

КРУЧЕННЯ ЗРІЗАНОГО КОНІЧНО-ШАРУВАТОГО ПРУЖНОГО КОНУСА

Отримано точний розв'язок задачі про кручення зрізаного конічно-шаруватого пружного конуса. Пружні сталі шарів стрибкоподібно змінюються на конічних поверхнях. Зовнішня конічна поверхня завантажена дотичними крутними напруженнями. Торець конуса або защемлений, або вільний від навантаження. Між шарами конуса виконуються умови ідеального контакту. Розв'язок побудовано за допомогою інтегральних перетворень, застосованих безпосередньо до рівняння рівноваги при крученні. Встановлено рекурентну залежність між константами розв'язків диференціального рівняння задачі для сусідніх шарів. Це дало можливість зробити кількість рівнянь для визначення констант розв'язків незалежною від кількості шарів. Метод розв'язування деталізовано для часткових випадків шаруватості, для яких встановлено залежність напружень від співвідношення модулів зсувів сусідніх шарів.

Широке застосування функціонально-градієнтних матеріалів та композитів спонукає до вивчення їх механічних властивостей під дією різноманітних навантажень. Саме це зумовило широкий спектр праць, присвячених розробці математичних методів розв'язування задач механіки шаруватих середовищ.

Розвитку теорії інтегральних рівнянь і детальному аналізу нових методів їх розв'язування для опису хвильових полів шарувато-неоднорідних структур присвячені праці В. А. Бабешка та його учнів [2, 7]. Новий метод розв'язування задач для шаруватих середовищ, який дозволяє враховувати наявність неоднорідностей різного типу усередині шару при довільному їх розміщенні та кількості, побудовано у праці О. Д. Пряхіної [15]. Р. М. Кушніром і Б. В. Процюком досліджено взаємодію циліндрично-шаруватих середовищ з урахуванням температури, а саме: квазістатичні температурні напруження у багатошаровому термочутливому циліндрі [9]. О. О. Ватульяном задачі для шаруватих середовищ досліджено з урахуванням термічних та електричних полів [6]. Ефективні динамічні властивості тривимірних композитів з урахуванням наявності в них монетоподібних включень вивчає В. В. Михаськів [23]. Узагальнення аналітичних методів розв'язування змішаних осесиметричних задач для функціонально-градієнтних середовищ наведено у працях В. М. Александрова та учнів [1]. Числові методи щодо виявлення закономірностей напруженого стану за дії статичного та динамічного навантаження на шаруваті тіла описано у [20–22, 25].

Серед широкого кола методів розв'язування задач для шаруватих середовищ виділимо підхід, який базується на припущенні, що існує інтегральне перетворення, з використанням якого вихідну крайову задачу можна звести до одновимірної. Для кожного шару в цьому випадку будуватиметься загальний розв'язок відповідного диференціального рівняння, який містить невідомі константи. Подальше відшукування цих констант, кількість яких є пропорційною до порядку рівняння і кількості шарів, становить основну проблему. Зусилля всіх авторів, які використовували такий підхід, були зосереджені на зменшенні кількості цих невідомих констант [11, 12, 16, 17]. Значний результат у цьому напрямку було отримано Г. Я. Поповим [13, 14]. На основі узагальнення відомого методу О. М. Крилова початкових параметрів ним було запропоновано метод, у якому кількість невідомих не залежить від кількості шарів. Це дає змогу апроксимувати функціонально-градієнтні матеріали шаруватими середовищами з пружними сталими, які стрибкоподібно змінюються при переході від одного шару до іншого. За рахунок того, що розв'язок не залежить від кількості шарів, апроксимацію вихідної задачі можна уточнювати, збільшуючи кількість шарів.

Другим важливим аспектом запропонованого підходу є те, що для розв'язання задачі використовується безпосередньо рівняння рівноваги при крученні. На основі такого підходу було розв'язано задачу про антиплоску деформацію клиноподібного шаруватого середовища та шаруватого конічного тіла [4, 27].

У випадку конічної геометрії тіла, яка потребує застосування сферичної системи координат та наявності відповідних інтегральних перетворень, врахування шаруватості ускладнює задачу. Кількість праць у цьому напрямку є незначною [3, 5, 8, 10, 18, 26]. Отже, задача про визначення напруженого стану зрізаного конічного шаруватого тіла під впливом деформації кручення, що досліджується у цій публікації, є новою як за постановкою, так і за методом розв'язування.

Постановка задачі. Пружний конус заповнює область $a < r < \infty$, $0 < \theta < \omega_n$, $-\pi \leq \varphi < \pi$ (r, θ, φ – сферичні координати). Модуль зсуву стрибкоподібно змінюється на конічних поверхнях $\theta = \omega_j$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ (рис. 1). У виділеному шарі $\omega_{j-1} < \theta < \omega_j$, $j = 1, \dots, n$, модуль зсуву позначатимемо через G_j , а переміщення – через $u_\varphi^{(j)}(r, \theta) = w_j(r, \theta)$

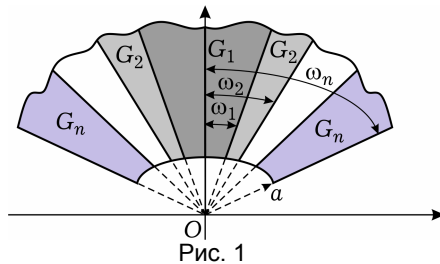


Рис. 1

($u_r(r, \theta, \varphi) = u_\theta(r, \theta, \varphi) \equiv 0$). Переміщення $w_j(r, \theta)$, $a < r < \infty$, $\omega_{j-1} < \theta < \omega_j$, у кожному шарі повинні задовольняти рівняння рівноваги при крученні

$$[r^2 w_j'(r, \theta)]' + \frac{[\sin \theta w_j^*(r, \theta)]'}{\sin \theta} - \frac{w_j(r, \theta)}{\sin \theta} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (1)$$

Тут і далі штрихом позначимо похідну за змінною r , а крапкою – похідну за змінною θ . Відмінні від нуля напруження визначаємо за формулою [24]

$$\begin{aligned} r\tau_{r\varphi}^{(j)}(r, \theta) &= G_j[rw_j'(r, \theta) - w_j(r, \theta)], \\ r\tau_{\theta\varphi}^{(j)}(r, \theta) &= G_j[w_j^*(r, \theta) - \text{ctg} \theta w_j(r, \theta)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Вважаємо, що між двома сусідніми шарами з різними модулями зсуву виконуються умови ідеального контакту:

$$w_j(r, \omega_j) = w_{j+1}(r, \omega_j), \quad r\tau_{\theta\varphi}^{(j)}(r, \omega_j) = r\tau_{\theta\varphi}^{(j+1)}(r, \omega_j), \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3)$$

Крайову умову на зовнішній конічній поверхні $a < r < \infty$, $\theta = \omega_n$ визначаємо рівністю

$$\tau_{\theta\varphi}^{(n)}(r, \omega_n) = q(r)$$

або

$$G_n[w_n^*(r, \omega_n) - \text{ctg} \omega_n w_n(r, \omega_n)] = rq(r), \quad a < r < \infty. \quad (4)$$

У випадку, коли торець $r = a$ зрізаного конуса вважаємо защемленим, крайову умову формулюємо у такому вигляді:

$$w_j(a, \theta) = 0, \quad \omega_{j-1} < \theta < \omega_j, \quad j = 2, \dots, n, \quad \omega_0 = 0. \quad (5)$$

Якщо торець є вільним від напружень, то крайову умову формулюємо так:

$$[r\tau_{r\varphi}^{(j)}]_{r=a} = 0 \quad \text{або} \quad G_j[rw_j^*(a, \theta) - w_j(a, \theta)] = 0. \quad (6)$$

Потрібно визначити переміщення кожного шару, яке задовольняє рівняння (1) за виконання граничних умов (4), (5) або (4), (6) та умов спряження (3).

Зведення задачі до одновимірної та побудова розв'язку при защемленні по сферичній поверхні. За схемою, запропонованою у роботі [26], введемо до розгляду нову невідому функцію $u_j(r, \theta)$, зв'язану з вихідною функцією переміщень $w_j(r, \theta)$ формулою

$$w_j(r, \theta) = r^{-1/2} u_j \left(\ln \frac{r}{a}, \theta \right), \quad \ln \frac{r}{a} = \xi. \quad (7)$$

Частинну похідну за змінною ξ будемо позначати штрихом. Рівняння рівноваги при крученні (1) у позначенні u_j (7) набуде вигляду

$$u_j''(\xi, \theta) - \frac{1}{4} u_j(\xi, \theta) + \frac{[\sin \theta u_j'(\xi, \theta)]'}{\sin \theta} - \frac{u_j(\xi, \theta)}{\sin^2 \theta} = 0, \quad 0 < \xi < \infty, \quad \omega_{j-1} < \theta < \omega_j, \\ j = 2, \dots, n. \quad (8)$$

Враховуючи формули, що пов'язують переміщення і напруження [24], умови спряження (3) для нової функції u_j (7) запишемо як

$$u_j'(\xi, \omega_j) = u_{j+1}'(\xi, \omega_j), \\ G_j[u_j'(\xi, \omega_j) - \operatorname{ctg} \omega_j u_j(\xi, \omega_j)] = G_{j+1}[u_{j+1}'(\xi, \omega_j) - \operatorname{ctg} \omega_j u_{j+1}(\xi, \omega_j)], \\ 0 < \xi < \infty, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (9)$$

Крайова умова (4) на зовнішній конічній поверхні для u_j буде такою:

$$G_n[u_n'(\xi, \omega_n) - \operatorname{ctg} \omega_n u_n(\xi, \omega_n)] = (ae^\xi)^{3/2} q(ae^\xi), \quad 0 < \xi < \infty. \quad (10)$$

Умову (5) защемлення на торці для u_j запишемо так:

$$u_j(0, \theta) = 0, \quad \omega_{j-1} < \theta < \omega_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \omega_0 = 0. \quad (11)$$

У випадку торця, вільного від напружень, умова (6) для функції u_j має вигляд

$$u_j'(0, \theta) - \frac{3}{2} u_j(0, \theta) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \omega_{j-1} < \theta < \omega_j, \quad \omega_0 = 0. \quad (12)$$

Розглянемо спочатку крайову задачу (8)–(11). Для зведення її до одновимірної застосуємо інтегральне перетворення Фур'є за змінною ξ :

$$u_{j,\lambda}(\theta) = \int_0^\infty u_j(\xi, \theta) \sin \xi \lambda d\xi \quad (13)$$

з формулою обернення

$$u_j(\xi, \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \lambda \xi u_{j,\lambda}(\theta) d\lambda. \quad (14)$$

Застосування перетворень (13) дозволяє водночас задовольнити крайову умову (11). Як результат, у просторі трансформант отримуємо одновимірну крайову задачу

$$u_{j,\lambda}''(\theta) + \operatorname{ctg} \theta u_{j,\lambda}'(\theta) - \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} + \lambda^2 + \frac{1}{4} \right] u_{j,\lambda}(\theta) = 0, \quad \omega_{j-1} < \theta < \omega_j, \\ j = 1, 2, \dots, n,$$

$$u_{j,\lambda}(\omega_j) = u_{j+1,\lambda}(\omega_j),$$

$$G_j[u_{j,\lambda}'(\omega_j) - \operatorname{ctg} \omega_j u_{j,\lambda}(\omega_j)] = G_{j+1}[u_{j+1,\lambda}'(\omega_j) - \operatorname{ctg} \omega_j u_{j+1,\lambda}(\omega_j)], \\ j = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$u'_{n,\lambda}(\omega_n) - \operatorname{ctg} \omega_n u_{n,\lambda}(\omega_n) = \frac{q_\lambda^0}{G_n}, \quad q_\lambda^0 = \int_0^\infty (ae^\xi)^{3/2} q(ae^\xi) \sin \lambda \xi d\xi. \quad (15)$$

Фундаментальною системою розв'язків рівняння задачі (15) є функції конуса $P_{-1/2-i\lambda}^1(\cos \theta)$, $Q_{-1/2-i\lambda}^1(\cos \theta)$ [19]. Перша з цих функцій є дійсною функцією для дійсних значень λ , чого не можна стверджувати про другу з них. Тому дійсний розв'язок рівняння крайової задачі (15) будемо у вигляді

$$u_{j,\lambda}(\theta) = C_j^0(\lambda) P_{\bar{v}}^1(\cos \theta) + C_j^1(\lambda) \operatorname{Re} Q_{\bar{v}}^1(\cos \theta), \quad \omega_{j-1} < \theta < \omega_j, \quad \bar{v} = -\frac{1}{2} - i\lambda. \quad (16)$$

Тут $C_j^i(\lambda)$ – невідомі константи, $i = 0, 1$. Формула (16) є правильною для шарів з номерами $j = 2, 3, \dots, n$. Для шару $j = 1$ формулу (16) подамо у формі

$$u_{1,\lambda}(\theta) = C_1^0(\lambda) P_{\bar{v}}^1(\cos \theta), \quad 0 < \theta < \omega_1. \quad (17)$$

Враховуючи співвідношення (3.6.1 (7)) з [19]:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\bar{v}}^1(\cos \theta)}{d\theta} &= P_{\bar{v}}^2(\cos \theta) + \operatorname{ctg} \theta P_{\bar{v}}^1(\cos \theta), \\ \frac{dQ_{\bar{v}}^1(\cos \theta)}{d\theta} &= Q_{\bar{v}}^2(\cos \theta) + \operatorname{ctg} \theta Q_{\bar{v}}^1(\cos \theta), \end{aligned} \quad (18)$$

вираз (16) підставимо в умови спряження задачі (15). Ця процедура приведе до рівностей, які виконуються для шарів із номерами $j = 2, 3, \dots, n - 1$:

$$\begin{aligned} C_j^0(\lambda) P_{\bar{v}}^1(\cos \omega_j) + C_j^1(\lambda) \operatorname{Re} Q_{\bar{v}}^1(\cos \omega_j) &= \\ &= C_{j+1}^0(\lambda) P_{\bar{v}}^1(\cos \omega_j) + C_{j+1}^1(\lambda) \operatorname{Re} Q_{\bar{v}}^1(\cos \omega_j), \\ G_j [C_j^0(\lambda) P_{\bar{v}}^2(\cos \omega_j) + C_j^1(\lambda) \operatorname{Re} Q_{\bar{v}}^2(\cos \omega_j)] &= G_{j+1} [C_{j+1}^0(\lambda) P_{\bar{v}}^2(\cos \omega_j) + \\ &+ C_{j+1}^1(\lambda) \operatorname{Re} Q_{\bar{v}}^2(\cos \omega_j)], \quad j = 2, \dots, n - 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Для $j = 1$ рівності запишемо так:

$$\begin{aligned} C_1^0(\lambda) P_{\bar{v}}^1(\cos \omega_1) &= C_2^0(\lambda) P_{\bar{v}}^1(\cos \omega_1) + C_2^1(\lambda) \operatorname{Re} Q_{\bar{v}}^1(\cos \omega_1), \\ G_1 C_1^0(\lambda) P_{\bar{v}}^2(\cos \omega_1) &= G_2 [C_2^0(\lambda) P_{\bar{v}}^2(\cos \omega_1) + C_2^1(\lambda) \operatorname{Re} Q_{\bar{v}}^2(\cos \omega_1)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Встановимо рекурентну форму для умов (19), (20). Для цього введемо у розгляд вектори та матриці:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_j(\lambda) &= \begin{pmatrix} C_j^0(\lambda) \\ C_j^1(\lambda) \end{pmatrix}, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad \mathbf{C}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} C_1^0(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{g}_j &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \mathbf{R}_j(\lambda) &= \begin{pmatrix} P_{\bar{v}}^1(\cos \omega_j) & \operatorname{Re} Q_{\bar{v}}^1(\cos \omega_j) \\ P_{\bar{v}}^2(\cos \omega_j) & \operatorname{Re} Q_{\bar{v}}^2(\cos \omega_j) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n - 1, \\ \mathbf{R}_1^0(\lambda) &= \begin{pmatrix} P_{\bar{v}}^1(\cos \omega_1) & 0 \\ P_{\bar{v}}^2(\cos \omega_1) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

Умови спряження (19), (20) з урахуванням введених векторів і матриць (21) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_j \mathbf{R}_j(\lambda) \mathbf{C}_j(\lambda) &= \mathbf{g}_{j+1} \mathbf{R}_j(\lambda) \mathbf{C}_{j+1}(\lambda), \quad j = 2, 3, \dots, n-1, \\ \mathbf{g}_1 \mathbf{R}_1^0(\lambda) \mathbf{C}_1(\lambda) &= \mathbf{g}_2 \mathbf{R}_2(\lambda) \mathbf{C}_2(\lambda), \quad j = 1. \end{aligned} \quad (22)$$

З співвідношень (22) випливають рівності

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{j+1}(\lambda) &= \mathbf{R}_j^{-1}(\lambda) \mathbf{g}_{j+1}^{-1} \mathbf{g}_j \mathbf{R}_j(\lambda) \mathbf{C}_j(\lambda), \quad j = 2, 3, \dots, n-1, \\ \mathbf{C}_2(\lambda) &= \mathbf{R}_2^{-1}(\lambda) \mathbf{g}_2^{-1} \mathbf{g}_1 \mathbf{R}_1^0(\lambda) \mathbf{C}_1(\lambda), \quad j = 1, \end{aligned} \quad (23)$$

які запишемо у матричній формі:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{j+1}(\lambda) &= \Omega_j(\lambda) \mathbf{C}_j(\lambda), \quad j = 2, 3, \dots, n-1, \\ \mathbf{C}_2(\lambda) &= \Omega_1^0(\lambda) \mathbf{C}_1(\lambda), \quad j = 1, \end{aligned} \quad (24)$$

де

$$\Omega_1^0(\lambda) = \mathbf{R}_2^{-1}(\lambda) \mathbf{g}_2^{-1} \mathbf{g}_1 \mathbf{R}_1^0(\lambda), \quad \Omega_j(\lambda) = \mathbf{R}_j^{-1}(\lambda) \mathbf{g}_{j+1}^{-1} \mathbf{g}_j \mathbf{R}_j(\lambda). \quad (25)$$

Матрицю $\Omega_1^0(\lambda)$ після обчислення обернених матриць подамо за компонентами:

$$\begin{aligned} \Omega_1^0(\lambda) &= \begin{pmatrix} \Phi_{11}^0(\lambda) & \Phi_{12}^0(\lambda) \\ \Phi_{21}^0(\lambda) & \Phi_{22}^0(\lambda) \end{pmatrix} = \frac{\sin \omega_1}{\lambda_2 + 1/4} \begin{pmatrix} Q_v^2(\omega_1) & -G_1^* \operatorname{Re} Q_v^1(\cos \omega_1) \\ -P_v^2(\omega_1) & G_1^* P_v^1(\cos \omega_1) \end{pmatrix}, \\ G_1^* &= \frac{G_1}{G_2}. \end{aligned} \quad (26)$$

При виведенні формули (26) застосовано співвідношення (3.4 (25)) з [19]. Подання (26) дозволяє записати рекурентні формули

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_2(\lambda) &= \Omega_1^0(\lambda) \begin{pmatrix} P_v^1(\cos \omega_1) \\ P_v^2(\cos \omega_1) \end{pmatrix} \mathbf{C}_1(\lambda), \\ \mathbf{C}_{j+1}(\lambda) &= \Omega_j(\lambda) \mathbf{C}_j(\lambda), \quad j = 2, 3, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (27)$$

Отже, для невідомого вектора сталих n -го шару отримано

$$\mathbf{C}_n(\lambda) = \Omega_{n-1}(\lambda) \Omega_{n-2}(\lambda) \dots \Omega_2(\lambda) \Omega_1^0(\lambda) \begin{pmatrix} P_v^1(\cos \omega_1) \\ P_v^2(\cos \omega_1) \end{pmatrix} \mathbf{C}_1(\lambda) \quad (28)$$

або, якщо ввести матрицю

$$\Phi_n(\lambda) = \Omega_{n-1}(\lambda) \Omega_{n-2}(\lambda) \dots \Omega_2(\lambda) \Omega_1^0(\lambda), \quad (29)$$

то рекурентне співвідношення, що зв'язує вектор невідомих сталих n -го шару з вектором першого шару, набуває вигляду

$$\mathbf{C}_n(\lambda) = \Phi_n(\lambda) \begin{pmatrix} P_v^1(\cos \omega_1) \\ P_v^2(\cos \omega_1) \end{pmatrix} \mathbf{C}_1(\lambda). \quad (30)$$

Для того щоб завершити розв'язання одновимірної крайової задачі (15), потрібно задовольнити крайову умову на n -му шарі. Для цього використаємо подання (21) і (30):

$$\begin{aligned} C_1^0(\lambda) &= [G_n \Delta_n(\lambda)]^{-1} q_1^0, \\ \Delta_n(\lambda) &= P_v^1(\cos \omega_1) [\tilde{\Phi}_{11}(\lambda) P_v^2(\cos \omega_n) + \tilde{\Phi}_{21}(\lambda) \operatorname{Re} Q_v^2(\cos \omega_n)] + \\ &+ P_v^2(\cos \omega_1) [\tilde{\Phi}_{12}(\lambda) P_v^2(\cos \omega_n) + \tilde{\Phi}_{22}(\lambda) \operatorname{Re} Q_v^2(\cos \omega_n)]. \end{aligned} \quad (31)$$

За формулою (27) отримаємо $C_2(\lambda)$, а за формулами (25), (29) і (30) побудуємо решту векторів коефіцієнтів $C_j(\lambda)$, $j = 3, 4, \dots, n$.

Підстановка цих виразів у співвідношення (16) і застосування оберненого інтегрального перетворення (14) завершує побудову точного розв'язку крайової задачі (8)–(11).

Побудова розв'язку задачі для вільної від напружень сферичної поверхні. Якщо торець пружного конуса є вільним від напружень, то для нової функції u_j (7) умова (6) на поверхні $r = a$ записується у формі (12). Для розв'язання крайової задачі (8)–(10), (12) застосуємо інтегральне перетворення Попова

$$u_{j,\lambda}(\theta) = \int_0^{\infty} u_j(\xi, \theta) \varphi_\lambda(\xi) d\xi \quad (32)$$

з формулою обернення

$$u_j(\xi, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varphi_\lambda(\xi) u_{j,\lambda}(\theta)}{\sqrt{\lambda}(\lambda + 9/4)} d\lambda, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (33)$$

де

$$\varphi_\lambda(\xi) = \frac{3}{2} \sin(\xi\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda} \cos(\xi\sqrt{\lambda}) \quad (34)$$

($\varphi_\lambda(\xi)$ – розв'язок рівняння $\varphi_\lambda''(\xi) + \lambda\varphi_\lambda(\xi) = 0$ при умові $\varphi_\lambda'(0) - 3/2\varphi_\lambda(0) = 0$).

Застосуємо інтегральне перетворення (32) до рівняння (8), яке у результаті буде перетворено на рівняння (15), де λ^2 потрібно замінити на λ . Тоді загальний розв'язок рівняння для j -го шару набуде вигляду

$$\begin{aligned} u_{j,\lambda}(\theta) &= C_j^0(\lambda) P_{\tilde{v}}^1(\cos \theta) + C_j^1(\lambda) \operatorname{Re} Q_{\tilde{v}}^1(\cos \theta), \quad \omega_{j-1} < \theta < \omega_j, \\ & \quad j = 2, 3, \dots, n-1, \\ u_{1,\lambda}(\theta) &= C_1^0(\lambda) P_{\tilde{v}}^1(\cos \theta), \end{aligned} \quad (35)$$

де $\tilde{v} = -\frac{1}{2} - i\sqrt{\lambda}$, C_j^i , $i = 0, 1$, – невідомі сталі розв'язків для j -го шару.

Застосування інтегрального перетворення (32) дозволяє автоматично задовольнити умову (12). Умови спряження і гранична умова на зовнішній поверхні задачі (15) зберігаються попередніми, але скрізь потрібно брати \tilde{v} замість v та замінити вираз q_λ^0 на вираз

$$q_\lambda^1 = \int_0^{\infty} (ae^\xi)^{3/2} q(ae^\xi) \varphi_\lambda(\xi) d\xi. \quad (36)$$

Решта міркувань стосовно відшукування невідомих констант залишається незмінною, і всі попередні формули залишаються правильними при заміні \bar{v} на \tilde{v} та формули оберненого перетворення (14) на формулу (33).

Побудова розв'язків поставлених задач для зрізаного конуса та деталізація для часткових випадків шаруватості. Оскільки всі коефіцієнти $C_j(\lambda)$, $j = 1, \dots, n$, у формулі (16) для трансформант переміщень знайдено, остаточну формулу для переміщень j -го шару у випадку защемленого торця конуса запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} u_j(\xi, \theta) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [C_j^0(\lambda) P_{\tilde{v}}^1(\cos \theta) + C_j^1(\lambda) \operatorname{Re} Q_{\tilde{v}}^1(\cos \theta)] \sin \lambda \xi d\lambda, \quad j = 2, 3, \dots, n, \\ u_1(\xi, \theta) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} C_1^0(\lambda) P_{\tilde{v}}^1(\cos \theta) \sin \lambda \xi d\lambda, \quad \bar{v} = -\frac{1}{2} - i\lambda. \end{aligned} \quad (37)$$

Подібно у випадку вільного від напружень торця конуса, використовуючи формулу обернення (33), маємо формули

$$u_j(\xi, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi_\lambda(\xi) [C_j^0(\lambda) P_{\tilde{\nu}}^1(\cos \theta) + C_j^1(\lambda) Q_{\tilde{\nu}}^1(\cos \theta)]}{\sqrt{\lambda} (\lambda + 9/4)} d\lambda, \quad j = 2, 3, \dots, n,$$

$$u_1(\xi, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi_\lambda(\xi) C_1^0(\lambda) P_{\tilde{\nu}}^1(\cos \theta)}{\sqrt{\lambda} (\lambda + 9/4)} d\lambda, \quad \tilde{\nu} = -\frac{1}{2} - i\sqrt{\lambda}. \quad (38)$$

Конкретизуємо зовнішнє навантаження, яке діє уздовж конічної поверхні $\theta = \omega_n$, прийнявши його у вигляді

$$q(r) = 0, \quad r < c, \quad q(r) = q, \quad c \leq r \leq d, \quad q(r) = 0, \quad r > d, \quad (39)$$

де $c > a$.

За умови такого навантаження формули для визначення виразів q_λ^0 та q_λ^1 (575.1, 576.1 [19]) можна звести до вигляду

$$q_\lambda^0 = \frac{a^{3/2} q [g_d^0(\lambda) - g_c^0(\lambda)]}{2(\lambda^2 + 9/4)}, \quad q_\lambda^1 = a^{3/2} q \sqrt{\lambda} [g_d^1(\lambda) - g_c^1(\lambda)], \quad (40)$$

де

$$g_\gamma^0(\lambda) = \exp\left(\ln \frac{\gamma}{a}\right) \left[3 \sin\left(\lambda \ln \frac{\gamma}{a}\right) - 2\lambda \cos\left(\lambda \ln \frac{\gamma}{a}\right) \right],$$

$$g_\gamma^1(\lambda) = \exp\left(\frac{3}{2} \ln \frac{\gamma}{a}\right) \sin\left(\sqrt{\lambda} \ln \frac{\gamma}{a}\right).$$

Розглянемо випадок, коли шаруватість відсутня. Невідомим коефіцієнтом в цьому разі є тільки один коефіцієнт $C(\lambda)$, який знаходимо з крайової умови на конічній поверхні $\theta = \omega_n = \omega$.

Якщо конус защемлений по сферичній поверхні, то остаточна формула, яка визначає переміщення суцільного зрізаного конуса, має вигляд

$$u(\xi, \theta) = \frac{2}{\pi G} \int_0^\infty \frac{q_\lambda^0 P_{\tilde{\nu}}^1(\cos \theta) \sin \xi d\lambda}{P_{\tilde{\nu}}^2(\cos \omega)} =$$

$$= \frac{a^{3/2} q}{\pi G} \int_0^\infty \frac{[g_d^0(\lambda) - g_c^0(\lambda)] P_{\tilde{\nu}}^1(\cos \theta) \sin \lambda \xi d\lambda}{(\lambda^2 + 9/4) P_{\tilde{\nu}}^2(\cos \omega)},$$

$$0 < \xi < \infty, \quad 0 < \theta < \omega. \quad (41)$$

Якщо торець конуса вільний від напружень, то переміщення визначаємо за формулою

$$u(\xi, \theta) = \frac{a^{3/2} q}{\pi G} \int_0^\infty \frac{\varphi_\lambda(\xi) [g_d^1(\lambda) - g_c^1(\lambda)] P_{\tilde{\nu}}^1(\cos \theta)}{(\lambda + 9/4) P_{\tilde{\nu}}^2(\cos \omega)} d\lambda,$$

$$0 \leq \xi < \infty, \quad 0 < \theta < \omega. \quad (42)$$

Використовуючи властивості функцій Лежандра [19], можна показати, що $P_{\tilde{\nu}}^2(\cos \omega) > 0$, $P_{\tilde{\nu}}^2(\cos \omega) > 0$. За формулами переміщень (41), (42), враховуючи формули переходу (7), визначаємо дотичні напруження (2):

$$\tau_{r\varphi}(r, \omega) = \tau_{r\varphi}(ae^\xi, \omega) = G(ae^\xi)^{-3/2} [u'(\xi, \omega) - 3/2 u(\xi, \omega)]. \quad (43)$$

Для конуса, защемленого по торцю, маємо такий вираз для дотичних напружень:

$$\begin{aligned}\tau_{r\varphi}(r, \omega) &= \tau_{r\varphi}(ae^\xi, \omega) = \\ &= \frac{q}{\pi} \int_0^\infty \frac{P_v^1(\cos \omega)[g_d^0(\lambda) - g_c^0(\lambda)][\lambda \cos \lambda \xi - 3/2 \sin \lambda \xi] d\lambda}{P_v^2(\cos \omega)(\lambda^2 + 9/4)}.\end{aligned}\quad (44)$$

Для конуса з торцем, вільним від навантаження, формула для напружень відповідно має такий вигляд:

$$\tau_{r\varphi}(ae^\xi, \omega) = -\frac{q}{\pi} \int_0^\infty \frac{P_v^1(\cos \omega)[g_d^1(\lambda) - g_c^1(\lambda)] \sin(\xi\sqrt{\lambda})}{P_v^2(\cos \omega)} d\lambda.\quad (45)$$

Розглянемо випадок, коли конус складається з двох шарів, $n = 2$.

Якщо торець конуса защемлений, то на підставі (37), враховуючи формули переходу (7), для переміщень отримаємо

$$\begin{aligned}u_1(\xi, \theta) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty C_1^0(\lambda) P_v^1(\cos \theta) \sin \lambda \xi d\lambda, & 0 \leq \xi < \infty, & \quad 0 \leq \theta \leq \omega_1, \\ u_2(\xi, \theta) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [C_2^0(\lambda) P_v^1(\cos \theta) + C_2^1(\lambda) \operatorname{Re} Q_v^1(\cos \theta)] \sin \lambda \xi d\lambda, \\ & & \omega_1 < \theta < \omega_2.\end{aligned}\quad (46)$$

Коефіцієнт $C_1^0(\lambda)$ визначаємо за формулою (31), роль матриці $\Phi_n(\lambda)$ відповідно до (27) буде виконувати матриця (26). Як результат, отримаємо

$$C_1^0(\lambda) = \frac{q_\lambda^0(\lambda^2 + 1/4)}{G_2 \sin \omega_1 \tilde{\Delta}_2^0(\lambda)},\quad (47)$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_2^0(\lambda) &\equiv P_v^2(\cos \omega_1)[P_v^2(\cos \omega_2) \operatorname{Re} Q_v^2(\cos \omega_1) - P_v^2(\cos \omega_1) \operatorname{Re} Q_v^2(\cos \omega_2)] + \\ &+ G_1^* P_v^2(\cos \omega_1)[P_v^1(\cos \omega_1) \operatorname{Re} Q_v^2(\cos \omega_2) - \\ &- P_v^2(\cos \omega_2) \operatorname{Re} Q_v^1(\cos \omega_1)].\end{aligned}\quad (48)$$

Використовуючи формулу (27) та взявши до уваги співвідношення (26) та (47), матимемо

$$\begin{aligned}C_2(\lambda) &= \frac{q_\lambda^0}{G_2 \tilde{\Delta}_2^0(\lambda)} \times \\ &\times \left(\frac{P_v^1(\cos \omega_1) \operatorname{Re} Q_v^2(\cos \omega_1) - G_1^* P_v^2(\cos \omega_1) \operatorname{Re} Q_v^1(\cos \omega_1)}{(G_1^* - 1) P_v^2(\cos \omega_1) P_v^1(\cos \omega_1)} \right).\end{aligned}\quad (49)$$

Застосуємо формули для переміщень (46) з урахуванням виразів для визначення сталих (40), (47), (49):

$$\begin{aligned}u_2(\xi, \theta) &= \frac{a^{3/2} q}{\pi G_2} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda \xi [g_d^0(\lambda) - g_c^0(\lambda)]}{(\lambda^2 + 9/4) \tilde{\Delta}_2^0(\lambda)} Q_\lambda(\theta, \omega_1) d\lambda, \\ & & 0 < \xi < \infty, & \quad \omega_1 < \theta < \omega_2,\end{aligned}\quad (50)$$

де

$$\begin{aligned}
Q_\lambda(\theta, \omega_1) &= P_{\bar{v}}^1(\cos \theta) [P_{\bar{v}}^1(\cos \omega_1) \operatorname{Re} Q_{\bar{v}}^2(\cos \omega_1) - \\
&\quad - G_1^* P_{\bar{v}}^2(\cos \omega_1) \operatorname{Re} Q_{\bar{v}}^1(\cos \omega_1)] - \\
&\quad - \operatorname{Re} Q_{\bar{v}}^1(\cos \theta) (1 - G_1^*) P_{\bar{v}}^1(\cos \omega_1) P_{\bar{v}}^2(\cos \omega_1). \quad (50')
\end{aligned}$$

Напруження, що відповідають переміщенням (50) цього шару, відповідно запишемо так:

$$\begin{aligned}
\tau_{r\varphi}^{(2)}(ae^\xi, \omega_2) &= \frac{(ae^{-\xi})^{3/2} q}{\pi} \times \\
&\quad \times \int_0^\infty \frac{[\lambda \cos \lambda \xi - 3/2 \sin \lambda \xi] [g_d^0(\lambda) - g_c^0(\lambda)] Q_\lambda(\omega_2, \omega_1) d\lambda}{(\lambda^2 + 9/4) \tilde{\Delta}_2^0(\lambda)}. \quad (51)
\end{aligned}$$

У випадку, коли сферичний торець конуса є вільним від напружень, переміщення будуть визначатися відповідно до формул (38) за виразами:

$$\begin{aligned}
u_1(\xi, \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi_\lambda(\xi) C_1^0(\lambda) P_{\bar{v}}^1(\cos \theta)}{\sqrt{\lambda} (\lambda + 9/4)} d\lambda, \quad 0 < \xi < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \omega_1, \\
u_2(\xi, \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi_\lambda(\xi) [C_2^0(\lambda) P_{\bar{v}}^1(\cos \theta) + C_2^1(\lambda) \operatorname{Re} Q_{\bar{v}}^1(\cos \theta)] d\lambda}{\sqrt{\lambda} (\lambda + 9/4)}, \quad \omega_1 \leq \theta \leq \omega_2. \quad (52)
\end{aligned}$$

Повторюючи схему міркувань, що була використана під час отримання формули (47), матимемо

$$C_1^0(\lambda) = \frac{q_\lambda^1 (\lambda + 1/4)}{G_2 \sin \omega_1 \tilde{\Delta}_2^0(\lambda)}, \quad (53)$$

де $\tilde{\Delta}_\lambda^0$ визначається за формулою (47), у якій параметр \bar{v} потрібно замінити на параметр \tilde{v} . Відповідно до цього зміниться і формула (26), яка перетвориться на вираз

$$\Omega_1^0(\lambda) = \frac{\sin \omega_1}{\lambda + 1/4} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} Q_{\bar{v}}^2(\cos \omega_1) & -\operatorname{Re} Q_{\bar{v}}^1(\cos \omega_1) G_1^* \\ -P_{\bar{v}}^2(\cos \omega_1) & P_{\bar{v}}^1(\cos \omega_1) G_1^* \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Формулу для переміщень першого шару з (52) подамо у вигляді

$$\begin{aligned}
C_2(\lambda) &= \frac{q_\lambda^1}{G_2 \tilde{\Delta}_2^0(\lambda)} \times \\
&\quad \times \begin{pmatrix} P_{\bar{v}}^1(\cos \omega_1) \operatorname{Re} Q_{\bar{v}}^2(\cos \omega_1) - G_1^* P_{\bar{v}}^2(\cos \omega_1) \operatorname{Re} Q_{\bar{v}}^1(\cos \omega_1) \\ (G_1^* - 1) P_{\bar{v}}^2(\cos \omega_1) P_{\bar{v}}^1(\cos \omega_1) \end{pmatrix}. \quad (55)
\end{aligned}$$

Після підстановки коефіцієнтів (53), (55) у вираз (52) для переміщень другого шару отримуємо

$$u_2(\xi, \theta) = \frac{1}{\pi G_2} \int_0^\infty \frac{\varphi_\lambda(\xi) q_\lambda^1 \tilde{Q}_\lambda(\theta, \omega_1) d\lambda}{\sqrt{\lambda} (\lambda + 9/4) \tilde{\Delta}_2^0(\lambda)}. \quad (56)$$

Вираз $\tilde{Q}_\lambda(\theta, \omega_1)$ визначаємо за формулою (50'), де замість параметра \bar{v} слід брати параметр \tilde{v} . Остаточно, за формулою для переміщень (56) маємо таку формулу для визначення напружень другого шару:

$$\tau_{r\varphi}^{(2)}(r, \omega_2) = \tau_{r\varphi}^{(2)}(ae^\xi, \omega_2) = \frac{(ae^\xi)^{-3/2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{q_\lambda^1 \sin(\xi\sqrt{\lambda}) \tilde{Q}_\lambda(\omega_2, \omega_1) d\lambda}{\sqrt{\lambda} (\lambda + 9/4) \tilde{\Delta}_2^0(\lambda)}.$$

Числові результати та їх обговорення. Розрахунки було виконано для конуса, що складається з двох шарів. До зовнішньої поверхні $a < r < \infty$, $\theta = \omega_2$ прикладене навантаження (39). Виконано обчислення величини $\Upsilon_1 = \frac{\tau_{\theta\varphi}(r, \omega_1)}{q(r)}$ для різних співвідношень розмірів шарів із різними модулями зсуву.

З наведених у табл. 1 даних бачимо, що у випадку, коли модуль зсуву зовнішнього шару є меншим від модуля зсуву внутрішнього шару ($G_* = G_1/G_2 = 2$), зростання розміру внутрішнього шару приводить до зменшення величини Υ_1 .

Таблиця 1. Значення Υ_1 при $G_* = 2$.

Розміри шарів	$r/a = 5$	$r/a = 10$	$r/a = 15$	$r/a = 20$
$\omega_1 = \frac{\pi}{6}, \omega_2 = \frac{\pi}{4}$	1.1006	1.0093	0.7683	0.6475
$\omega_1 = \frac{\pi}{4}, \omega_2 = \frac{\pi}{3}$	1.0103	0.9983	0.6288	0.4753

Якщо зовнішній шар має більший за величиною модуль зсуву, ніж внутрішній шар ($G_* = G_1/G_2 = 1/2$), то, як впливає з даних табл. 2, зі зростанням розміру зовнішнього шару відмічається зростання величини Υ_1 .

Таблиця 2. Значення Υ_1 при $G_* = 1/2$.

Розміри шарів	$r/a = 5$	$r/a = 10$	$r/a = 15$	$r/a = 20$
$\omega_1 = \frac{\pi}{6}, \omega_2 = \frac{\pi}{4}$	1.8413	1.6237	1.3908	1.0004
$\omega_1 = \frac{\pi}{4}, \omega_2 = \frac{\pi}{3}$	1.9716	1.8211	1.4213	1.2112

Висновки.

- Отримано явний розв'язок задачі про кручення зрізаного нескінченного конічно-шаруватого конуса.
- Встановлено залежність величини напружень від відношення модулів зсувів шарів для випадку двошарового конуса.
- Запропонований підхід можна використати для розв'язання осесиметричної задачі для шаруватого пружного конуса.
- Підхід можна застосувати при розв'язуванні задач для функціонально-градієнтних середовищ шляхом апроксимації їх шаруватим середовищем, пружні сталі якого стрибкоподібно змінюються. За рахунок того, що кількість рівнянь для визначення констант розв'язку диференціального рівняння задачі не залежить від кількості шарів, апроксимацію вихідної задачі можна уточнювати, збільшуючи кількість шарів.

1. Айзикович С. М., Александров В. М., Васильев А. С., Кренин Л. И., Трубчик И. С. Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 192 с.
2. Babeshko V. A., Babeshko O. M., Evdokimova O. V. К теории блочного элемента // Докл. РАН. – 2009. – 427, № 2. – С. 183–186.
 The same: Babeshko V. A., Babeshko O. M., Evdokimova O. V. On the theory of a block element // Doklady Physics. – 2009. – 54, No. 7. – P. 329–332.

3. Будаев Б. В., Морозов Н. Ф., Нарбут М. А. Кручение кругового конуса при статическом и динамическом нагружении // Прикл. математика и механика. – 1994. – **58**, № 6. – С. 152–155.
4. Вайсфельд Н. Д., Мойсеев О. П. Антиплоская деформация клиношароватого середовища // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2013. – Вип. 3. – С. 89–93.
5. Вайсфельд Н. Д., Попов Г. Я., Реут А. В. Осесимметричная задача о напряженном состоянии дважды усеченного конуса // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 1. – С. 185–196.
6. Ватульян А. О. Тепловой удар по термоэластичному слою // Вестн. Донск. гос. техн. ун-та. – 2001. – **1**, № 1. – С. 82–88.
7. Калинин В. В., Белянкова Т. И. Динамика поверхности неоднородных сред. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 312 с.
8. Куриляк Д. Б., Назарчук З. Т. Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на кінцевих і клиноподібних поверхнях. – Київ: Наук. думка, 2006. – 280 с.
9. Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М. Квазистатичні температурні напруження в багатослойовому термочутливому циліндрі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 4. – С. 7–16.
Te same: Kushnir R. M., Protsyuk B. V., Synyuta V. M. Quasistatic temperature stresses in a multiplayer thermally sensitive cylinder // Mater. Sci. – 2004. – **40**, No. 4. – P. 433–445.
10. Мехтиев М. Ф., Сардарова Н. А., Фомина Н. И. Асимптотическое поведение решения осесимметричной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного полого конуса // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 2. – С. 61–70.
Te same: Mekhtiev M. F., Sardarova N. A., Fomina N. I. Asymptotic behavior of the solution of an axially symmetric elasticity problem for a transversely isotropic hollow cone // Mech. Solids. – 2003. – **38**, No. 2. – P. 49–56.
11. Никитин В. С., Шапиро Г. С. Задачи теории упругости для многослойных сред. – Москва: Наука, 1973. – 131 с.
12. Петришин В. И., Приварников А. К., Шевляков Ю. А. К решению задач для многослойных оснований // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – № 2. – С. 138–143.
13. Попов Г. Я. К решению краевых задач механики и математической физики для слоистых сред // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1978. – **31**, № 2. – С. 58–72.
14. Попов Г. Я., Грибняк С. Т. Об одном способе решения задач механики для слоистых сред // Прикл. механика. – 1980. – **16**, № 10. – С. 68–74.
Te same: Popov G. Ya., Gribnyak S. T. Solving problems in mechanics for layered media // Int. Appl. Mech. – 1980. – **16**, No. 10. – P. 890–895.
15. Пряхина О. Д., Смирнова А. В. К постановке динамических смешанных задач для слоистых сред с дефектами // Изв. ВУЗов. Сев.-Кавказ. Регион. Сер. Естеств. науки. – 2003. – № 2. – С. 29–31.
16. Раппопорт Р. М. К вопросу о построении решений осесимметричной и плоской задач теории упругости многослойной среды // Изв. Всесоюз. НИИ гидротехники им. Б. Е. Веденеева. – 1963. – **73**. – С. 193–204.
17. Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. – Ереван: Ереванск. ун-т, 1976. – 536 с.
18. Улитко А. Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости. – Киев: Академперіодика, 2002. – 341 с.
19. Bateman H., Erdélyi A. Higher transcendental functions. Vol. 1. – New York: McGraw-Hill, 1953. – 212 p.
20. Birk C., Behnke R. A modified scaled boundary finite element method for three-dimensional dynamic soil-structure interaction in layered soil // Int. J. Numer. Methods Eng. – 2012. – **89**, No. 3. – P. 371–402.
21. Kui-Seob Kim, Naotake Noda. Green's function approach to solution of transient temperature for thermal stresses of functionally graded material // JSME Int. J. Ser. A. – 2001. – **44**, No. 1. – P. 31–36.
22. Kulchytsky-Zhyhailo R. D., Yevtushenko A. A. Approximate method for analysis of the contact temperature and pressure due to frictional load in an elastic layered medium // Int. J. Solids Struct. – 1998. – **35**, No. 3. – P. 319–329.
23. Mykhas'kiv V. V., Khay O. M., Zhang Ch., Boström A. Effective dynamic properties of 3D composite materials containing rigid penny-shaped inclusion // Waves Random Complex Media. – 2010. – **20**, No. 3. – P. 491–510.

24. Nowacki W. Teoria sprężystości. – Warszawa: Państw. Wyd-wo Nauk., 1970. – 362 s.
Те саме: Новацкий В. Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
25. Stephens L. S., Liu Yan, Meletis E. I. Finite element analysis of the initial yielding behavior of a hard coating/substrate system with functionally graded interface under indentation and friction // Trans. ASME. J. Tribol. – 2000. – **122**, No. 2. – P. 381–387.
26. Vaysfel'd N., Popov G. The steady-state oscillations of the elastic infinite cone loaded at a vertex by a concentrated force // Acta Mech. – 2011. – **221**, No. 3-4. – P. 261–270.
27. Vaysfel'd N., Popov G. The torsion of the conical layered elastic cone// Acta Mech. – 2013. – DOI:10.1007/s00707-013-0957-4.

КРУЧЕНИЕ УСЕЧЕННОГО КОНИЧЕСКИ-СЛОИСТОГО УПРУГОГО КОНУСА

Получено точное решение задачи о кручении усеченного конически-слоистого упругого конуса. Упругие постоянные слоев скачкообразно меняются на конических поверхностях. Внешняя коническая поверхность загружена касательными крутильными напряжениями. Торец конуса либо зацелмен, либо свободен от напряжений. Между слоями конуса выполняются условия идеального контакта. Решение построено с помощью интегрального преобразования, которое применено непосредственно к уравнению равновесия при кручении. Установлена рекуррентная зависимость между постоянными в решении дифференциального уравнения задачи для соседних слоев. Это дало возможность сделать количество уравнений для определения констант независимым от количества слоев. Метод детализирован для частных случаев слоистости, для которых установлена зависимость напряжений от соотношения модулей сдвига соседних слоев.

TORSION OF A TRUNCATED CONICAL-LAYERED ELASTIC CONE

The exact solution of the torsion problem for the elastic conical-layered truncated elastic cone is obtained. The elastic constants of the layers change step-wise on the conical surfaces. The external conical surface is loaded by the tangent torsion stresses. The edge of the cone is fixed or is free from the stresses. The conditions of perfect contact are fulfilled between the layers. The solution of the problem is constructed using the integral transform which is applied directly to the equation of equilibrium in torsion. The recurrent dependence is established between the constants in the solution of the problem's differential equation for the adjacent layers. It give us an opportunity to make the quantity of the equations for their determination independent from the layers' quantity. The method's detailed elaboration is proposed for some partial cases of stratification. The stress' dependence from the shear modulus of the adjacent layers is estimated.

Одеськ. нац. ун-т ім. І. І. Мечнікова, Одеса

Одержано
21.10.12