконуються. Відповідні методики та їх аналітичні, а також числові реалізації запропоновано, зокрема, в роботах [4–6]. Вони містять також формули (24)–(26).

Розглянемо достатньо загальний випадок немонотонного навантаження елемента тіла вздовж дволанкової траєкторії $OABC$ (рис. 7), коли якісна картина зміни функції $\alpha_{1,2}(t)$ характеризується графіками, зображеними на рис. 8. Пропорційному навантаженню уздовж першої ланки траєкторії OA відповідає ділянка Oa зміни функцій $\alpha_1(t)$ і $\alpha_2(t)$, де $t \in [t_0, t_A - 0]$. При переході через кутову точку траєкторії функція $\alpha_2(t)$ змінюється неперервно, а $\alpha_1(t)$ зазнає розриву першого роду, так що $\alpha_1(t_A + 0) < \alpha_1(t_A - 0)$.

При подальшому деформуванні до деякого моменту часу $t_1 \geq t_A + 0$ функція $\alpha_1(t)$ монотонно зменшується, а потім зростає і при $t = t^*$ (рис. 8) досягає значення $\alpha_1^- = \alpha_1(t_A - 0)$. Часткові випадки зміни графіків функцій $\alpha_1(t)$ і $\alpha_2(t)$, коли $t_1 = t_A + 0$ (квазімонотонне навантаження [4]) або $t_1 \rightarrow \infty$ (істотно немонотонне навантаження) не виключаються із розгляду.

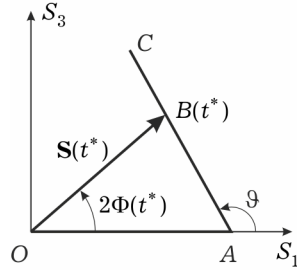


Рис. 7

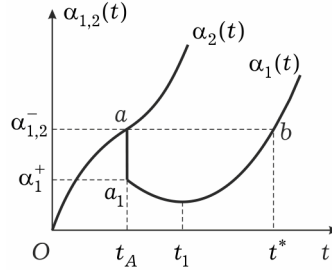


Рис. 8

Відповідно до рис. 8 кінетика зміни в часі інтенсивності зсуву $\varphi(\theta, t)$ схематично показана на рис. 9, де позначено $\alpha_{1,2}^- = \alpha_{1,2}(t_A - 0)$, $\alpha_1^+ = \alpha_1(t_A + 0)$ і враховано умову $\alpha_1^- \equiv \alpha_1(t_A - 0) = \alpha_1(t^*)$. Подальше ($t > t^*$) зростання інтенсивності зсуву $\varphi(\theta, t)$ позначено пунктиром. При цьому для всіх напрямків $\theta \in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)]$, уздовж яких при $t > t^*$ відбулися ковзання, маємо

$$\varphi(\theta, t) > \varphi(\theta, t^*), \quad \frac{\partial \varphi(\theta, t)}{\partial t} > 0, \quad \dot{\alpha}_{1,2}(t) > 0. \quad (30)$$

Це означає [4, 5], що з моменту часу $t^* + 0$ поновлюється процес монотонного приросту пластичної деформації. Компоненти вектора швидкості $\dot{\Gamma}^{(p)}$ визначаються формулами (24), а межі напрямків ковзання – системою рівнянь (13), (26). Далі довжину $|\mathbf{AB}| = t_B^* - t_A$ (рис. 7), яка визначається умовою $\alpha_1(t^*) = \alpha_1(t_A - 0)$, будемо позначати через Λ і називати довжиною сліду впливу кутової точки траєкторії навантаження на діаграму $\sigma_i \sim \varepsilon_i$. При заданих $\mathbf{OA} = \mathbf{S}(t_A)$, $\vartheta > \vartheta_0$ і визначеній з рівняння $\alpha_1(t^*) = \alpha_1(t_A - 0)$ величині Λ для довжини вектора $\mathbf{S}(t^*)$ і його орієнтації $2\Phi(t^*)$ можемо записати

$$S(t^*) = [S^2(t_A) + \Lambda^2 + 2S(t_A)\Lambda \cos \vartheta]^{1/2}, \quad 2\Phi(t^*) = \arcsin \left[\frac{\Lambda \sin \vartheta}{S(t^*)} \right]. \quad (31)$$

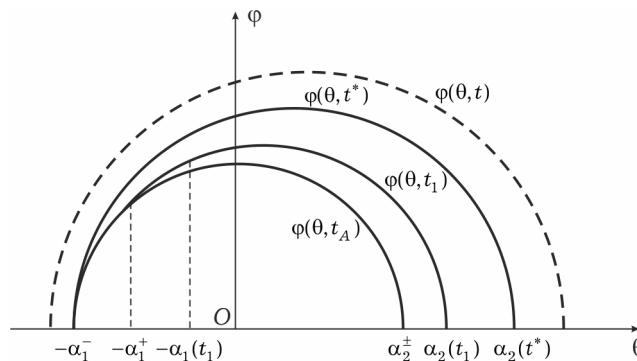


Рис. 9

Як частковий випадок визначимо величину кута $\vartheta = \vartheta_\infty$, за якого довжина Λ прямує до нескінченності, тобто $\Lambda \rightarrow S(t^*) \rightarrow \infty$ і $2\Phi(t^*) \rightarrow \vartheta = \vartheta_\infty$.
Із рівності (13) при $S(t^*) \rightarrow \infty$ маємо

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\infty - 2\alpha_\infty = a_3/a_0, \quad \alpha_\infty < \pi/4. \quad (32)$$

В свою чергу, формула (23) при $t = t^* \rightarrow \infty$ дає

$$\vartheta_\infty = 2\alpha_\infty - 2\alpha(t_A - 0). \quad (33)$$

Отже, якщо кут $\vartheta = \vartheta_\infty$ визначається формулами (32), (33), то довжина сліду впливу кутової точки Λ прямує до нескінченності.

Наявність при розглянутому способі (рис. 8 і рис. 9) немонотонного деформування скінченної довжини сліду Λ , після проходження якої діаграма $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ при складному навантаженні виходить на діаграму при монотонному навантаженні, можна пояснити ще таким чином.

Залежність $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ формується механічними властивостями початково ізотропного матеріалу і деформаційною анізотропією, що супроводжує процес пружнопластичного деформування. У межах нелінійної моделі плоскопластичного середовища [5] деформаційна анізотропія визначається опором зсуву $R_m(\theta_0, t)$, тобто лівою частиною рівняння (2). Розрахунки свідчать, що величина і орієнтація опору зсувові за складного навантаження OAB при $t = t^*$ ($\alpha_1(t^*) = \alpha_1(t_A - 0)$) тотожно співпадають з анізотропією при простому навантаженні, описаному вектором $\mathbf{OB} = \mathbf{S}(t^*)$, спрямованим під кутом $2\Phi(t^*) = \alpha_2(t^*) - \alpha_1(t_A - 0)$ до осі OS_1 . За таких умов залежність $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ після проходження сліду $\Lambda = |\mathbf{AB}|$ описується деформацією при монотонному навантаженні OBC (рис. 7) без збурень діаграми інтенсивність напружень \sim інтенсивність деформацій.

На завершення розглянемо так звану істотно немонотонну деформацію [4], за якої скінченної і навіть нескінченної довжини Λ взагалі не існує. Дійсно, при істотно немонотонній деформації $\alpha_1(t_A + 0) < \alpha_1(t_A - 0)$, $\dot{\alpha}_1(t) < 0$, $t_1 \rightarrow \infty$ (рис. 8) і не існує такого $t^* > t_1$, при якому величина $\alpha_1(t^*)$ досягає значення $\alpha_1(t_A - 0)$, тобто і на нескінченності ($t \rightarrow \infty$) вплив кутової точки траєкторії навантаження не є «забутим». Експериментальне підтвердження цього висновку також можна знайти в роботі [1].

Висновки. Залежно від історії навантаження явище занурення з утворенням лунки на діаграмі $\sigma_i \sim \varepsilon_i$, а також інші можливі типи її збурення можуть проявлятися різною мірою і бути значними, неістотними, або зовсім відсутніми. Твердження, які ще зустрічаються в літературі, про локальний характер лунки на діаграмі $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ при зламі траєкторії навантаження не є виправданими. Використання варіанта теорії пластичності [5] для аналітичного опису збурень діаграми $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ при складному навантаженні видається перспективним. Раніше було показано, що зазначений варіант теорії задовольняє постулат Друккера, принцип макродетермінізму (стійкість процесу деформування), диференціальну потенціальність визначальних рівнянь зв'язку $\dot{\sigma}_{mn} \sim \dot{\varepsilon}_{mn}$, описує ефекти Баушінгера і Фейгена, а також явища вторинного плану, виявлені в експериментах при складному навантаженні конструкційних матеріалів.

1. Аннин Б. Д., Жигалкин В.М. Поведение материалов в условиях сложного нагружения. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – 342 с.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. – Москва: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
3. Ленский В. С. Введение в теорию пластичности. – Москва: Изд-во МГУ, 1968. – 110 с.
4. Швайко Н. Ю. Сложное нагружение и вопросы устойчивости. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. гос. ун-та, 1989. – 176 с.
5. Швайко Н. Ю. К теории пластичности, основанной на концепции скольжения // Прикл. механика. – 1976. – **12**, № 11. – С. 12–24.
The same: *Shvaiko N. Yu.* Theory of plasticity, based on the concept of slip // Soviet Appl. Mech. – 1976. – **12**, No. 11. – P. 1102–1112.
6. Швайко М. Ю., Фількевич М. М. Аналітичне та експериментальне дослідження деформації сталі-45 при складному навантаженні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 1. – С. 188–197.
7. Batdorf S. B., Budiansky B. A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip // NASA. Techn. Notes No. 1871. – April, 1949.
The same: Батдорф С. Б., Будянски Б. Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения // Механика: Сб. пер. иностр. статей. – 1962. – № 1. – С. 135–155.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ НЫРКА НА ДИАГРАММЕ
ИНТЕНСИВНОСТЬ НАПРЯЖЕНИЙ – ИНТЕНСИВНОСТЬ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ
СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ**

С использованием варианта теории пластичности [5], основанной на концепции скольжения [7], дано объяснение и показана возможность аналитического описания установленного в эксперименте [1, 3] явления нырка на диаграмме $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ при сложном по двухзвенным траекториям нагружения упругопластических материалов. Записаны условия, при которых явление нырка, а также другие возможные типы возмущений диаграммы $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ могут быть реализованы при изломе траектории нагружения.

**INVESTIGATION OF THE DIVING PHENOMENON
ON THE STRESSES – STRAINS INTENSITY DIAGRAM FOR
ELASTOPLASTIC MATERIALS UNDER THE COMPLEX LOADING**

Using the version of plasticity theory [5], based on sliding conception [7], both the explanation and the possibility of the analytical description were shown for the diving phenomenon observed experimentally [1, 3]. This phenomenon appears on the diagram $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ for elastoplastic materials under the complex loading along double-link trajectories. The conditions were formulated for realization of the diving phenomenon and the other possible disturbances of the diagram $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ in the presence of a break on the loading trajectory.

Дніпропетр. нац. ун-т
ім О. Гончара, Дніпропетровськ

Одержано
19.11.12