УДК 517.95

Г. А. Снітко

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ ЗАЛЕЖНИХ ВІД ЧАСУ ФУНКЦІЙ У МОЛОДШОМУ КОЕФІЦІЄНТІ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Встановлено умови однозначної розв'язності оберненої задачі визначення залежних від часу параметрів у коефіцієнті при невідомій функції в одновимірному параболічному рівнянні в області з вільною межею.

Серед обернених задач найчастіше зустрічаються коефіцієнтні обернені задачі, в яких до невідомих належить один або декілька коефіцієнтів рівняння. Задачі такого типу достатньо повно вивчені. У перших працях, присвячених оберненим задачам для рівнянь параболічного типу, було встановлено можливість однозначного визначення залежного від часу коефіцієнта температуропровідності в одновимірному рівнянні теплопровідності, коли в додатковій умові задається значення теплового потоку на краю тіла. Ці результати належать B. Jones, J. Cannon, W. Rundell [14, 16]. Обернені задачі визначення коефіцієнта при невідомій функції в одновимірному параболічному рівнянні досліджено в [6, 13]. Питання одночасної ідентифікації коефіцієнта теплопровідності та коефіцієнта теплоємності висвітлено в [2, 4, 7]. Результати досліджень коефіцієнтних обернених задач для параболічних рівнянь показали, що питання ідентифікації коефіцієнта, який залежав би від усіх незалежних змінних, залишається відкритим. Певним наближенням до вирішення цього питання можна вважати подання коефіцієнта у вигляді добутку двох функцій від різних аргументів, одна з яких відома, а інша підлягає визначенню. У роботі [17] знайдено умови однозначної розв'язності оберненої задачі визначення старшого коефіцієнта одновимірного параболічного рівняння, який подається у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить від просторової змінної, а інша від часу, причому просторова залежність є відомою. У роботі [9] досліджено задачу одночасного визначення функцій, що залежать від різних аргументів, у коефіцієнті при невідомій функції в одновимірному параболічному рівнянні.

Багато практично важливих задач зводяться до задач з вільними межами, в яких невідома межа розділяє або речовини з різними властивостями, або різні фази однієї і тієї ж речовини. Заміною змінних задачі з вільними межами можна звести до коефіцієнтних обернених задач в областях з відомими межами. У роботі [18] вивчено обернену задачу теплопровідності для матеріалу з пам'яттю в області з вільною межею. В [1, 3] знайдено умови існування та єдиності розв'язків обернених задач для одновимірних параболічних рівнянь з невідомим, залежним від часу, старшим коефіцієнтом в області, частина або вся межа якої є невідомою. В [10–12] досліджено обернені задачі визначення залежних від часу молодших коефіцієнтів одновимірних параболічних рівнянь в області з вільною межею.

1. Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t),\ 0 < t < T\}$, де $h = h(t)$ – невідома функція, розглядаємо обернену задачу визначення функцій $c_1(t), c_2(t)$ у молодшому коефіцієнті параболічного рівняння

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + (c_1(t)x + c_2(t))u + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0, h(0)], \quad (2)$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(h(t),t) = \mu_2(t), \qquad t \in [0,T], \quad (3)$$

та умовами перевизначення

$$h'(t) = -u_x(h(t),t) + \mu_3(t),$$

$$\int_0^{h(t)} u(x,t)\,dx = \mu_4(t), \qquad \int_0^{h(t)} xu(x,t)\,dx = \mu_5(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Увівши нову змінну $y = \dfrac{x}{h(t)}$, зводимо задачу (1)–(4) до оберненої задачі з невідомими $(h(t), c_1(t), c_2(t), v(y,t))$, де $v(y,t) = u(yh(t),t)$, в області $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1,\ 0 < t < T\}$ з відомою межею:

$$v_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{b(yh(t),t) + yh'(t)}{h(t)} v_y + (yh(t)c_1(t) + c_2(t))v +$$

$$+ f(yh(t),t), \qquad (y,t) \in Q_T, \tag{5}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh(0)), \qquad y \in [0,1], \tag{6}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \qquad v(1,t) = \mu_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{7}$$

$$h'(t) = -\frac{1}{h(t)} v_y(1,t) + \mu_3(t), \qquad t \in [0,T], \tag{8}$$

$$h(t)\int_0^1 v(y,t)\,dy = \mu_4(t), \qquad t \in [0,T], \tag{9}$$

$$h^2(t)\int_0^1 yv(y,t)\,dy = \mu_5(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{10}$$

2. Існування розв'язку задачі (5)–(10). Умови на вихідні дані, за яких існує розв'язок задачі (5)–(10), містяться у такій теоремі.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1°) $a, b, f \in C^{1,0}([0,\infty) \times [0,T])$, $\quad \varphi \in C^2[0,h_0]$, $\quad \mu_i \in C^1[0,T]$, $\quad i = 1,2,4,5$, $\mu_3 \in C[0,T]$;

2°) $0 < a_0 \le a(x,t) \le a_1$, $\quad f(x,t) \ge 0$, $\quad (x,t) \in [0,\infty) \times [0,T]$, $\quad \varphi(x) \ge \varphi_0 > 0$, $x \in [0,\infty)$, $\quad \mu_i(t) > 0$, $\quad i = 4,5$, $\quad t \in [0,T]$;

3°) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\quad \varphi(h_0) = \mu_2(0)$, $\quad \displaystyle\int_0^{h_0} x\varphi(x)\,dx = \mu_5(0)$,

де $h_0 = h(0) > 0$ *є розв'язком рівняння* $\displaystyle\int_0^{h(0)} \varphi(x)\,dx = \mu_4(0)$.

Тоді можна вказати таке число T_0, $0 < T_0 \le T$, *яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок* $(h, c_1, c_2, v) \in C^1[0,T_0] \times (C[0,T_0])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T_0]$, *задачі* (5)–(10).

Д о в е д е н н я. Доведення існування розв'язку задачі (5)–(10) базується на зведенні задачі (5)–(10) до системи рівнянь відносно невідомих функцій та застосуванні до неї теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Введемо нову функцію

$$\tilde{v}(y,t) = v(y,t) - \varphi(yh_0) - y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + (y-1)(\mu_1(t) - \mu_1(0)).$$

Для функції $\tilde{v}(y,t)$ одержуємо задачу

$$\tilde v_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}\tilde v_{yy} + \frac{b(yh(t),t)+yh'(t)}{h(t)}(\tilde v_y + h_0\varphi'(yh_0) + \mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) +$$

$$+\mu_1(0)) + (yh(t)c_1(t)+c_2(t))(\tilde v + \varphi(yh_0) + y(\mu_2(t)-\mu_2(0)) +$$

$$+(1-y)(\mu_1(t)-\mu_1(0))) + h_0^2\frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}\varphi''(yh_0) +$$

$$+ f(yh(t),t) - y\mu_2'(t) + \mu_1'(t)(y-1), \qquad (y,t)\in Q_T,$$

$$\tilde v(y,0) = 0, \qquad y\in[0,1],$$

$$\tilde v(0,t) = \tilde v(1,t) = 0, \qquad t\in[0,T]. \tag{11}$$

За допомогою функції Ґріна $G_1(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$\tilde v_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)}\tilde v_{yy} + \frac{b(yh(t),t)}{h(t)}\tilde v_y$$

задачу (11) зводимо до рівняння

$$\tilde v(y,t) = \int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\bigg(\frac{\eta h'(\tau)}{h(\tau)}(\tilde v_\eta(\eta,\tau) + h_0\varphi'(\eta h_0) + \mu_2(\tau) - \mu_2(0) -$$

$$-\mu_1(\tau)+\mu_1(0)) + \frac{b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}(h_0\varphi'(\eta h_0) + \mu_2(\tau) - \mu_2(0) -$$

$$-\mu_1(\tau)+\mu_1(0)) + (c_2(\tau) + \eta h(\tau)c_1(\tau))(\tilde v(\eta,\tau) +$$

$$+\eta(\mu_2(\tau)-\mu_2(0)) + (1-\eta)(\mu_1(\tau)-\mu_1(0)) + \varphi(\eta h_0)) +$$

$$+ f(\eta h(\tau),\tau) - \eta\mu_2'(\tau) + \mu_1'(\tau)(\eta-1) +$$

$$+ h_0^2\frac{a(\eta h(\tau),\tau)}{h^2(\tau)}\varphi''(\eta h_0)\bigg)d\eta\,d\tau, \qquad (y,t)\in\bar Q_T. \tag{12}$$

Позначимо $w(y,t) = v_y(y,t)$. З умови (8) маємо

$$h'(t) = -\frac{1}{h(t)}w(1,t) + \mu_3(t). \tag{13}$$

Використавши (13), рівняння (12) подамо у вигляді

$$v(y,t) = \varphi(yh_0) + y(\mu_2(t)-\mu_2(0)) + (1-y)(\mu_1(t)-\mu_1(0)) +$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\bigg(\frac{\eta(h(\tau)\mu_3(\tau) - w(1,\tau))}{h^2(\tau)}w(\eta,\tau) +$$

$$+(\eta h(\tau)c_1(\tau) + c_2(\tau))v(\eta,\tau) + \frac{b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}(h_0\varphi'(\eta h_0) +$$

$$+\mu_2(\tau) - \mu_2(0) - \mu_1(\tau) + \mu_1(0)) + \mu_1'(\tau)(\eta-1) -$$

$$-\eta\mu_2'(\tau) + f(\eta h(\tau),\tau) +$$

$$+ h_0^2\frac{a(\eta h(\tau),\tau)}{h^2(\tau)}\varphi''(\eta h_0)\bigg)d\eta\,d\tau, \qquad (y,t)\in\bar Q_T. \tag{14}$$

Продиференціювавши (14) за змінною y, одержуємо

$$w(y,t) = h_0\varphi'(yh_0) + \mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0) + \int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau) \times$$

$$\times\left(\frac{\eta(h(\tau)\mu_3(\tau) - w(1,\tau))}{h^2(\tau)} w(\eta,\tau) + (\eta h(\tau)c_1(\tau) + c_2(\tau))v(\eta,\tau) + \right.$$

$$+ \frac{b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}(h_0\varphi'(\eta h_0) + \mu_2(\tau) - \mu_2(0) - \mu_1(\tau) + \mu_1(0)) +$$

$$+ \mu_1'(\tau)(\eta - 1) - \eta\mu_2'(\tau) + f(\eta h(\tau),\tau) +$$

$$\left. + h_0^2\frac{a(\eta h(\tau),\tau)}{h^2(\tau)}\varphi''(\eta h_0)\right) d\eta\, d\tau, \qquad (y,t) \in \bar{Q}_T . \tag{15}$$

З умови (9) отримуємо

$$h(t) = \frac{\mu_4(t)}{\int_0^1 v(y,t)\,dy}, \qquad t \in [0,T] . \tag{16}$$

Продиференціювавши (9), (10) за змінною t і використавши (5), (13), одержуємо

$$c_1(t) = \left[\int_0^1 (((a_x(yh(t),t) - b(yh(t),t))w(y,t) - h(t)f(yh(t),t)) \times\right.$$

$$\times (yh(t)\mu_4(t) - \mu_5(t)) + \mu_4(t)a(yh(t),t)w(y,t))\,dy +$$

$$+ \frac{\mu_2(t) - a(h(t),t)}{h(t)}(h(t)\mu_4(t) - \mu_5(t))w(1,t) -$$

$$- \frac{\mu_5(t)a(0,t)}{h(t)} w(0,t) - (h(t)\mu_4(t) - \mu_5(t))\mu_2(t)\mu_3(t) +$$

$$\left. + \mu_5'(t)\mu_4(t) - \mu_4'(t)\mu_5(t)\right]\frac{1}{\Delta(t)}, \qquad t \in [0,T] , \tag{17}$$

$$c_2(t) = \left[h^3(t)\int_0^1 y^2 v(y,t)\,dy\left(\frac{(\mu_2(t) - a(h(t),t))w(1,t) + a(0,t)w(0,t)}{h(t)} + \right.\right.$$

$$+ \int_0^1 ((a_x(yh(t),t) - b(yh(t),t))w(y,t) - h(t)f(yh(t),t))\,dy -$$

$$\left. - \mu_2(t)\mu_3(t) + \mu_4'(t)\right) - \mu_5(t)\left(\int_0^1 (yh(t)((a_x(yh(t),t) - \right.$$

$$- b(yh(t),t))w(y,t) - f(yh(t),t)h(t)) + a(yh(t),t)w(y,t))\,dy +$$

$$\left.\left. + (\mu_2(t) - a(h(t),t))w(1,t) - h(t)\mu_2(t)\mu_3(t) + \mu_5'(t)\right)\right]\frac{1}{\Delta(t)},$$

$$t \in [0,T] , \tag{18}$$

де

$$\Delta(t) = h^4(t)\begin{vmatrix} \int_0^1 v(y,t)\,dy & \int_0^1 yv(y,t)\,dy \\ \int_0^1 yv(y,t)\,dy & \int_0^1 y^2 v(y,t)\,dy \end{vmatrix} .$$

Таким чином, задачу (5)–(10) зведено до системи рівнянь (14)–(18) відносно невідомих $(v(y,t), w(y,t), h(t), c_1(t), c_2(t))$. Якщо $(h, c_1, c_2, v) \in C^1[0,T] \times \times (C[0,T])^2 \times C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ є розв'язком задачі (5)–(10), то $(v, w, h, c_1, c_2) \in (C(\bar{Q}_T))^2 \times \times (C[0,T])^3$ є розв'язком системи рівнянь (14)–(18). Правильним є і обернене твердження. Дійсно, нехай $(v, w, h, c_1, c_2) \in (C(\bar{Q}_T))^2 \times (C[0,T])^3$ є розв'язком системи рівнянь (14)–(18). Припущення теореми дозволяють продиференціювати рівність (14) за y. Праві частини отриманої рівності та рівності (15) співпадають, тому $w(y,t) \equiv v_y(y,t)$. Тоді робимо висновок, що $v \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ задовольняє рівняння

$$v_t = \frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)} v_{yy} + \left(\frac{b(yh(t),t) + y\mu_3(t)}{h(t)} - \frac{yv_y(1,t)}{h^2(t)} \right) v_y + \\ + (yh(t)c_1(t) + c_2(t))v + f(yh(t),t) \tag{19}$$

та умови (7), (8) для довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $c_1(t)$, $c_2(t)$, $h(t)$. Рівність (16) співпадає з умовою (9). Подамо (17), (18) у вигляді

$$c_1(t)\mu_5(t) + c_2(t)\mu_4(t) = \frac{\mu_2(t) - a(h(t),t)}{h(t)} w(1,t) + \frac{a(0,t)}{h(t)} w(0,t) + \mu_4'(t) - \\ - \mu_2(t)\mu_3(t) - \int_0^1 ((b(yh(t),t) - a_x(yh(t),t))w(y,t) + \\ + h(t)f(yh(t),t))\,dy\,, \tag{20}$$

$$c_1(t)h^3(t)\int_0^1 y^2 v(y,t)\,dy + c_2(t)\mu_5(t) = (\mu_2(t) - a(h(t),t))w(1,t) + \mu_5'(t) - \\ - h(t)\mu_2(t)\mu_3(t) - \int_0^1 (h(t)y((b(yh(t),t) - a_x(yh(t),t))w(y,t) + \\ + h(t)f(yh(t),t)) - a(yh(t),t)w(y,t))\,dy\,. \tag{21}$$

Продиференціюємо (16) за змінною t. Використавши те, що функція $v(y,t)$ задовольняє рівняння (19), і віднявши від отриманої рівності (20), одержуємо

$$\left(h'(t) - \mu_3(t) + \frac{v_y(1,t)}{h(t)} \right) \frac{\mu_4(t)}{h(t)} = 0\,.$$

Звідси випливає, що $h \in C^1[0,T]$ і функція $v(y,t)$ задовольняє рівняння (5) та умову (8). Звівши (21) до вигляду

$$2h'(t)h(t)\int_0^1 yv(y,t)\,dy + h^2(t)\int_0^1 y\left(\frac{a(yh(t),t)}{h^2(t)} v_{yy}(y,t) + \right. \\ + \frac{b(yh(t),t) + yh'(t)}{h(t)} v_y(y,t) + (yh(t)c_1(t) + c_2(t))v(y,t) + \\ \left. + f(yh(t),t) \right) dy = \mu_5'(t)\,,$$

використавши рівняння (5) і проінтегрувавши від 0 до t, отримуємо умову (10).

Отже, еквівалентність задачі (5)–(10) і системи рівнянь (14)–(18) у зазначеному вище сенсі доведено.

Зведемо $\Delta(t)$ до вигляду [8]

$$\Delta(t) = \frac{h^4(t)}{2}\int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v(y_1,t) & v(y_2,t) \\ y_1 v(y_1,t) & y_2 v(y_2,t) \end{vmatrix} dy_1\, dy_2 =$$

$$= \frac{h^4(t)}{2}\int_0^1\int_0^1 (y_2 - y_1)^2 v(y_1,t) v(y_2,t)\, dy_1\, dy_2 .$$

Встановимо оцінки знизу функцій $v(y,t)$ і $h(t)$. Згідно з припущеннями теореми з (14) можемо зробити висновок про існування такого числа t_1, $0 < t_1 \le T$, що

$$v(y,t) \ge \frac{\varphi_0}{2} \equiv M_0 > 0, \qquad (y,t) \in \bar{Q}_{t_1} . \tag{22}$$

Очевидно, що виконання (22) рівносильне виконанню нерівності

$$\Bigg| y(\mu_2(t) - \mu_2(0)) + (1-y)(\mu_1(t) - \mu_1(0)) + \int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau) \times$$

$$\times \left(\frac{\eta(h(\tau)\mu_3(\tau) - w(1,\tau))}{h^2(\tau)} w(\eta,\tau) + (\eta h(\tau) c_1(\tau) + c_2(\tau)) v(\eta,\tau) + \right.$$

$$+ \frac{b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)} (h_0 \varphi'(\eta h_0) + \mu_2(\tau) - \mu_2(0) -$$

$$- \mu_1(\tau) + \mu_1(0)) + \mu_1'(\tau)(\eta - 1) - \eta\mu_2'(\tau) + f(\eta h(\tau),\tau) +$$

$$\left. + h_0^2 \frac{a(\eta h(\tau),\tau)}{h^2(\tau)} \varphi''(\eta h_0) \right) d\eta\, d\tau \Bigg| \le M_0, \quad (y,t) \in \bar{Q}_{t_1} . \tag{23}$$

Врахувавши (23), з (14) отримуємо

$$v(y,t) \le \max_{[0,1]} \varphi(y h_0) + M_0 \equiv M_1 < \infty, \qquad (y,t) \in \bar{Q}_{t_1} . \tag{24}$$

Тоді для розв'язків рівняння (16) виконується нерівність

$$h(t) \ge \frac{1}{M_1} \min_{[0,T]} \mu_4(t) \equiv H_0 > 0, \qquad t \in [0,t_1] . \tag{25}$$

Таким чином,

$$\Delta(t) \ge C_0 > 0, \qquad t \in [0,t_1] . \tag{26}$$

Встановимо оцінки розв'язків системи рівнянь (14)–(18). Врахувавши (22), з (16) одержуємо

$$h(t) \le \frac{1}{M_0} \max_{[0,T]} \mu_4(t) \equiv H_1 < \infty, \qquad t \in [0,t_1] . \tag{27}$$

Позначимо $W(t) = \max_{y\in[0,1]} |w(y,t)|$. Використавши нерівності (24)–(27), з (17), (18) отримуємо

$$|c_1(t)| \le C_1 + C_2 W(t), \qquad |c_2(t)| \le C_3 + C_4 W(t), \qquad t \in [0,t_1] . \tag{28}$$

Використавши оцінки функцій Ґріна [5] та нерівності (24), (25), (27), (28), з (15) одержуємо

$$W(t) \le C_5 + C_6 \int_0^t \frac{(W(\tau) + W^2(\tau))\, d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \qquad t \in [0,t_1] .$$

Метод розв'язування цієї нерівності подано в [15]. Звідси отримуємо оцінку

$$W(t) \le M_2 < \infty, \qquad t \in [0, T_0],$$

де T_0, $0 < T_0 \le t_1$, визначається сталими C_5, C_6. Тоді

$$|c_1(t)| \le C_1 + C_2 M_2 \equiv B_1 < \infty,$$

$$|c_2(t)| \le C_3 + C_4 M_2 \equiv B_2 < \infty, \qquad t \in [0, T_0].$$

Отже, апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (14)–(18) знайдено.

Подамо систему рівнянь (14)–(18) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (v(y,t), w(y,t), h(t), c_1(t), c_2(t))$, а оператор $P = (P_1, \ldots, P_5)$ визначається правими частинами рівнянь (14)–(18).

Позначимо

$$N = \{(v, w, h, c_1, c_2) \in (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0, T_0])^3 : M_0 \le v(y,t) \le M_1,$$

$$|w(y,t)| \le M_2,\ H_0 \le h(t) \le H_1,\ |c_1(t)| \le B_1,\ |c_2(t)| \le B_2\}.$$

Очевидно, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера про нерухому точку, а оператор P переводить N у себе. Компактність операторів, що утворюють P, встановлено в [11].

Тоді за теоремою Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора існує розв'язок $(v, w, h, c_1, c_2) \in (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0, T_0])^3$ системи рівнянь (14)–(18). Отже, існує розв'язок $(h, c_1, c_2, v) \in C^1[0, T_0] \times (C[0, T_0])^2 \times$ $\times\, C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$ задачі (5)–(10). Теорему доведено. ♦

3. Єдиність розв'язку задачі (5)–(10).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

$$a \in C^{2,0}([0,\infty) \times [0,T]), \quad b, f \in C^{1,0}([0,\infty) \times [0,T]), \quad a(x,t) > 0,$$

$$(x,t) \in [0,\infty) \times [0,T], \quad \varphi(x) \ge \varphi_0 > 0, \quad x \in [0,\infty), \quad \mu_i(t) > 0, \quad i = 1,2,4, \quad t \in [0,T].$$

Тоді задача (5)–(10) *не може мати двох різних розв'язків* $(h, c_1, c_2, v) \in$ $\in C^1[0,T] \times (C[0,T])^2 \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T]$.

Д о в е д е н н я. Нехай $(h_i(t), c_{1i}(t), c_{2i}(t), v_i(y,t))$, $i = 1,2$, – два розв'язки задачі (5)–(10). Позначимо

$$\frac{h_i'(t)}{h_i(t)} = r_i(t), \quad i = 1,2, \qquad r(t) = r_1(t) - r_2(t), \qquad s(t) = c_{11}(t) - c_{12}(t),$$

$$q(t) = c_{21}(t) - c_{22}(t), \qquad v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t).$$

Функції $s(t)$, $q(t)$, $r(t)$, $v(y,t)$ задовольняють рівняння

$$v_t = \frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)} v_{yy} + \left(\frac{b(yh_1(t),t)}{h_1(t)} + yr_1(t)\right) v_y + (yh_1(t)c_{11}(t) + c_{21}(t))v +$$

$$+ (yh_1(t)s(t) + ys_2(t)(h_1(t) - h_2(t)) + q(t))v_2 +$$

$$+ \left(\frac{b(yh_1(t),t)}{h_1(t)} - \frac{b(yh_2(t),t)}{h_2(t)} + yr(t)\right) v_{2y} +$$

$$+ \left(\frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)} - \frac{a(yh_2(t),t)}{h_2^2(t)}\right) v_{2yy} +$$

$$+ f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t), \qquad (y,t) \in Q_T, \tag{29}$$

та умови

$$v(y,0)=0, \qquad y\in[0,1], \tag{30}$$

$$v(0,t)=v(1,t)=0, \qquad t\in[0,T], \tag{31}$$

$$r(t)=-\frac{v_y(1,t)}{h_1^2(t)}-v_{2y}(1,t)\left(\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}\right)+\mu_3(t)\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right), \tag{32}$$

$$\int_0^1 v(y,t)\,dy=\mu_4(t)\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right), \tag{33}$$

$$\int_0^1 yv(y,t)\,dy=\mu_5(t)\left(\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}\right), \qquad t\in[0,T]. \tag{34}$$

За допомогою функції Ґріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_t=\frac{a(yh_1(t),t)}{h_1^2(t)}v_{yy}+\left(\frac{b(yh_1(t),t)}{h_1(t)}+yr_1(t)\right)v_y+(yh_1(t)c_{11}(t)+c_{21}(t))v,$$

з урахуванням умов (30), (31) функцію $v(y,t)$ подамо у вигляді

$$v(y,t)=\int_0^t\int_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau)((\eta h_1(\tau)s(\tau)+\eta s_2(\tau)(h_1(\tau)-h_2(\tau))+q(\tau))v_2(\eta,\tau)+$$
$$+\left(\frac{b(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1(\tau)}-\frac{b(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2(\tau)}+\eta r(\tau)\right)v_{2\eta}(\eta,\tau)+$$
$$+\left(\frac{a(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1^2(\tau)}-\frac{a(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)+f(\eta h_1(\tau),\tau)-$$
$$-(f(\eta h_2(\tau),\tau))\,d\eta\,d\tau, \qquad (y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{35}$$

Продиференціювавши (35) за змінною y, отримуємо

$$v_y(y,t)=\int_0^t\int_0^1 G_{1y}^*(y,t,\eta,\tau)((\eta h_1(\tau)s(\tau)+\eta s_2(\tau)(h_1(\tau)-h_2(\tau))+q(\tau))v_2(\eta,\tau)+$$
$$+\left(\frac{b(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1(\tau)}-\frac{b(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2(\tau)}+\eta r(\tau)\right)v_{2\eta}(\eta,\tau)+$$
$$+\left(\frac{a(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1^2(\tau)}-\frac{a(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_2^2(\tau)}\right)v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)+$$
$$+f(\eta h_1(\tau),\tau)-f(\eta h_2(\tau),\tau))\,d\eta\,d\tau, \qquad (y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{36}$$

Оскільки $(h_i(t),c_{1i}(t),c_{2i}(t),v_i(y,t))$, $i=1,2$, − два розв'язки задачі (5)−(10), то для $c_{1i}(t)$, $c_{2i}(t)$, $i=1,2$, справджуються рівності, аналогічні до (17), (18). Звідси отримуємо

$$s(t)\mu_5(t)+q(t)\mu_4(t)=\frac{\mu_2(t)-a(h_1(t),t)}{h_1(t)}v_y(1,t)+\frac{a(0,t)}{h_1(t)}v_y(0,t)+$$
$$+\left(\frac{1}{h_1(t)}+\frac{1}{h_2(t)}\right)(a(0,t)v_{2y}(0,t)+(\mu_2(t)-a(h_2(t),t)v_{2y}(1,t))-$$
$$-\int_0^1((b(yh_1(t),t)-a_x(yh_1(t),t))v_y(y,t)+(b(yh_1(t),t)-$$

$$
\begin{aligned}
&- b(yh_2(t),t) - a_x(yh_1(t),t) + \\
&+ a_x(yh_2(t),t))v_{2y}(y,t) + h_1(t)(f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t)) + \\
&+ (h_1(t) - h_2(t))f(yh_2(t),t))\,dy - \frac{v_2(y,t)}{h_1(t)}(a(h_1(t),t) - \\
&- a(h_2(t),t)), \qquad t \in [0,T], \qquad (37)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s(t) = -\Bigg[\int_0^1 &(((a_x(yh_1(t),t) - b(yh_1(t),t))v_{1y}(y,t) - h_1(t)f(yh_1(t),t)) \times \\
&\times (yh_1(t)\mu_4(t) - \mu_5(t)) + \mu_4(t)a(yh_1(t),t)v_{1y}(y,t))\,dy + \\
&+ \frac{\mu_2(t) - a(h_1(t),t)}{h_1(t)}(h_1(t)\mu_4(t) - \mu_5(t))v_{1y}(1,t) - \\
&- \frac{\mu_5(t)a(0,t)}{h_1(t)}v_{1y}(0,t) - (h_1(t)\mu_4(t) - \mu_5(t)) \times \\
&\times \mu_2(t)\mu_3(t) + \mu_5'(t)\mu_4(t) - \mu_4'(t)\mu_5(t)\Bigg]\mu_4(t) \times \\
&\times \left(h_1^3(t)\int_0^1 y^2 v(y,t)\,dy + (h_1^3(t) - h_2^3(t))\int_0^1 y^2 v_2(y,t)\,dy\right) \times \\
&\times (\Delta_1(t)\Delta_2(t))^{-1} + \Bigg[\int_0^1 (((a_x(yh_1(t),t) - b(yh_1(t),t)) \times \\
&\times v_{1y}(y,t) - h_1(t)f(yh_1(t),t))y\mu_4(t)(h_1(t) - h_2(t)) + \\
&+ (y\mu_4(t)h_2(t) - \mu_5(t))((a_x(yh_1(t),t) - \\
&- b(yh_1(t),t))v_y(y,t) + (a_x(yh_1(t),t) - a_x(yh_2(t),t) - \\
&- b(yh_1(t),t) + b(yh_2(t),t))v_{2y}(y,t) - h_1(t)(f(yh_1(t),t) - \\
&- f(yh_2(t),t)) - (h_1(t) - h_2(t))f(yh_2(t),t)) + \\
&+ \mu_4(t)a(yh_1(t),t)v_y(y,t) + \mu_4(t)(a(yh_1(t),t) - \\
&- a(yh_2(t),t))v_{2y}(y,t))\,dy + \frac{\mu_2(t) - a(h_1(t),t)}{h_1(t)} \times \\
&\times (h_1(t)\mu_4(t) - \mu_5(t))v_y(1,t) - \frac{\mu_5(t)a(0,t)}{h_1(t)}v_y(0,t) + \\
&+ \left(\frac{\mu_2(t) - a(h_1(t),t)}{h_1(t)}\mu_4(t)v_{2y}(1,t) - \mu_2(t)\mu_3(t)\mu_4(t)\right) \times \\
&\times (h_1(t) - h_2(t)) - \frac{1}{h_1(t)}(a(h_1(t),t) - a(h_2(t),t))(h_2(t)\mu_4(t) - \\
&- \mu_5(t))v_{2y}(1,t) + ((h_2(t)\mu_4(t) - \mu_5(t))(\mu_2(t) - \\
&- a(h_2(t),t))v_{2y}(1,t) - \mu_5(t)a(0,t)v_{2y}(0,t)) \times \\
&\times \left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right)\Bigg]\Delta_2^{-1}(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (38)
\end{aligned}
$$

де

$$\Delta_i(t) = h_i^4(t)\begin{vmatrix} \int\limits_0^1 v_i(y,t)\,dy & \int\limits_0^1 y v_i(y,t)\,dy \\ \int\limits_0^1 y v_i(y,t)\,dy & \int\limits_0^1 y^2 v_i(y,t)\,dy \end{vmatrix}, \qquad i = 1,2\,.$$

Використавши принцип максимуму [5] для розв'язку прямої задачі (5)–(7), отримуємо

$$v_i(y,t) \ge M_3 > 0, \qquad i = 1,2, \qquad (y,t) \in \bar{Q}_T\,,$$

де стала M_3 визначається вихідними даними задачі.

Таким чином,

$$\Delta_i(t) > 0, \qquad i = 1,2, \qquad t \in [0,T].$$

Виразивши $h_i(t)$ через $r_i(t)$

$$h_i(t) = h_i(0)\exp\left(\int\limits_0^t r_i(\tau)\,d\tau\right), \qquad i = 1,2\,,$$

де $h_1(0) = h_2(0) = h_0$, та використавши рівність

$$e^x - e^y = (x-y)\int\limits_0^1 e^{y+\tau(x-y)}\,d\tau\,,$$

одержуємо

$$\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = -\frac{1}{h_0}\int\limits_0^t r(\tau)\,d\tau\int\limits_0^1 \exp\left(-\int\limits_0^t (\sigma r(\tau) + r_2(\tau))\,d\tau\right)d\sigma\,. \qquad (39)$$

Аналогічно до (39) можна отримати зображення різниць $\dfrac{1}{h_1^2(t)} - \dfrac{1}{h_2^2(t)}$, $h_1(t) - h_2(t)$, $h_1^3(t) - h_2^3(t)$.

Припущення теореми забезпечують правильність перетворення

$$f(yh_1(t),t) - f(yh_2(t),t) =$$

$$= y(h_1(t) - h_2(t))\int\limits_0^1 f_x(y(h_2(t) + \sigma(h_1(t) - h_2(t))),t)\,d\sigma\,. \qquad (40)$$

Використавши (39), (40) і підставивши (35), (36) в (32), (37), (38), одержуємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно невідомих $r(t)$, $s(t)$, $q(t)$. З єдиності розв'язків таких систем випливає, що $r(t) = 0$, $s(t) = 0$, $q(t) = 0$, $t \in [0,T]$. Звідси отримуємо, що $r_1(t) = r_2(t)$, $s_1(t) = s_2(t)$, $q_1(t) = q_2(t)$, $t \in [0,T]$, а отже, $h_1(t) = h_2(t)$, $c_{11}(t) = c_{12}(t)$, $c_{21}(t) = c_{22}(t)$, $t \in [0,T]$. Використавши це в задачі (29)–(31), отримуємо, що

$$v_1(y,t) = v_2(y,t), \qquad (y,t) \in \bar{Q}_T\,.$$

Теорему доведено. ♦

1. *Баранська І.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 20–38.
2. *Иванчов Н. И.* Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости // Сиб. мат. журн. – 1994. – **35**, № 3. – С. 612–621.
3. *Іванчов М. І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901–910.

Те саме: *Ivanchov M. I.* Inverse problem with free boundary for heat equation // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, No. 7. – P. 1086–1098.
4. *Ковальчук С. М.* Визначення коефіцієнтів теплопровідності та об'ємної теплоємності в багатошаровому середовищі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40,** № 2. – С. 153–159.
Те саме: *Koval'chuk S. M.* Determination of the coefficient of thermal conductivity and heat capacity per unit volume in a multilayer medium // J. Math. Sci. – 1998. – **90**, No. 2. – P. 2042–2047.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
6. *Мамаюсупов О. Ш.* Об определении коэффициента параболического уравнения // Исследования по интегро-дифференц. уравнениям (Фрунзе). – 1989. – Вып. 22. – С. 157–160.
7. *Пабирівська Н. В.* Обернені задачі з інтегральними умовами перевизначення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 1. – С. 51–58.
8. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ряды. Интегральное исчисление. Теория функций. – Москва: Наука, 1978. – 391 с.
9. *Саватеев Е. Г.* Сведение обратной задачи для уравнения параболического типа // Докл. РАН. – 1994. – **334**, № 5. – С. 562–563.
10. *Снітко Г. А.* Обернена задача визначення залежних від часу коефіцієнтів параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53,** № 4. – С. 51–61.
Те саме: *Snitko H. A.* Inverse problem for determination of time-dependent coefficients of a parabolic equation in a free-boundary domain // J. Math. Sci. – 2012. – **181**, No. 3. – P. 350–365.
11. *Снітко Г. А.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50,** № 4. – С. 7–18.
12. *Снітко Г. А.* Обернена задача для параболічного рівняння з невідомими молодшими коефіцієнтами в області з вільною межею // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 68. – С. 231–245.
13. *Cannon J. R., Lin Y., Wang S.* Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. – 1991. – **33**, No. 2. – P. 149–163.
14. *Cannon J., Rundell W.* Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equation // J. Math. Anal. Appl. –1991. – **160**, No. 2. – P. 572–582.
15. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – 238 p. – (Math. Studies: Monograph Ser. – Vol. 10.)
16. *Jones B. F. (Jr.)* The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. I. Existence and uniqueness // J. Math. Mech. – 1962. – **11**, No. 5. – P. 907–918.
17. *Jones B. F. (Jr.)* Various methods for finding unknown coefficients in parabolic differential equations // Commun. Pure Appl. Math. – 1963. – **16**, No. 1. – P. 33–44.
18. *Lorenzi L.* An identification problem for a one-phase Stefan problem // J. Inverse Ill-Posed Problems. – 2001. – **9**, No. 6. – P. 627–653.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ ФУНКЦИЙ В МЛАДШЕМ КОЭФФИЦИЕНТЕ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ В ОБЛАСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Установлены условия однозначной разрешимости обратной задачи определения зависящих от времени параметров в коэффициенте при неизвестной функции в одномерном параболическом уравнении в области со свободной границей.

INVERSE PROBLEM OF FINDING THE TIME-DEPENDENT FUNCTIONS IN THE MINOR COEFFICIENT IN A PARABOLIC EQUATION IN FREE BOUNDARY DOMAIN

We established unique solvability conditions of the inverse problem of finding the time-dependent parameters in the coefficient of the unknown function in one-dimensional parabolic equation in free boundary domain.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
04.12.12