

В. Н. Паймушин

О ЗАДАЧАХ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ВНЕШНЕГО И ВНУТРЕННЕГО ДЕМПФИРОВАНИЯ

Для описания динамического процесса деформирования пластины при малых деформациях и перемещениях с учетом внутреннего и внешнего аэродинамического демпфирования дано построение уравнения движения, основанное на использовании гипотез Кирхгофа – Лява, обобщенной модели Кельвина – Фойгта и решений волновых уравнений гидрогазодинамики, найденных для окружающих пластину акустических сред в одномерном приближении в рамках известной гипотезы о плоском отражении и излучении акустических волн. На основе построенного уравнения найдены точные аналитические решения задачи о затухающих колебаниях предварительно изогнутой шарнирно опертой по контуру прямоугольной пластины и излучении ею звуковой волны после ее освобождения от связей, а также задачи об излучении звуковой волны при ударе пластины поперечной нагрузкой.

Введение. Величина допустимой вибрации любой конструкции того или иного назначения определяется ее влиянием на прочностные характеристики конструкции и ее элементов, на работоспособность, самочувствие и здоровье так или иначе связанных с ними людей, работу установленной на ней аппаратуры и др. Кроме всего прочего, она может быть ограничена и величиной допустимого шума, формирующегося в окружающей конструкцию акустической среде в результате ее динамического взаимодействия с деформирующейся конструкцией.

Вопросами вибрации механических систем занимаются, главным образом, специалисты в области механики деформируемого тела, динамики и прочности машин, приборов и аппаратуры, прочности летательных аппаратов, судов и др., не уделяя при этом должного внимания вопросам создаваемого конструкциями шума при их деформировании, а вопросами формирования и распространения шума – специалисты в области акустики. В авиационной промышленности за последние десятилетия проблемы снижения шума привели к появлению нового научного направления – авиационной акустики, связанного с акустикой летательных аппаратов и включающей в себя аэроакустику и структурную акустику [17, 18 и др.]. Структурная акустика составляет направление, находящееся на стыке акустики и динамики упругих систем, в котором изучаются механизмы распространения звука по конструкциям аппаратов, излучения звука этими конструкциями и др. [17]. Литература, посвященная изучению этих вопросов, достаточно обширна [2, 10, 11, 26–38 и др.].

К изложенному выше следует также добавить, что во второй половине прошлого века в механике сформировалось научное направление, связанное с исследованием стационарного и нестационарного взаимодействия акустических волн с преградами в виде твердых деформируемых тел и тонкостенных элементов конструкций. Это направление привлекало [8] и продолжает привлекать внимание исследователей актуальностью, сложностью и многообразием явлений, присущих процессу взаимодействия тел различной физической природы. К настоящему времени относящиеся к этому направлению вопросы аэрогидроупругости тонкостенных конструкций в виде оболочек были освещены в ряде монографий и обзоров [3–8, 12, 14, 16, 22, 24 и др.]. Однако в них абсолютно не рассматривались вопросы формирования звуковых волн и теоретического исследования задач о звукоизоляции и звукопоглощении теми или иными деформируемыми преградами. Они и в настоящее время остаются без должного внимания со стороны исследователей, хотя практически во всех изданиях справочного или другого характера,

посвященных созданию различного рода многослойных конструкций, указывается, что они обладают хорошими звукоизоляционными и звукопоглощающими свойствами [1, 9, 20, 25 и др.]. На практике эти свойства до настоящего времени, по-видимому, исследовались главным образом только чисто экспериментальными методами, а их теоретические исследования основывались на использовании достаточно упрощенных уравнений механики деформирования многослойных конструкций.

Следует подчеркнуть, что наиболее опасным режимом динамического деформирования конструкций является резонансный, реализующийся в конструкции при совпадении частот ее собственных колебаний с частотой внешнего циклического воздействия. При таком режиме нагружения, как известно, многократно возрастают амплитудные значения параметров динамического напряженно-деформированного состояния конструкций, что, в свою очередь, влечет за собой и резкое изменение параметров формирующихся звуковых волн. Поэтому корректное теоретическое исследование задач об излучении звуковых волн деформируемыми телами, находящимися в акустической среде, возможно только при соответствующем учете демпфирующих свойств материала и конструкций.

В связи с изложенным ниже рассматривается простейшая из задач указанного класса, описывающая процесс излучения звуковой волны при динамическом деформировании пластин и главным образом предназначенная для уточнения существующих методов теоретико-экспериментального определения характеристик внутреннего демпфирования материалов на основе учета внешнего аэродинамического демпфирования тест-образцов при их испытаниях на вынужденные затухающие колебания.

1. Об учете взаимодействия тонкой пластины с акустическими средами при динамическом процессе деформирования. Рассмотрим тонкую пластину толщиной t , пространство которой отнесено к ортогональной декартовой системе координат $Oxyz$ так, что $-t/2 \leq z \leq t/2$. Предполагаем, что пластина с двух сторон окружена акустическими средами, имеющими плотности ρ_1, ρ_2 , скорости звука c_1, c_2 и находящимися в полупространствах V_1 ($-\infty \leq z \leq 0$), V_2 ($0 \leq z \leq +\infty$), а сама пластина находится в изгибном динамическом деформированном состоянии, изменяющемся во времени τ с круговой частотой ω . При таком деформировании и определенных значениях ω в средах V_1, V_2 , очевидно, должны возникнуть гармонические акустические (звуковые) волны, которые относительно потенциалов скоростей $\Phi_k(x, y, z)$ будут описываться волновыми уравнениями [7, 8 и др.]

$$\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial z^2} - \frac{1}{c_k^2} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial \tau^2} = 0, \quad k = 1, 2,$$

если отсутствует перетекание среды из одного полупространства в другое. Эти уравнения в рамках гипотезы плоского отражения [7 и др.] допустимо заменить одномерными:

$$\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial z^2} - \frac{1}{c_k^2} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial \tau^2} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (1)$$

Приращения давлений p_k и скоростей v_z^k в средах «1» и «2» определяются через функции Φ_k соотношениями

$$p_k = -\rho_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial \tau}, \quad v_z^k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial z}. \quad (2)$$

В силу принятых предположений решения уравнений (1) представим в виде

$$\Phi_k = \tilde{\Phi}_k e^{i\omega\tau}, \quad (3)$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. При подстановке (3) в уравнения (1) получим

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}_k}{dz^2} + k_k^2 \tilde{\Phi}_k = 0, \quad k_k = \frac{\omega}{c_k}, \quad k = 1, 2. \quad (4)$$

Решения уравнений (4) имеют вид

$$\tilde{\Phi}_k = A_k e^{ik_k z} + B_k e^{-ik_k z}.$$

Из них при $z = -\infty$ и $z = +\infty$ удовлетворяющими условиями затухания на бесконечности являются решения

$$\tilde{\Phi}_1 = A_1 e^{ik_1 z}, \quad \tilde{\Phi}_2 = B_2 e^{-ik_2 z},$$

и при этом в силу (3)

$$\Phi_1 = A_1 e^{i(\omega\tau + k_1 z)}, \quad \Phi_2 = B_2 e^{i(\omega\tau - k_2 z)}. \quad (5)$$

Внося теперь функции (3) в соотношения (2), используя решения (5) и полагая $z = 0$, получим

$$p_1|_{z=0} = -i\rho_1\omega A_1 e^{i\omega\tau}, \quad p_2|_{z=0} = -i\rho_2\omega B_2 e^{i\omega\tau}, \quad (6)$$

$$w_z^1 = ik_1 A_1 e^{i\omega\tau}, \quad w_z^2 = -ik_2 B_2 e^{i\omega\tau}. \quad (7)$$

Обозначим через $w(x, y)$ функцию прогиба срединной плоскости пластины, которая при динамическом деформировании по гармоническому закону должна быть представлена в виде

$$w = \tilde{w}(x, y) e^{i\omega\tau}. \quad (8)$$

Через функцию w скорости точек плоскости σ будут определяться выражением

$$w_z = \frac{\partial w}{\partial \tau} = i\omega \tilde{w}(x, y), \quad (9)$$

которые при безотрывном взаимодействии пластины с акустическими средами в точках плоскостей $z = -t/2$ и $z = t/2$ при малой толщине t должны удовлетворять условиям

$$w_z = v_z^1, \quad w_z = v_z^2.$$

Внося сюда выражения (7) и (9), получим

$$\omega \tilde{w} = k_1 A_1, \quad \omega \tilde{w} = -k_2 B_2.$$

Следовательно, в силу формул $k_k = \omega/c_k$ будут иметь место зависимости

$$A_1 = c_1 \tilde{w}, \quad B_2 = -c_2 \tilde{w}.$$

Внося их в соотношения (6), при учете соотношения (9) получим зависимости

$$p_1|_{z=0} = -i\rho_1\omega c_1 \tilde{w} e^{i\omega\tau} = -\rho_1 c_1 \frac{\partial w}{\partial \tau},$$

$$p_2|_{z=0} = i\rho_2\omega c_2 \tilde{w} e^{i\omega\tau} = \rho_2 c_2 \frac{\partial w}{\partial \tau}, \quad (10)$$

которые при негармонических процессах динамического деформирования, вообще говоря, следует рассматривать как приближенные, используемые ниже в динамических задачах теории пластин.

2. О связи коэффициента вязкости материала с логарифмическим декрементом колебаний при одноосном напряженном состоянии. Предположим, что материал пластины обладает ярко выраженными вязкоупругими свойствами, для описания которых физические соотношения между компонентами тензора напряжений σ_{ij} , тензора деформаций ε_{ij} и скорос-

тей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij} = \partial \varepsilon_{ij} / \partial t$ могут быть представлены в виде зависимостей $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij})$. В случае одноосного напряженно-деформированного состояния простейшая из таких зависимостей соответствует известной модели Кельвина – Фойгта [13, 15, 21, 23 и др.]

$$\sigma = E\varepsilon + \beta\dot{\varepsilon}. \quad (11)$$

Здесь E – мгновенный модуль упругости; β – коэффициент вязкости материала, который при гармонических колебаниях с частотой ω , когда $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$ (ε_0 – амплитудное значение деформации) с используемым в литературе логарифмическим декрементом колебаний δ связан зависимостью

$$\delta = \frac{\beta\pi\omega}{E}. \quad (12)$$

Вычисляемая по формуле (12) величина δ , характеризующая *внутреннее* трение материала, как известно [23 и др.], определяется как половина относительного рассеяния энергии в единице объема материала за один цикл колебаний с периодом T :

$$\delta = \frac{\Delta W}{2W} = \frac{\beta\pi\omega}{E}, \quad W = \frac{E\varepsilon_0^2}{2},$$

$$\Delta W = \int_0^T \sigma d\varepsilon = \int_0^T (E\varepsilon + \beta\dot{\varepsilon}) d\varepsilon = \beta\varepsilon_0^2\pi\omega.$$

Она устанавливается [23] также, исходя из анализа затухающих колебаний и исследования резонансного режима нагружения системы с одной степенью свободы, для описания которой используется физическая зависимость (11). Если в качестве такой системы рассматривается вязкоупругий стержень, имеющий площадь поперечного сечения F , длину ℓ и груз на конце массой m , то в первом случае уравнение затухающих колебаний имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (13)$$

где введены обозначения

$$2n = \frac{\beta F}{m\ell}, \quad \omega^2 = \frac{EF}{m\ell}. \quad (14)$$

Решение уравнения (13) имеет вид

$$x = A(\tau) \sin(\omega_1 \tau - \varphi) = A_0 e^{-n\tau} \sin(\omega_1 \tau - \varphi),$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}, \quad \varphi = \frac{n}{\omega_1}.$$

При его использовании параметр δ будет определяться по формуле

$$\delta = \ln \frac{A(\tau_i)}{A(\tau_i + T)} = nT, \quad (15)$$

которая с учетом обозначений (14) и зависимости $T = 2\pi/\omega$ приводится к формуле (12).

Во втором случае, когда стержень находится под действием гармонической вынуждающей силы $P = P_0 \sin pt$, приложенной к грузу, дифференциальное уравнение движения вынужденных колебаний груза, в отличие от (13), имеет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = h_0 \sin pt,$$

где $h_0 = P_0/m$. Его решением резонансная амплитуда колебаний будет определяться по формуле

$$A_p = \frac{h_0}{2np} = \frac{h_0}{2n\omega}, \quad (16)$$

а статическое перемещение груза при действии силы P_0 и коэффициент динамичности при резонансе будут равны

$$x_{st} = \frac{P_0 \ell}{EF}, \quad \lambda = \frac{A_p}{x_{st}}. \quad (17)$$

Известно, что

$$\delta = \pi/\lambda. \quad (18)$$

Поэтому при учете (16), (17) и обозначения $h_0 = P_0/m$ выражение (18) принимает вид формулы (12).

Предположим, что при гармонических колебаниях стержня в нем формируются напряжения и деформации, во времени изменяющиеся по закону

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega\tau}, \quad \sigma = \sigma_0 e^{i\omega\tau},$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Внося принятые представления в соотношение (11), получим зависимость

$$\sigma_0 = (E + i\beta)\varepsilon_0,$$

из которой следует, что введенный в рассмотрение коэффициент вязкости β следует также рассматривать как мнимую часть комплексного модуля упругости, широко используемого в механике вязкоупругих тел [13 и др.].

3. Уравнения движения тонкой пластины с учетом внутреннего и внешнего демпфирования. В линейной теории пластин, основанной на классической модели Кирхгофа – Лява, перемещения и изгибные деформации произвольной точки $M(x, y, z)$ пластины через функцию прогиба w точки $M_0(x, y)$ срединной плоскости выражаются по формулам

$$\begin{aligned} U &= -zw_{,x}, & V &= -zw_{,y}, & W &= w, \\ \varepsilon_x &= -zw_{,xx}, & \varepsilon_y &= -zw_{,yy}, & \gamma_{xy} &= -2zw_{,xy}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для обобщения соотношения (11) на задачи о плоско-напряженном состоянии пластины введем гипотезу о том, что коэффициенты вязкости материала при осевых деформациях β и сдвиговых деформациях α связаны между собой зависимостью

$$\alpha = \frac{\beta}{2(1+\nu)},$$

где ν – коэффициент Пуассона. Тогда между компонентами деформаций (19), их скоростями $\varepsilon_{x,\tau}$, $\varepsilon_{y,\tau}$, $\gamma_{xy,\tau}$ и компонентами напряжений σ_x , σ_y , σ_{xy} можно составить физические зависимости следующего вида:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) + \frac{\beta}{1-\nu^2}(\varepsilon_{x,\tau} + \nu\varepsilon_{y,\tau}), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) + \frac{\beta}{1-\nu^2}(\varepsilon_{y,\tau} + \nu\varepsilon_{x,\tau}), \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} + \frac{\beta}{2(1+\nu)}\gamma_{xy,\tau}. \end{aligned} \quad (20)$$

При использовании составленных соотношений (19), (20) для описания изгибного динамического деформированного состояния дифференциальное уравнение движения пластины может быть приведено к виду

$$D\nabla^2\nabla^2 w + \tilde{D}\nabla^2\nabla^2 w_{,\tau} + \rho_n t w_{,\tau\tau} - q = q_0, \quad (21)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \tilde{D} = \frac{\beta t^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (22)$$

Здесь q_0 представляет собой некоторую внешнюю поперечную нагрузку, которую необходимо считать заданной, а для определения аэродинамической нагрузки q в соответствии с равенством

$$q = p_1|_{z=0} - p_2|_{z=0}$$

при учете соотношений (10) приходим к выражению

$$q = -Cw_{,\tau}, \quad C = \alpha(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2). \quad (23)$$

Здесь введен в рассмотрение характеризующий *внешнее* аэродинамическое сопротивление поправочный безразмерный коэффициент α , который в общем случае должен зависеть от формы пластины, условий закрепления ее краев и может быть определен исходя из данных тех или иных физических или вычислительных экспериментов на основе применения более точных математических моделей взаимодействия деформируемых тел с окружающей средой.

Если во второе выражение (22) в соответствии с (12) внести параметр δ , то для определения \tilde{D} получаем формулу

$$\tilde{D} = \frac{\delta}{\pi\omega} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{\delta}{\pi\omega} D.$$

При ее подстановке уравнение (21) в силу (23) запишется в виде

$$D\nabla^2\nabla^2 w + \frac{\delta D}{\pi\omega} \nabla^2\nabla^2 w_{,\tau} + \rho_n t w_{,\tau\tau} + Cw_{,\tau} = q_0. \quad (24)$$

В случае $\delta = 0$, $C = 0$, $q_0 = 0$ из (24) следует уравнение

$$D\nabla^2\nabla^2 w + \rho_n t w_{,\tau\tau} = 0, \quad (25)$$

которым описываются свободные изгибные колебания пластины без учета внутреннего (вязкого) и внешнего (аэродинамического) демпфирования.

Для составленного уравнения (24) на контуре пластины формулируются граничные условия, а при $\tau = 0$ – начальные условия вида

$$w(x, y, \tau)|_{\tau=0} = w_0(x, y), \quad w_{,\tau}(x, y, \tau)|_{\tau=0} = w_{0,\tau}(x, y).$$

4. Задача о затухающих колебаниях шарнирно опертой по контуру пластины, находящейся в условиях начального напряженно-деформированного состояния. Рассмотрим прямоугольную пластину длиной a , шириной b и со срединной плоскостью σ , ограниченной координатными линиями $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$. При шарнирном опирании кромок пластины решение уравнения (25), представляемое в виде

$$w = w_{mn}(\tau) \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \quad (26)$$

$$\lambda_m = m\pi/a, \quad \lambda_n = n\pi/b, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots,$$

для определения значений круговых частот ω_{mn} приводит к формуле

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D}{\rho_n t} L_{mn}, \quad L_{mn} = (\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2. \quad (27)$$

Предположим, что под действием некоторой системы внешних сил q_0 пластина находится в изогнутом статическом равновесном состоянии, характеризующемся функцией прогиба

$$w_0(x, y) = w_{mn}^0 \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y. \quad (28)$$

Если в момент времени $\tau = 0$ пластина освобождается от удерживающих ее связей, то под действием накопленных в ней начальных внутренних напряжений σ_x^0 , σ_y^0 , σ_{xy}^0 начинается затухающий динамический процесс деформирования, завершающийся возвратом пластины в плоское недеформированное состояние. При учете внутреннего ($\delta \neq 0$) и внешнего аэродинамического ($\alpha \neq 0$) демпфирования такой процесс динамического деформирования будет описываться уравнением (24) при начальных условиях

$$w(x, y, \tau) \Big|_{\tau=0} = w_{mn}^0 \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \quad w_{,\tau}(x, y, \tau) \Big|_{\tau=0} = 0, \quad (29)$$

причем в соответствии с (27) уравнение (24) необходимо заменить уравнением

$$D\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\delta_{mn}}{\pi \omega_{mn}} D\nabla^2 \nabla^2 w_{,\tau} + \rho_n t w_{,\tau\tau} + C w_{,\tau} = 0, \quad (30)$$

где введен параметр демпфирования δ_{mn} , который, судя по результатам проведенных экспериментальных исследований [19], практически не зависит от уровня деформаций (для исследованного материала) и весьма слабо зависит от частоты колебаний ω_{mn} , следовательно, для некоторых материалов с большой степенью точности допустимо принять $\delta_{mn} \approx \delta = \text{const}$ при всех значениях m и n .

Решение составленного уравнения (30) будем искать в виде

$$w = w_{mn}(\tau) \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y. \quad (31)$$

Тогда уравнение (30) при учете (28) примет вид

$$\frac{d^2 w_{mn}}{d\tau^2} + a_{mn} \frac{dw_{mn}}{d\tau} + \omega_{mn}^2 w_{mn} = 0, \quad (32)$$

где

$$a_{mn} = \frac{\delta_{mn} \omega_{mn}}{\pi} + r, \quad r = \frac{\alpha(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)}{\rho_n t}. \quad (33)$$

Обозначим через α_{mn} параметр

$$\alpha_{mn}^2 = a_{mn}^2 - \omega_{mn}^2 \quad (34)$$

и предположим, что $\alpha_{mn}^2 < 0$. Тогда решение уравнения (32) будет иметь вид

$$w_{mn} = A_{mn} e^{\lambda_{mn}^{(1)} \tau} + B_{mn} e^{\lambda_{mn}^{(2)} \tau}, \quad (35)$$

где

$$\lambda_{mn}^{(1,2)} = -\frac{a_{mn}}{2} \pm \frac{i}{2} \tilde{\alpha}_{mn}, \quad \tilde{\alpha}_{mn}^2 = |\alpha_{mn}^2|. \quad (36)$$

Подчиним решение (35) начальным условиям

$$w_{mn} \Big|_{\tau=0} = w_{mn}^0, \quad \frac{dw_{mn}}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad (37)$$

следующим из (29). Тогда при подстановке в (37) функции (35) получим

$$A_{mn} + B_{mn} = w_{mn}^0, \quad \lambda_{mn}^{(1)} A_{mn} + \lambda_{mn}^{(2)} B_{mn} = 0. \quad (38)$$

Так как в соответствии с (36)

$$\lambda_{mn}^{(1)} - \lambda_{mn}^{(2)} = i\tilde{\alpha}_{mn}, \quad (39)$$

то

$$A_{mn} = -\frac{\lambda_{mn}^{(2)}}{i\tilde{\alpha}_{mn}} w_{mn}^0, \quad B_{mn} = \frac{\lambda_{mn}^{(1)}}{i\tilde{\alpha}_{mn}} w_{mn}^0. \quad (40)$$

Следовательно, в соответствии с (38), (39), (40) и (35)

$$\begin{aligned} w_{mn} &= \frac{w_{mn}^0}{2i\tilde{\alpha}_{mn}} \left[(a_{mn} + i\tilde{\alpha}_{mn}) e^{-\frac{(a_{mn} - i\tilde{\alpha}_{mn})\tau}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + (-a_{mn} + i\tilde{\alpha}_{mn}) e^{-\frac{(a_{mn} + i\tilde{\alpha}_{mn})\tau}{2}} \right] = \\ &= -\frac{w_{mn}^0 i}{2\tilde{\alpha}_{mn}} e^{-\frac{a_{mn}\tau}{2}} \left[(a_{mn} + i\tilde{\alpha}_{mn}) e^{\frac{i\tilde{\alpha}_{mn}\tau}{2}} + (-a_{mn} + i\tilde{\alpha}_{mn}) e^{-\frac{i\tilde{\alpha}_{mn}\tau}{2}} \right] = \\ &= -\frac{w_{mn}^0}{2\tilde{\alpha}_{mn}} e^{-\frac{a_{mn}\tau}{2}} \left[(-\tilde{\alpha}_{mn} + ia_{mn}) e^{\frac{i\tilde{\alpha}_{mn}\tau}{2}} - (\tilde{\alpha}_{mn} + ia_{mn}) e^{-\frac{i\tilde{\alpha}_{mn}\tau}{2}} \right] = \\ &= \frac{w_{mn}^0}{\tilde{\alpha}_{mn}} \left[\tilde{\alpha}_{mn} \cos\left(\frac{\tilde{\alpha}_{mn}\tau}{2}\right) + a_{mn} \sin\left(\frac{\tilde{\alpha}_{mn}\tau}{2}\right) \right] e^{-\frac{a_{mn}\tau}{2}}. \quad (41) \end{aligned}$$

При этом, как легко установить,

$$\frac{\partial w_{mn}}{\partial \tau} = -\frac{w_{mn}^0}{2\tilde{\alpha}_{mn}} (a_{mn}^2 + \tilde{\alpha}_{mn}^2) \sin\left(\frac{\tilde{\alpha}_{mn}\tau}{2}\right) e^{-\frac{a_{mn}\tau}{2}}. \quad (42)$$

Следует отметить, что p_1 и p_2 представляют собой приращения давлений в средах «1» и «2», в которых в невозмущенном состоянии давления равны p_1^0 и p_2^0 соответственно. Подставляя составленное выражение (42) в (10), можно видеть, что при $w_{mn}^0 > 0$ имеют место очевидные неравенства $p_1 > 0$ и $p_2 < 0$, причем в случае $\rho_1 = \rho_2$, $c_1 = c_2$ имеем равенство $p_1 = -p_2$.

Легко установить, что правая часть выражения (42) достигает максимума при $\tau_* = \pi/\tilde{\alpha}_{mn}$, когда в соответствии с (10) и (42)

$$p_1^{\max} = (p_1|_{z=0})^{\max} = \frac{\alpha p_1 c_1 w_{mn}^0}{2\tilde{\alpha}_{mn}} (a_{mn}^2 + \tilde{\alpha}_{mn}^2) e^{-\frac{a_{mn}\pi}{2\tilde{\alpha}_{mn}}}. \quad (43)$$

Как отмечается в [23], в области частот $f = (1 \div 5) \cdot 10^3$ Гц человек слышит звуки, если звуковое давление не менее $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Па. Это так называемый порог слышимости звука. При этом уровень звука оценивается отношением силы данного звука к силе звука, соответствующего порогу слышимости. В рассматриваемом случае уровень звука, формирующегося в процессе динамического деформирования пластины, в момент $\tau = \tau_*$ и при $z = 0$ будет определяться по формуле

$$R_p = 20 \lg \left(\frac{P_1^{\max}}{P_0} \right), \quad (44)$$

который измеряется в децибелах.

С целью изучения влияния параметров δ_{mn} и α на процесс колебаний по формуле (41) определены значения функций $\tilde{w}_{mn} = w_{mn}/w_{mn}^0$ на отрезке времени $0 \leq \tau \leq n_{mn} T_{mn} = 11 \cdot T_{mn}$, где $T_{mn} = 2\pi/\omega_{mn}$ – период свободных колебаний пластины с круговой частотой ω_{mn} , вычисляемый по формуле (27) без учета демпфирования. На рис. 1 и рис. 2 для случая $m = n = 1$ приведены графики изменения этой функции (\tilde{w}_{11}) для пластины с параметрами $a = b = 1$ м, $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$, $\rho_n = 7800$ кг/м³, $t = 1$ мм, находящейся в воздухе с параметрами $c_1 = c_2 = 340$ м/сек, $\rho_1 = \rho_2 = 1.25$ кг/м³. Из них на рис. 1 приведены графики, соответствующие параметрам $\alpha = 0$, $\delta_{11} = 0.001, 0.01, 0.1, 0.2$ (учет только *внутреннего* демпфирования). Сплошные кривые соответствуют значению $\delta_{11} = 0.001$, штриховые – $\delta_{11} = 0.01$, штрихпунктирные – $\delta_{11} = 0.1$, а пунктирные – $\delta_{11} = 0.2$. Графики на рис. 2 рассчитаны для значений параметров $\delta_{11} = 0$ и $\alpha = 0.001, 0.01, 0.1, 1.0$ (соответственно сплошные, штриховые, штрихпунктирные и пунктирные кривые), т. е. при учете только *внешнего* (аэродинамического) демпфирования.

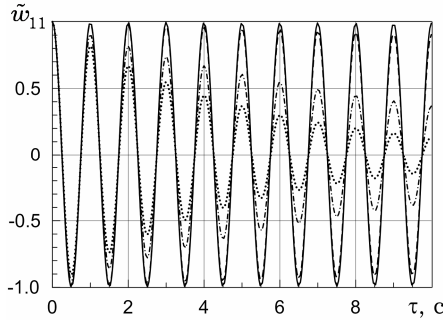


Рис. 1

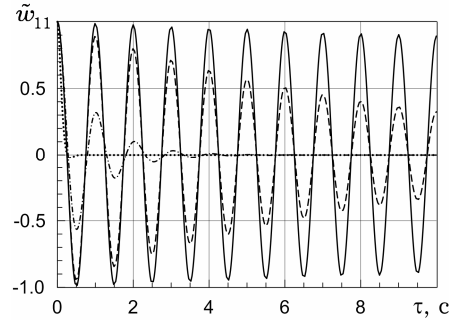


Рис. 2

Следует отметить, что в рамках принятой степени точности описания процесса динамического деформирования структура полученного уравнения (32) аналогична структуре уравнения (13), в соответствии с которым и формулой (15) для определения суммарного логарифмического декремента колебаний δ_{mn}^* по аналогии с (15) следует записать формулу

$$\delta_{mn}^* = n_{mn} T_{mn} = \frac{a_{mn} \pi}{\omega_{mn}}.$$

Внеся сюда зависимости (27), (33) и учитывая соотношения (22) и (26), получим

$$\delta_{mn}^* = \delta_{mn} + \frac{r\pi}{\omega_{mn}} = \delta_{mn} + \frac{\alpha(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2) a^2}{\pi t (m^2 + n^2 \lambda^2)} \sqrt{\frac{12(1 - \nu^2) \rho_n}{E}}, \quad \lambda = \frac{a}{b}. \quad (45)$$

Если считать, что $\delta_{11}^* \sim 0.2$, то при $\delta_{11} \sim 0.1$ в соответствии с формулой (45) и принятыми выше исходными данными расчета для α следует принять значение $\alpha \sim 0.01$.

В табл. 1 приведены значения максимального звукового давления и уровня звука в точке $x = a/2$, $y = b/2$ пластины, рассчитанные по форму-

лам (43) и (44) при принятых выше исходных данных, значениях $w_0 = t = 1$ мм, $\delta_{11} = 0.15$ для трех значений параметра α . Несмотря на высокие значения параметра R_p , в силу малого значения частоты колебаний $f_{mn} = \omega_{mn}/(2\pi)$ (в рассматриваемом случае $f_{11} = 24.42$ Гц) следует считать, что излучаемый пластиной звук находится в зоне нижней границы порога слышимости.

Таблица 1

α	0.01	0.02	0.03
p_1^{\max} , Па	0.13	1.3	1.9
R_p	76.0	96.1	99.6

5. Об излучении звуковой волны при ударе пластины поперечной нагрузкой. Предположим, что в момент времени $\tau = 0$ на пластину набегают поперечная нагрузка $q_0(\tau)$, изменяющаяся по закону

$$q_0(\tau) = \tilde{q}_0 e^{-p\tau}, \quad (46)$$

где $q_0 = \text{const}$ – заданное значение нагрузки, а p – заданный параметр ее изменчивости во времени.

Примем для \tilde{q}_0 разложение в двойные ряды Фурье по нечетным гармоникам m и n :

$$\tilde{q}_0 = \tilde{q}_0 \sum_{m,n=1,3} \tilde{f}_{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y = \sum_{m,n=1,3,\dots} \tilde{q}_{mn}^0 \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \quad m, n = 1, 3, \dots, \quad (47)$$

где $\tilde{f}_{mn} = 4/(\pi^2 mn)$, $q_{mn}^0 = \tilde{q}_0 \tilde{f}_{mn}$.

В рассматриваемом случае решение уравнения (24) следует искать в виде

$$w(x, y, \tau) = \sum_{m,n} w_{mn}(\tau) \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \quad (48)$$

так как по предположению пластина шарнирно оперта по контуру.

При подстановке выражений (46), (48) и учете представления (47) вместо уравнения (24) для определения $w_{mn}(\tau)$ приходим к неоднородному уравнению

$$\frac{d^2 w_{mn}}{d\tau^2} + a_{mn} \frac{dw_{mn}}{d\tau} + \omega_{mn}^2 w_{mn} = \tilde{q}_{mn}^0 e^{-p\tau}.$$

Его общее решение имеет вид

$$w_{mn} = A_{mn} e^{\lambda_{mn}^{(1)} \tau} + B_{mn} e^{\lambda_{mn}^{(2)} \tau} + g_{mn} e^{-p\tau}, \quad (49)$$

где, как нетрудно показать,

$$g_{mn} = \frac{\tilde{q}_{mn}^0}{p^2 - a_{mn} p + \omega_{mn}^2}.$$

В рассматриваемом случае, в отличие от (37), для функций w_{mn} следует формулировать начальные условия вида

$$w_{mn} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{dw_{mn}}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = 0.$$

Подчиняя им решение (49), получим систему уравнений

$$A_{mn} + B_{mn} = -g_{mn}, \quad \lambda_{mn}^{(1)} A_{mn} + \lambda_{mn}^{(2)} B_{mn} = pg_{mn},$$

откуда следуют равенства

$$A_{mn} = \frac{(p + \lambda_{mn}^{(2)})g_{mn}}{i\tilde{\alpha}_{mn}}, \quad B_{mn} = -\frac{(p + \lambda_{mn}^{(1)})g_{mn}}{i\tilde{\alpha}_{mn}}.$$

Внеся их в решение (49), получим

$$\begin{aligned} w_{mn} &= g_{mn} \left[\frac{(p + \lambda_{mn}^{(2)})}{i\tilde{\alpha}_{mn}} e^{\lambda_{mn}^{(1)}\tau} - \frac{(p + \lambda_{mn}^{(1)})}{i\tilde{\alpha}_{mn}} e^{\lambda_{mn}^{(2)}\tau} + e^{-p\tau} \right] = \\ &= g_{mn} \left\{ \left[-\cos\left(\frac{\tilde{\alpha}_{mn}\tau}{2}\right) + \frac{p - a_{mn}}{\tilde{\alpha}_{mn}} \sin\left(\frac{\tilde{\alpha}_{mn}\tau}{2}\right) \right] e^{-\frac{a_{mn}}{2}\tau} + e^{-p\tau} \right\}. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{mn}}{\partial \tau} &= g_{mn} \left\{ \left[\frac{\tilde{\alpha}_{mn}^2 + a_{mn}^2 - pa_{mn}}{2\tilde{\alpha}_{mn}} \sin\left(\frac{\tilde{\alpha}_{mn}\tau}{2}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + p \cos\left(\frac{\tilde{\alpha}_{mn}\tau}{2}\right) \right] e^{-\frac{a_{mn}}{2}\tau} - pe^{-p\tau} \right\}. \end{aligned} \quad (50)$$

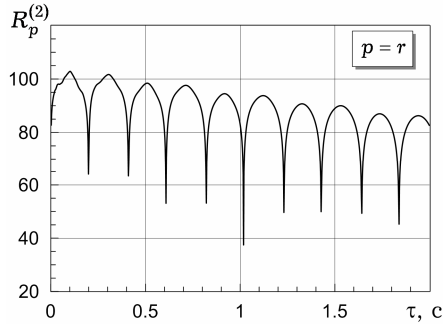
Следовательно, в соответствии с (10) и (50) для точки пластины с координатами $x = a/2$ и $y = b/2$ получаем формулы

$$\begin{aligned} p_2^{\max} \Big|_{z=0} &= \alpha\rho_2 c_2 \sum_{m,n=1,3,\dots} g_{mn} \left\{ \left[\frac{\tilde{\alpha}_{mn}^2 + a_{mn}^2 - pa_{mn}}{2\tilde{\alpha}_{mn}} \sin\left(\frac{\tilde{\alpha}_{mn}\tau}{2}\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + p \cos\left(\frac{\tilde{\alpha}_{mn}\tau}{2}\right) \right] e^{-\frac{a_{mn}}{2}\tau} - pe^{-p\tau} \right\}, \end{aligned} \quad (51)$$

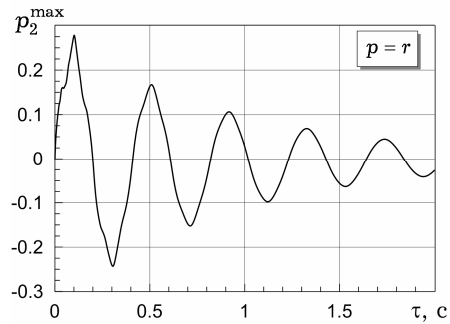
$$R_p^{(2)}(\tau) \Big|_{z=0} = 20 \lg \left| \frac{p_2^{\max}}{p_0} \right|, \quad (52)$$

которые в принятом приближении позволяют определить уровень звука $R_p^{(2)}$ и величину формирующегося в полупространстве V_2 акустического давления p_2 .

Для находящейся в воздухе пластины, параметры которой приведены в п. 4, на рис. 3 для трех значений параметра изменяемости p ($p = r$, $p = 10r$, $p = 100r$) и $\tilde{q}_0 = 1.0$ КПа приведены графики изменения значений $R_p^{(2)}$ и p_2^{\max} , найденных по формулам (51) и (52) при $\alpha = 0.01$ и $\delta_{mn} = 0.1$. Видно, что при некоторых значениях $\tau = \tau_*(p)$ функции $R_p^{(2)}$ и p_2^{\max} достигают максимальных значений.



а)



б)

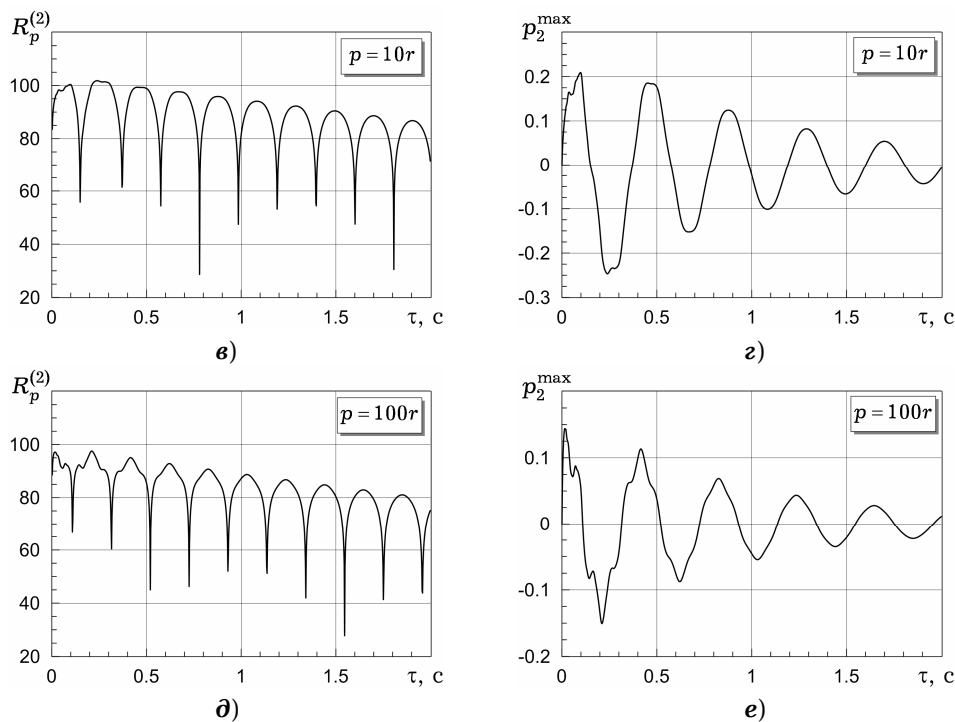


Рис. 3

Заключение. Судя по полученным результатам, в случае динамических процессов деформирования тонкостенных элементов конструкций при постановке соответствующих задач учет внешнего аэродинамического демпфирования является даже более важным, чем учет только внутреннего вязкого демпфирования материала. В рамках предлагаемой модели определение введенных в рассмотрение параметров δ и α , характеризующих внутреннее и внешнее демпфирование, представляет собой самостоятельную задачу, решение которой возможно только на основе синтеза экспериментальных и теоретических методов исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект и грант № 13-08-90435 UKR-F-A).

1. Берсудский В. Е., Крысин В. Н., Лесных С. И. Технология изготовления сотовых авиационных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1975. – 216 с.
2. Болотин В. В. Акустические поля внутри оболочек, совершающих случайные колебания // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1968. – № 1. – С. 74–81.
3. Горшков А. Г. Взаимодействие слабых нестационарных волн давления с упругими оболочками // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1974. – № 3. – С. 155–164.
4. Горшков А. Г. Взаимодействие ударных волн с деформируемыми преградами // Итоги науки и техники. Сер. «Механика твердых деформируемых тел». – Москва: ВИНТИ, 1980. – 13. – С. 105–186.
5. Горшков А. Г. Динамическое взаимодействие оболочек и пластин с окружающей средой // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. – № 2. – С. 165–178.
6. Григolloк Э. И. Проблемы взаимодействия оболочек с жидкостью // Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин (Днепропетровск, 1969). – Москва: Наука, 1970. – С. 755–778.
7. Григolloк Э. И., Горшков А. Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. – Ленинград: Судостроение, 1974. – 208 с.
8. Гузь А. Н., Кубенко В. Д. Теория нестационарной аэроупругости оболочек. – Киев: Наук. думка, 1982. – 400 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т. – Т. 5.)
9. Ендогур А. И., Вайнберг М. В., Иерусалимский К. М. Сотовые конструкции. Выбор параметров и проектирование. – Москва: Машиностроение, 1986. – 200 с.
10. Ефимцов Б. М. Колебания и акустическое излучение пластин в турбулентном пограничном слое // Труды ЦАГИ. – 1971. – Вып. 1371. – С. 39–46.
11. Ефимцов Б. М. Колебания пластин при различных видах случайного нагружения // Труды ЦАГИ. – 1975. – Вып. 1655. – С. 33–47.

12. *Замышляев Б. В., Яковлев Ю. С.* Динамические нагрузки при подводном взрыве. – Ленинград: Судостроение, 1967. – 387 с.
13. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 224 с.
14. *Кубенко В. Д.* Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. – Киев: Наук. думка, 1979. – 184 с.
15. *Миненков Б. В., Стасенко И. В.* Прочность деталей из пластмасс. – Москва: Машиностроение, 1977. – 264с.
16. *Мнев Е. Н., Перцев А. К.* Гидроупругость оболочек. – Ленинград: Судостроение, 1970. – 366 с.
17. *Мунин А. Г., Ефимцов Б. М.* и др. Авиационная акустика: В 2 ч. Ч. 2: Шум в салонах пассажирских самолетов. – Москва: Машиностроение, 1986. – 261 с.
18. *Мунин А. Г., Самохин В. Ф.* Авиационная акустика: В 2 ч. Ч. 1: Шум на местности дозвуковых пассажирских самолетов и вертолетов. – Москва: Машиностроение, 1986. – 243 с.
19. *Паймушин В., Коноплев Ю., Каюмов Р., Фирсов В., Гюнал И.* Определение параметров внутреннего демпфирования материала путем испытания плоских тест-образцов с учетом их внешнего (аэродинамического) демпфирования // Нестационарні процеси деформування елементів конструкцій, зумовлені дією полів різної фізичної природи / Під заг. ред. В. Д. Кубенка, Р. М. Кушніра, Д. В. Тарлаковського. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2012. – С. 144–148.
20. *Панин В. Ф., Гладков Ю. А.* Конструкции с заполнителем. Справочник. – Москва: Машиностроение, 1991. – 272 с.
21. *Пановко Я. Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – Москва: Физматгиз, 1960. – 193 с.
22. *Перцев А. К., Платонов Э. Г.* Развитие решения задач нестационарной гидроупругости оболочек // Тр. IX Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин (Ленинград, 1973). – Ленинград: Судостроение, 1975. – С. 78–82.
23. *Постнов В. А., Калинин В. С., Ростовцев Д. М.* Вибрация корабля. – Ленинград: Судостроение, 1983. – 248 с.
24. *Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. – Ленинград: Судостроение, 1972. – 374 с.
25. *Штамм К., Witte Г.* Многослойные конструкции. – Москва: Стройиздат, 1983. – 300 с.
Stamm K., Witte H. Sandwichkonstruktionen. Berechnung, Fertigung, Ausführung. – Wien–New York: Springer-Verlag, 1974. – 337 S.
26. *Brouwer H. H., Rienstra S. W.* Aeroacoustics research in Europe: The CEAS-ASC report on 2007 highlights // J. Sound Vib. – 2008. – **318**, No. 4-5. – P. 625–654.
27. *Campos E.* Aeroacoustics research in Europe: The CEAS-ASC report on 2002 highlights // J. Sound Vib. – 2003. – **268**, No. 4. – P. 809–824.
28. *Casalino D.* Aeroacoustics research in Europe: The CEAS-ASC report on 2009 highlights // J. Sound Vib. – 2010. – **329**, No. 22. – P. 4810–4828.
29. *Doria A., Morellato D.* The influence of aspect ratio and material on the sound radiation of low frequency modes of baffled cylindrical shells // J. Sound Vib. – 1998. – **209**, No. 2. – P. 377–384.
30. *Juvé D.* Aeroacoustics research in Europe: The CEAS-ASC report on 2008 highlights // J. Sound Vib. – 2009. – **328**, No. 1-2. – P. 213–242.
31. *Maestrello L.* Measurement of noise radiated by boundary layer excited panels // J. Sound Vib. – 1965. – **2**, No. 2. – P. 100–115.
32. *Park J., Mongeau L.* Vibration and sound radiation of viscoelastically supported Mindlin plates // J. Sound Vib. – 2008. – **318**, No. 4-5. – P. 1230–1249.
33. *Picó R., Gautier F.* The vibroacoustics of slightly distorted cylindrical shells: A model of the acoustic input impedance // J. Sound Vib. – 2007. – **302**, No. 1-2. – P. 18–38.
34. *Plaut R. H., Cotton S. A.* Two-dimensional vibrations of air-filled geomembrane tubes resting on rigid or deformable foundations // J. Sound Vib. – 2005. – **282**, No. 1-2. – P. 265–276.
35. *Rdzanek W. P. (Jr.), Rdzanek W. J., Engel Z.* Theoretical analysis of sound radiation of an elastically supported circular plate // J. Sound Vib. – 2003. – **265**, No. 1. – P. 155–174.
36. *Ruzzene M.* Vibration and sound radiation of sandwich beams with honeycomb truss core // J. Sound Vib. – 2004. – **277**, No. 4-5. – P. 741–763.
37. *Sung C.-C., Jan J. T.* The response of and sound power radiated by a clamped rectangular plate // J. Sound Vib. – 1997. – **207**, No. 3. – P. 301–317.
38. *Voutsinas S. G.* Aeroacoustics research in Europe: The CEAS-ASC report on 2005 highlights // J. Sound Vib. – 2007. – **299**, No. 3. – P. 419–459.

**ПРО ЗАДАЧІ ВИПРОМІНЮВАННЯ ЗВУКОВОЇ ХВИЛІ
ПРИ ДИНАМІЧНОМУ ПРОЦЕСІ ДЕФОРМУВАННЯ ПЛАСТИН
З УРАХУВАННЯМ ЗОВНІШНЬОГО І ВНУТРІШНЬОГО ДЕМПФУВАННЯ**

Для опису динамічного процесу деформування пластини при малих деформаціях і переміщеннях з урахуванням внутрішнього і зовнішнього аеродинамічного демпфування побудовано рівняння руху, що базуються на використанні гіпотез Кірхгофа – Лява, узагальненої моделі Кельвіна – Фойгта і розв'язків хвильових рівнянь гідрогазодинаміки, визначених для оточуючих пластину акустичних середовищ в одновимірному наближенні в рамках відомої гіпотези про плоске відбиття і випромінювання акустичних хвиль. На основі побудованого рівняння знайдено точні аналітичні розв'язки задачі про затухаючі коливання попередньо зігнутої шарнірно опертої по контуру прямокутної пластини і випромінюванні нею звукової хвилі після її звільнення від зв'язків, а також задачі про випромінювання звукової хвилі при ударі пластини поперечним навантаженням.

**ON PROBLEMS OF SOUND WAVES RADIATION
AT DYNAMIC DEFORMATION PROCESS OF PLATES
TAKING INTO ACCOUNT EXTERNAL AND INTERNAL DAMPING**

To describe the dynamic deformation process of the plate for small deformations and displacements taking into account aerodynamic and hysteretic damping the equation of motion is constructed. Governing equations are based on Kirchoff – Love kinematic hypothesis and generalized Kelvin – Voight constitutive model. Solutions to hydrodynamic wave equations for the acoustic medium surrounding the plate are determined as one dimensional approximation within the framework of well-known hypothesis on acoustic radiation and reflection in planar domain. On the basis of the constructed equation, exact analytical solutions were found for initially curved hinge-supported along the contour rectangular plate undergoing damped oscillations and radiating a sound wave after releasing from it bonds. The solution of the sound wave radiation problem in the case of transverse impacting load on the plate is also obtained.

Науч.-техн. центр проблем динамики и прочности
Казанск. нац. исслед. техн. ун-та им. А. Н. Туполева
(КНИТУ-КАИ), Казань, Россия

Получено
15.11.12