УДК 539.3

М. В. Марчук[1,2], В. С. Пакош[1], В. М. Харченко[3]

ВЛАСНІ ЧАСТОТИ ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИН-СМУГ З ПОДАТЛИВИМИ ДО ТРАНСВЕРСАЛЬНИХ ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ СКЛАДОВИМИ

На основі співвідношень варіанту уточненої теорії динамічного деформування композитних пластин запропонована математична модель процесу вільних коливань шаруватих пластин-смуг з податливими до трансверсальних зсуву та стиснення складовими. За шарнірного закріплення видовжених країв нижньої складової записано характеристичне рівняння. Отримано аналітичний вираз для спектра власних частот двошарової пластини-смуги. Проаналізовано вплив врахування дискретності будови за товщиною та податливості до трансверсального стиснення на їх значення.

Вступ. Шаруваті композитні пластини з регульованими характеристиками міцності та матеріаломісткості належать до поширених несучих елементів конструкцій і технічних засобів різноманітного цільового призначення. Дія на них інтенсивних динамічних, зокрема циклічних, навантажень зумовлює необхідність достовірної оцінки спектра власних частот з метою запобігання резонансним явищам в експлуатаційних умовах. Оскільки кожна із складових шарів має своє функціональне призначення (зокрема, одна із них може бути несучим елементом, а інші – виконувати роль тепло- та звукозахисного або ж антикорозійного покриття), то їхні пружні характеристики та товщини можуть суттєво відрізнятися. Визначення в такому випадку спектра власних частот шляхом використання співвідношень класичної або ж уточнених теорій пластин з віднесеними до товщини жорсткісними характеристиками [1, 2, 5] приводить до значних неточностей. Це зумовлює необхідність застосування підходу за дискретного розгляду шарів, що дає змогу більш адекватно врахувати особливості деформування кожного з них, особливо у випадку виготовлення їх із композиційних матеріалів. Найхарактернішою особливістю деформування тонкостінних елементів із сучасних армованих композитів на полімерній основі (як у статичному, так і в динамічному випадках) поряд з анізотропією пружних характеристик є податливість до трансверсальних зсуву та стиснення [5]. Необхідно відмітити також той факт, що на сьогодні відома незначна кількість праць, присвячених дослідженню коливань (як поперечних, так і поздовжніх) композитних пластин з одночасним урахуванням податливості до трансверсальних зсуву та стиснення, особливо для шаруватої за товщиною структури та при дискретному розгляді складових. Основну частину результатів отримано із застосування числових методів [6–9].

У цій статті запропоновано математичну модель процесу вільних поперечних коливань шаруватих пластин-смуг за дискретного розгляду їх складових. Для цього використано співвідношення варіанта уточненої теорії пластин, у яких явно враховано податливість до трансверсального зсуву та неявно – до стиснення [3] при одночасному виконанні граничних умов в напруженнях на лицевих площинах. На цій основі отримано аналітичний вираз для спектра власних частот двошарової пластини-смуги за умови шарнірного закріплення видовжених країв на нижній лицевій площині структури. Як частковий випадок записано вираз для спектра власних частот вільних поперечних коливань пластини-смуги з нанесеним на верхню лицеву площину тонким захисним покриттям [4]. Граничним переходом за параметрами, які характеризують співвідношення товщин складових, отримано вираз для спектра власних частот податливої до трансверсального зсуву та стиснення пластини-смуги. Подальші граничні переходи за параметрами податливості до трансверсальних стиснення та зсуву дозволили отримати відомі результати для виразів спектрів власних частот за використання теорій на основі зсувної моделі С. П. Тимошенка та класичної моделі Кірхгофа – Лява.

1. Постановка задачі. Розглянемо шарувату структуру довжини 2ℓ, що складається з n тонких композитних пластин зі зведеними фізико-механічними характеристиками та густинами ρ_i [2] і заданими товщинами h_i, $i = 1,\ldots,n$, відповідно (див. рис. 1). Якщо один із тангенціальних розмірів такої структури значно перевищує інший, то маємо шарувату пластину-смугу, характеристики напружено-деформованого стану якої можна вважати залежними лише від двох локальних координат кожної із складових.

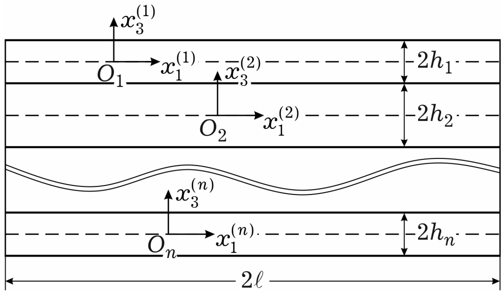

Рис. 1

Вважаємо, що між складовими пластини-смуги виконуються умови ідеального механічного контакту. Внаслідок дії на міжпластинній площині нормальних і тангенціальних контактних напружень за поперечних коливань такої структури кожна складова зазнає як згинних, так і поздовжніх деформацій. Коливний процес кожної пластини описуємо співвідношеннями варіанта уточненої теорії, яка дозволяє точно задовольнити граничні умови в напруженнях на лицевих площинах $x_3^{(i)} = \pm h_i$ [3]:

– *рівняннями рівноваги (руху)*

$$N_i' + 2\tau_i^- = 0, \qquad M_i' - Q_i + 2h_i\tau_i^+ = 0,$$

$$Q_i' + 2\sigma_i^- = 2\rho_i h_i \ddot{w}_i, \tag{1}$$

де

$$\tau_i^\pm = \frac{1}{2}[\sigma_{13}^{(i)}(x_1^{(i)}, h_i, t) \pm \sigma_{13}^{(i)}(x_1^{(i)}, -h_i, t)],$$

$$\sigma_i^- = \frac{1}{2}[\sigma_{33}^{(i)}(x_1^{(i)}, h_i, t) - \sigma_{33}^{(i)}(x_1^{(i)}, -h_i, t)], \qquad i = 1,\ldots,n;$$

– *співвідношеннями пружності*

$$N_i = \bar{B}_i \varepsilon_{1i}^0, \quad M_i = \bar{D}_i \bar{\varepsilon}_{1i}^1, \quad Q_i = \Lambda_i \varepsilon_{13i}^0, \quad i = 1,\ldots,n; \tag{2}$$

– *деформаційними співвідношеннями*

$$\varepsilon_{1i}^0 = u_i', \quad \bar{\varepsilon}_{1i}^1 = \varepsilon_{1i}^1/h = \gamma_i', \quad \varepsilon_{13i}^0 = \gamma_i + w_i', \quad i = 1,\ldots,n. \tag{3}$$

Штрихом позначено похідну за координатою $x_1^{(i)}$, а крапкою – за t. У рівняннях (1)–(3) вжито загальноприйняті позначення для розтягувальних N_i та перерізувальних Q_i зусиль, згинних моментів M_i в i-й складовій пластини, компонент тензорів напружень $\sigma_{kn}^{(i)}$, $k = 1,3$, переміщень u_i точок серединної площини i-ї пластини в тангенціальному напрямку, кутів повороту γ_i нормальних до серединних площин елементів перед деформуванням, переміщень w_i точок серединної площини вздовж нормальної координати, поздовжньої ε_{1i}^0 та згинної $\bar{\varepsilon}_{1i}^1$ деформацій, деформації ε_{13i}^0

трансверсального зсуву, $\sigma_{k3}^{(i)}(x_1^{(i)}, \pm h_i, t)$, $k = 1,3$, − напруження на лицевих площинах i-ї пластини, а також для введених жорсткісних характеристик пластин: $\bar{B}_i = 2E_i h_i (1+\alpha_i)/3(1-\nu_i^2)$ − узагальненої жорсткості на розтяг, $\bar{D}_i = h_i^2 \bar{B}_i/3$ − узагальненої згинної жорсткості, $\Lambda_i = 2k' h_i G_i'$ − зсувної жорсткості, $\alpha_i = ((1+\nu_i)(\nu_i')^2/(1-\nu-2\nu\nu'))(E_i/E_i')$, E_i, ν_i, − модулів Юнга та коефіцієнтів Пуассона в серединній та еквідистантній до неї площинах, E_i', ν_i' − тих самих величин у площинах, перпендикулярних до серединної, G_i' − трансверсальних модулів зсуву, $k' = 14/15$.

Крайові умови на кінцях $x = \pm \ell$ для шарнірного закріплення нижньої пластини вздовж видовжених сторін на нижній лицевій поверхні мають вигляд

$$N_i(\pm \ell, t) = 0, \qquad M_i(\pm \ell, t) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

$$Q_i(\pm \ell, t) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n-1, \qquad w_n(\pm \ell, -h_n, t) = 0. \tag{4}$$

За вільних коливань розглянутої шаруватої структури на її лицевих площинах маємо

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1^{(1)}, h_1, t) = \sigma_{33}^{(1)}(x_1^{(1)}, h_1, t) = 0,$$

$$\sigma_{13}^{(n)}(x_1^{(n)}, -h_n, t) = \sigma_{33}^{(n)}(x_1^{(n)}, -h_n, t) = 0. \tag{5}$$

Сумістимо початки O_i координатних осей $O_i x_1^{(i)}$ на одній нормалі до лицевих площин складових, тобто покладемо $x_1^{(i)} = x_1$, $i = 1, \ldots, n$. Тоді наслідком умов ідеального механічного контакту між пластинами будуть співвідношення:

$$\sigma_{13}^{(i)}(x_1, -h_i, t) = \sigma_{13}^{(i+1)}(x_1, h_{i+1}, t) = \tau_i(x_1, t),$$

$$\sigma_{33}^{(i)}(x_1, -h_i, t) = \sigma_{33}^{(i+1)}(x_1, h_{i+1}, t) = \sigma_i(x_1, t), \qquad i = 1, \ldots, n-1, \tag{6}$$

$$u_i(x_1, -h_i, t) = u_{i+1}(x_1, h_{i+1}, t),$$

$$w_i(x_1, -h_i, t) = w_{i+1}(x_1, h_{i+1}, t), \qquad i = 1, \ldots, n-1. \tag{7}$$

Рівняння руху (1) після підстановки в них співвідношень (5) та (6) набувають вигляду

$$N_1' - \tau_1 = 0, \quad N_i' + \tau_{i-1} - \tau_i = 0, \quad i = 2, \ldots, n-1, \quad N_n' + \tau_{n-1} = 0,$$

$$M_1' - Q_1 + h_1 \tau_1 = 0, \quad M_i' - Q_i + h_i(\tau_{i-1} + \tau_i) = 0, \quad i = 2, \ldots, n-1,$$

$$M_n' - Q_n + h_n \tau_{n-1} = 0,$$

$$Q_1' - \sigma_1 = 2\rho_1 h_1 \ddot{w}_1, \qquad Q_i' + \sigma_{i-1} - \sigma_i = 2\rho_i h_i \ddot{w}_i, \qquad i = 2, \ldots, n-1,$$

$$Q_n' + \sigma_{n-1} = 2\rho_n h_n \ddot{w}_n. \tag{8}$$

Оскільки на лицевих площинах кожної з пластин згідно з використовуваним варіантом уточненої теорії тангенціальні u_i та нормальні w_i переміщення визначаються за формулами [3]

$$u_i(x_1, \pm h_i, t) = u_i(x_1, t) \pm h_i \gamma_i(x_1, t),$$

$$w_i(x_1, \pm h_i, t) = w_i(x_1, t), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

то з рівностей (7) знаходимо

$$u_i = u_{i-1} - h_{i-1}\gamma_{i-1} - h_i\gamma_i, \qquad i = 2\ldots,n,$$

$$w_i = w, \qquad i = 1,\ldots,n. \tag{9}$$

Рівняння (8) разом зі співвідношеннями (2), (3), (9) і крайовими умовами (4) складають математичну модель процесу вільних малих поперечних коливань шаруватої пластини-смуги. Податливість матеріалу i-ї складової до трансверсального стиснення враховуємо в цій моделі через наявні у виразах для їх жорсткісних характеристик коефіцієнти α_i, що залежать від пружних сталих E_i' та ν_i'.

2. Побудова розв'язку задачі. Співвідношення (9) дають можливість виключити із рівнянь рівноваги (8) контактні міжшарові напруження τ_i, σ_i та отримати систему $n+1$ розв'язувальних рівнянь для відшукання функцій кутів поворотів γ_i у кожній складовій і загального прогину w:

$$\gamma_i'' - æ_i^2\gamma_i + \beta_i u_i'' + 2\sum_{k=1}^{i-1}\beta_{ik}u_k'' = æ_i^2 w',$$

$$w'' - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\gamma_i' = \frac{1}{c^2}\ddot{w}, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

де

$$\lambda_i = \frac{\Lambda_i}{\Lambda}, \qquad æ_i^2 = \frac{\Lambda_i}{\bar{D}_i}, \qquad \beta_i = \frac{3\bar{B}_i}{B},$$

$$\beta_{ij} = \frac{h_j}{h_i}\frac{\bar{B}_j}{B}, \qquad i,j = 1,\ldots,n,$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{2}{\Lambda}\sum_{i=1}^{n}\rho_i h_i, \qquad \Lambda = \sum_{i=1}^{n}\Lambda_i, \qquad B = \sum_{i=1}^{n}B_i.$$

У випадку $n = 2$ ця система рівнянь набуде вигляду

$$(1+\beta_1)\gamma_1'' - æ_1^2 + \beta_{12}\gamma_2'' = æ_1^2 w',$$

$$\beta_{21}\gamma_1'' + (1+\beta_2)\gamma_2'' - æ_2^2\gamma_2 = æ_2^2 w',$$

$$\lambda_1\gamma_1^1 + \lambda_2\gamma_2^1 + w'' = \frac{1}{c^2}\ddot{w}. \tag{10}$$

Якщо шукані функції w та γ_1, γ_2 подати у вигляді

$$w(x,t) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} w_m \cos\varphi_m x\right)e^{i\omega t},$$

$$\gamma_i(x,t) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{im} \sin\varphi_m x\right)e^{i\omega t}, \qquad i = 1,2, \tag{11}$$

$$\varphi_m = \frac{2m+1}{2}\frac{\pi}{\ell},$$

то задовольнимо крайові умови (4). Після підстановки (11) в (10) отримуємо нескінченну систему алгебричних рівнянь для визначення коефіцієнтів w_m, γ_{1m}, γ_{2m}, яка складається з незалежних підсистем третього порядку:

$$[(1+\beta_1)\varphi_m^2 + æ_1^2]\gamma_{1m} + \beta_{12}\varphi_m^2\gamma_{2m} = æ_1^2\varphi_m w_m,$$

$$\beta_{21}\varphi_m^2\gamma_{1m} + [(1+\beta_2)\varphi_m^2 + æ_2^2]\gamma_{2m} = æ_2^2\varphi_m w_m ,$$

$$\lambda_1\varphi_m\gamma_{1m} + \lambda_2\varphi_m\gamma_{2m} - \varphi_m^2 w_m = -\frac{\omega_m^2}{c^2} w_m . \qquad (12)$$

Наслідком умови нетривіальності розв'язку підсистеми (12) є вираз для квадратів значень власних частот:

$$\omega_m^2 = \varphi_m^4 \frac{c^2}{\varphi_m^2 + a^2/b^2} , \qquad (13)$$

де

$$a^2 = \varphi_m^2 \{[\lambda_1(1+\beta_2) - \lambda_2\beta_{21}]æ_1^2 + [\lambda_2(1+\beta_1) - \lambda_1\beta_{12}]æ_2^2\} + æ_1^2æ_2^2 ,$$

$$b^2 = 4\varphi_m^2 + [(1+\beta_2)(1-\lambda_1) + \lambda_2\beta_{21}]æ_1^2 + [(1+\beta_1)(1-\lambda_2) + \lambda_1\beta_{12}]æ_2^2 ,$$

$$\lambda_1 = \frac{\Lambda_1}{\Lambda}, \qquad \lambda_2 = \frac{\Lambda_2}{\Lambda}, \qquad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 .$$

3. Аналіз результатів та висновки. Для подальшого аналізу впливу врахування дискретності будови за товщиною введемо до розгляду вираз для безрозмірної власної частоти $\overline{\omega}_m$:

$$\overline{\omega}_m = \ell\omega_m\sqrt{\rho_2/E_2} .$$

У наведеній нижче табл. 1 подано нові результати, що вперше показують суттєвий вплив врахування дискретності будови за товщиною на значення величин безрозмірних власних частот $\overline{\omega}_m$. Числові розрахунки виконано для двошарової пластини-смуги при $E_1/E_2 = 0.2$, $\nu_2 = 0.25$, $\nu_1 = 0.375$, $E_i/G_i = 2(1+\nu_i)$, $\rho_1/\rho_2 = 0.2$, $h_1/h_2 = 1.0$, $h_2/\ell = 0.05$.

У табл. 1 в першому та другому рядках наведено значення перших трьох безрозмірних частот $\overline{\omega}_0$, $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ за класичною теорією та за зсувною моделлю С. П. Тимошенка при використанні зведених жорсткісних характеристик [2]. Третій рядок містить значення цих же власних частот з урахуванням дискретності при $E_i/E_i' = 0$. У четвертому рядку наведені ті ж власні частоти при $E_i/E_i' = 1$ (врахування стисливості складових).

Таблиця 1

$\overline{\omega}_n$ / № варіанта	$\overline{\omega}_0$	$\overline{\omega}_1$	$\overline{\omega}_2$
1	0.1483	1.3341	3.7059
2	0.1465	1.2089	2.9247
3	0.1288	1.0124	2.4822
4	0.1350	1.0956	2.6204

Як видно з порівняння перших двох і третього рядків, урахування дискретності будови за товщиною приводить до зменшення значень власних частот. Урахування ж податливості підвищує їхні значення.

У подальшому відповідні дослідження доцільно виконати для більш широкого діапазону зміни геометричних і фізико-механічних характеристик розглянутого конструкційного тонкостінного елемента і поширити на двовимірний випадок.

Дослідження виконано за підтримки ДФФД України (в рамках наукового проекту Ф 53.1/028).

1. *Гузь А. Н., Шульга Н. А., Бабич И. Ю., Космодамианский А. С., Лапуста Ю. Н., Подлипенец А. Н., Рущицкий Я. Я., Сторожев В. И., Чехов В. Н., Шпак В. А.* Динамика и устойчивость материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 429 с. – Механика композитов: В 12 т. / Под общ. ред. акад. НАНУ А. Н. Гузя. – Т. 2.
2. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.* Сопротивление полимерных и композиционных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
3. *Осадчук В. А., Марчук М. В.* Математична модель динамічного деформування податливих до зсуву та стиску композитних пластин // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 43–50.
4. *Пакош В. С.* Власні частоти податливої до трансверсальних зсуву та стиснення пластини-смуги з тонким покриттям // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 172–175.
5. *Christensen R. M.* Mechanics of composite materials. – New York: J. Wiley & Sons, 1979. – 348 p.
6. *Huu-Tai Thai, Seung-Eock Kim.* Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory // Int. J. Mech. Sci. – 2010. – **52**, No. 4. – P. 626–633.
7. *Latheswary S., Valsarajan K. V., Rao Y. V. K. S.* Free vibrations analysis of laminated plates using higher-order shear deformation theory // J. Institution Eng. (India): Series A. – 2004. – **85**. – P. 18–24.
8. *Zak A. J., Ostachowicz W., Cartmell M. P.* Dynamics of multilayered composite plates with shape memory alloy wires // Trans ASME. J. Appl. Mech. – 2003. – **70,** No. 3. – P. 313–327.
9. *Zhi Wei, Minqiao Lu, and Jun Zhang.* Numerical model and analysis on dynamics of composites for active damage detection // Proc. Int. Conf. Intelligent Computing. ICIC 2006: Comput. Intelligence. Lecture Notes in Computer Sci. – 2006. – Vol. 4114. – P. 649–654.

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН-ПОЛОС С ПОДАТЛИВЫМИ К ТРАНСВЕРСАЛЬНЫМ СДВИГУ И СЖАТИЮ СОСТАВЛЯЮЩИМИ

На основе соотношений варианта уточненной теории динамического деформирования композитных пластин предложена математическая модель процесса свободных колебаний слоистых пластин-полос с податливыми к трансверсальным сдвигу и сжатию составляющими. Для шарнирного закрепления удлиненных краев нижней составляющей записано характеристическое уравнение. Получено аналитическое выражение для спектра собственных частот двухслойной пластины-полосы. Проанализировано влияние учета дискретности строения по толщине и податливости к трансверсальному сжатию на их значения.

NATURAL FREQUENCIES OF LAYERED COMPOSITE PLATES-STRIPS WITH COMPONENTS COMPLIANT TO TRANSVERSAL SHEAR AND COMPRESSION

On the basis of a variant of refined theory of dynamic deformation of composite plates, a mathematical model of the process of free vibrations of layered plates-strips with components compliant to transversal shear and compression is proposed. For hinged elongated edges of a lower component the characteristic equation is written. The analytical expression for the spectrum of natural frequencies of two-layer plate-strip is obtained. The influence of taking into account the structure discreteness in thickness and compliance to the transversal compression on their values is analyzed.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
[3] Держ. підпр-во «Констр. бюро «Південне»
ім. М. К. Янгеля», Дніпропетровськ

Одержано
29.12.12