

## ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЁХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ОБ УПРУГОЙ ДИФФУЗИИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО СЛОЯ

*Рассматривается трёхмерная нестационарная задача для упругого слоя с учётом диффузии. Используется локально равновесная модель механодиффузии, включающая связанную систему уравнений движения упругого тела и уравнение массопереноса. Применяется асимптотическая процедура разделения переменных, позволяющая свести многомерную задачу к рекуррентной последовательности одномерных задач, которые решаются с помощью рядов Фурье и преобразования Лапласа по времени. Оригиналы изображений искомым функциям находятся аналитически.*

**Введение.** Во многих приложениях, в том числе при исследовании поведения объектов новой техники, необходимо изучение эффектов связанности полей различной природы с целью получить более точное описание воздействия на них статических и динамических нагрузок, высоких температур и диффузии. При этом в качестве моделей часто используются связанные уравнения механодиффузии, которые необходимо рассматривать в трёхмерной постановке. Изучению подобных вопросов посвящено большое количество монографий как российских [1, 5–8], так и зарубежных учёных [9–13, 15–17, 19]. В качестве основных работ, посвящённых построению математических моделей связанной термоупругости с учётом диффузии, можно, например, отметить публикации [1, 5–9, 11, 12]. При этом указанные задачи решаются в основном в статических и квазистатических постановках [5, 9, 10, 13], и решения нестационарных многомерных задач механодиффузии практически отсутствуют. Ниже приводится решение одной нестационарной трёхмерной задачи этого класса.

Одним из подходов к решению многомерных задач является асимптотический метод, позволяющий при определённых граничных условиях свести многомерную начально-краевую задачу к рекуррентной последовательности одномерных задач. Применение асимптотических методов, как правило, основано на введении малого безразмерного параметра, после чего решение задачи строится в виде ряда по степеням этого параметра. Идея излагаемого ниже метода основана на использовании асимптотической процедуры двухмасштабного разложения, напоминающая метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, изложенный в монографиях [14, 18].

**1. Постановка задачи.** Рассматривается однородный упругий ортотропный слой, ограниченный плоскостями  $x_3 = 0$  и  $x_3 = L$ , где  $Ox_1x_2x_3$  – прямоугольная декартова система координат. Полагается, что физико-механические процессы в нем без учёта температурных эффектов описываются следующими уравнениями [2, 3, 5, 11, 12]:

$$C_{ijkl}u_{k,jl} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \gamma_{ij}\eta_{,j},$$

$$gD_{ij}\eta_{,ij} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \Lambda_{ijkl}u_{k,ijl},$$

$$\Lambda_{ijkl} = \frac{n_0 \gamma_{kl} D_{ij}}{RT_0},$$

где  $t$  – время;  $u_i$  – координаты вектора перемещений;  $T_0$  – начальная температура;  $\eta = n - n_0$  – приращение объёмной концентрации веществ  $n$  относительно начальной концентрации  $n_0$ ;  $C_{ijkl}$  – компоненты тензора

упругих постоянных среды;  $\rho$  – плотность среды;  $\gamma_{ij}$  – компоненты тензора, определяющего тип кристаллической решётки;  $c_{\sigma\epsilon n}$  – удельная теплоёмкость при постоянной деформации и концентрации;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $D_{ij}$  – компоненты тензора самодиффузии;  $g$  – термодинамический множитель Даркена; по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование от 1 до 3.

На границах слоя заданы перемещения  $f_{i1}$ ,  $f_{i2}$  и диффузионные потоки  $f_{i3}$ ,  $f_{i4}$ :

$$\begin{aligned} u_i|_{x_3=0} &= f_{i1}(x_1, x_2, t), & [\Lambda_{i3kl}u_{k,\ell 3} - D_{i3}\eta_{,3}]|_{x_3=0} &= f_{i3}(x_1, x_2, t), \\ u_i|_{x_3=L} &= f_{i2}(x_1, x_2, t), & [\Lambda_{i3kl}u_{k,\ell 3} - D_{i3}\eta_{,3}]|_{x_3=L} &= f_{i4}(x_1, x_2, t). \end{aligned}$$

В начальный момент времени слой находится в невозмущенном состоянии:

$$u_i|_{t=0} = \frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad \eta|_{t=0} = 0.$$

Далее везде будем использовать следующие безразмерные параметры (при одинаковом написании они обозначены чертой, которую затем опускаем):

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= \frac{x_i}{L}, & \bar{u}_i &= \frac{u_i}{L}, & \tau &= \frac{Ct}{L}, & C^2 &= \frac{C_{3333}}{\rho}, \\ \bar{C}_{ijkl} &= \frac{C_{ijkl}}{\rho C^2}, & \bar{\gamma}_{ij} &= \frac{\gamma_{ij}}{\rho C^2}, & \bar{D}_{ij} &= \frac{D_{ij}g}{CL}, & \bar{\Lambda}_{ijkl} &= \frac{\Lambda_{ijkl}}{CL}, & \bar{f}_{ik} &= \frac{f_{ik}}{C}. \end{aligned}$$

Соответствующий безразмерный аналог указанной выше начально-краевой задачи записываем так:

$$C_{ijkl}u_{k,j\ell} = \ddot{u}_i + \gamma_{ij}\eta_{,j}, \quad D_{ij}\eta_{,ij} = \dot{\eta} + \Lambda_{ijkl}u_{k,ij\ell}, \quad (1)$$

$$u_i|_{x_3=0} = f_{i1}(x_1, x_2, \tau), \quad [\Lambda_{i3kl}u_{k,\ell 3} - D_{i3}\eta_{,3}]|_{x_3=0} = f_{i3}(x_1, x_2, \tau),$$

$$u_i|_{x_3=1} = f_{i2}(x_1, x_2, \tau), \quad [\Lambda_{i3kl}u_{k,\ell 3} - D_{i3}\eta_{,3}]|_{x_3=1} = f_{i4}(x_1, x_2, \tau), \quad (2)$$

$$u_i|_{\tau=0} = \dot{u}_i|_{\tau=0} = 0, \quad \eta|_{\tau=0} = 0. \quad (3)$$

Здесь точками обозначены производные по безразмерному времени  $\tau$ .

Отметим, что для рассматриваемой ортотропной среды (симметрия относительно плоскостей  $x_3 = 0$  и  $x_2 = 0$ ) тензоры, определяющие физические характеристики среды, имеют следующие нулевые компоненты:

$$\gamma_{ij} = D_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

$$\begin{aligned} C_{2221} = C_{2223} = C_{2111} = C_{2113} = C_{2133} = C_{2311} = C_{2313} = C_{2333} = \\ = C_{1113} = C_{2213} = C_{1333} = C_{2312} = 0. \end{aligned}$$

**2. Метод решения.** Следуя [2], задачу (1)–(3) будем решать с помощью метода асимптотического разделения переменных. При этом полагаем, что неравномерность возмущений имеет слабовыраженный характер, что учитывается введением малого параметра  $\epsilon$  как множителя перед аргументами правых частей в (2):  $f_{ij} = \phi_{ij}(\epsilon x_1, \epsilon x_2, \tau)$ . Вводим два масштаба: «тождественный»  $\xi_p = x_p$  и «медленный»  $\zeta_p = \epsilon x_p$ ,  $p = 1, 2$ , и решение задачи (1)–(3) представляем в виде рядов по степеням малого параметра:

$$\eta(x_1, x_2, x_3, \tau) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \varepsilon^\ell \eta^\ell(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau),$$

$$u_i(x_1, x_2, x_3, \tau) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \varepsilon^\ell u_i^\ell(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau). \quad (4)$$

Подстановка этих рядов (4) в уравнения (1) и граничные условия (2) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях  $\varepsilon$  даёт рекуррентную последовательность одномерных задач:

– при  $\varepsilon^0$ :

$$C_{i3m3} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial x_3^2} - \gamma_{i3} \frac{\partial \eta^0}{\partial x_3} = \ddot{u}_i^0, \quad D_{33} \frac{\partial^2 \eta^0}{\partial x_3^2} = \dot{\eta}^0 + \Lambda_{i333} \frac{\partial^3 u_i^0}{\partial x_3^3}, \quad (5)$$

$$u_i^0 \Big|_{x_3=0} = \phi_{i1}(\zeta_1, \zeta_2, \tau), \quad \left( \Lambda_{i3m3} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial x_3^2} - D_{i3} \frac{\partial \eta^0}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=0} = \phi_{i3}(\zeta_1, \zeta_2, \tau),$$

$$u_i^0 \Big|_{x_3=1} = \phi_{i2}(\zeta_1, \zeta_2, \tau), \quad \left( \Lambda_{i3m3} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial x_3^2} - D_{i3} \frac{\partial \eta^0}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=1} = \phi_{i4}(\zeta_1, \zeta_2, \tau); \quad (6)$$

– при  $\varepsilon^1$ :

$$C_{i3m3} \frac{\partial^2 u_m^1}{\partial x_3^2} - \gamma_{i3} \frac{\partial \eta^1}{\partial x_3} = \ddot{u}_i^1 - C_{ipm3} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial \zeta_p \partial x_3} + \gamma_{ip} \frac{\partial \eta^0}{\partial \zeta_p},$$

$$D_{33} \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_3^2} - \Lambda_{i333} \frac{\partial^3 u_i^1}{\partial x_3^3} = \dot{\eta}^1 - D_{3p} \frac{\partial^2 \eta^0}{\partial x_3 \partial \zeta_p} + \Lambda_{i33p} \frac{\partial^3 u_i^0}{\partial x_3^2 \partial \zeta_p}, \quad (7)$$

$$u_i^1 \Big|_{x_3=0,1} = 0,$$

$$\left( \Lambda_{i3m3} \frac{\partial^2 u_m^1}{\partial x_3^2} - D_{i3} \frac{\partial \eta^1}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=0,1} = - \left( \Lambda_{ipm3} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial \zeta_p \partial x_3} - D_{p3} \frac{\partial \eta^0}{\partial \zeta_p} \right) \Big|_{x_3=0,1}; \quad (8)$$

– при  $\varepsilon^2$ :

$$C_{i3m3} \frac{\partial^2 u_m^2}{\partial x_3^2} - \gamma_{i3} \frac{\partial \eta^2}{\partial x_3} = \ddot{u}_i^2 - C_{ipm3} \frac{\partial^2 u_m^1}{\partial \zeta_p \partial x_3} - C_{ipmq} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial \zeta_p \partial \zeta_q} + \gamma_{ip} \frac{\partial \eta^1}{\partial \zeta_p},$$

$$D_{33} \frac{\partial^2 \eta^2}{\partial x_3^2} - \Lambda_{i333} \frac{\partial^3 u_i^2}{\partial x_3^3} = \dot{\eta}^2 - D_{3p} \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_3 \partial \zeta_p} - D_{pq} \frac{\partial^2 \eta^0}{\partial \zeta_p \partial \zeta_q} +$$

$$+ \Lambda_{i33p} \frac{\partial^3 u_i^1}{\partial x_3^2 \partial \zeta_p} + \Lambda_{ip3q} \frac{\partial^3 u_i^0}{\partial x_3 \partial \zeta_p \partial \zeta_q}, \quad p, q = 1, 2, \quad (9)$$

$$u_i^2 \Big|_{x_3=0,1} = 0,$$

$$\left( \Lambda_{i3m3} \frac{\partial^2 u_m^2}{\partial x_3^2} - D_{i3} \frac{\partial \eta^2}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=0,1} =$$

$$= - \left( \Lambda_{ipm3} \frac{\partial^2 u_m^1}{\partial \zeta_p \partial x_3} + \Lambda_{ipmq} \frac{\partial^2 u_m^0}{\partial \zeta_p \partial \zeta_q} - D_{p3} \frac{\partial \eta^1}{\partial \zeta_p} \right) \Big|_{x_3=0,1}; \quad (10)$$

– при  $\varepsilon^k$ ,  $k \geq 3$ :

$$\begin{aligned}
C_{i3m3} \frac{\partial^2 u_m^k}{\partial x_3^2} - \gamma_{i3} \frac{\partial \eta^k}{\partial x_3} &= \ddot{u}_i^k - C_{ipm3} \frac{\partial^2 u_m^{k-1}}{\partial \zeta_p \partial x_3} - C_{ipmq} \frac{\partial^2 u_m^{k-2}}{\partial \zeta_p \partial \zeta_q} + \gamma_{ip} \frac{\partial \eta^{k-1}}{\partial \zeta_q}, \\
D_{33} \frac{\partial^2 \eta^k}{\partial x_3^2} - \Lambda_{i333} \frac{\partial^3 u_i^k}{\partial x_3^3} &= \dot{\eta}^k - D_{3p} \frac{\partial^2 \eta^{k-1}}{\partial x_3 \partial \zeta_p} - D_{pq} \frac{\partial^2 \eta^{k-2}}{\partial \zeta_p \partial \zeta_q} + \\
&+ \Lambda_{i33p} \frac{\partial^3 u_i^{k-1}}{\partial x_3^2 \partial \zeta_p} + \Lambda_{ip3q} \frac{\partial^3 u_i^{k-2}}{\partial x_3 \partial \zeta_p \partial \zeta_q} + \Lambda_{ipqr} \frac{\partial^3 u_i^{k-3}}{\partial \zeta_p \partial \zeta_q \partial \zeta_r}, \\
& p, q, r = 1, 2, \tag{11}
\end{aligned}$$

$$u_i^k \Big|_{x_3=0,1} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\left( \Lambda_{i3m3} \frac{\partial^2 u_m^k}{\partial x_3^2} - D_{i3} \frac{\partial \eta^k}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=0,1} &= \\
&= - \left( \Lambda_{ipm3} \frac{\partial^2 u_m^{k-1}}{\partial \zeta_p \partial x_3} + \Lambda_{ipmq} \frac{\partial^2 u_m^{k-2}}{\partial \zeta_p \partial \zeta_q} - D_{p3} \frac{\partial \eta^{k-1}}{\partial \zeta_p} \right) \Big|_{x_3=0,1}. \tag{12}
\end{aligned}$$

**Замечание 1.** Начальные условия инвариантны относительно преобразований (4), так как не содержат частных производных по пространственным переменным, поэтому для каждой из задач в (7)–(12), равно как и для (5), (6), они нулевые.

**Замечание 2.** В задачу (5), (6) переменные  $\zeta_\alpha$  входят как параметры, и, кроме того, как следует из граничных условий, это приближение не зависит от переменных  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Это означает, что задача (5), (6), в отличие от исходной задачи (1)–(3), является одномерной и, как следствие, более простой. Нетрудно видеть, что и все последующие приближения ( $k \geq 1$ ) также не будут зависеть от переменных  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , т. е. каждая из задач в (7)–(12) также является одномерной.

Далее для демонстрации метода без ограничения общности будем полагать, что в (6)  $\phi_{11} = \phi_{12} = \phi_{21} = \phi_{22} = 0$ .

**3. Решение задачи нулевого приближения.** Задача (5), (6) распадается на три независимые задачи (здесь и далее суммирование по греческим индексам не производится; начальные условия определяются замечанием 1):

$$\begin{aligned}
C_{\alpha 3\alpha 3} \frac{\partial^2 u_\alpha^0}{\partial x_3^2} &= \ddot{u}_\alpha^0, \quad u_\alpha^0 \Big|_{x_3=0} = \phi_{\alpha 1}(\zeta_1, \zeta_2, \tau), \\
u_\alpha^0 \Big|_{x_3=1} &= \phi_{\alpha 2}(\zeta_1, \zeta_2, \tau), \tag{13}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_3^2} - \gamma_{33} \frac{\partial \eta^0}{\partial x_3} = \ddot{u}_3^0, \quad D_{33} \frac{\partial^2 \eta^0}{\partial x_3^2} = \dot{\eta}^0 + \Lambda_{3333} \frac{\partial^3 u_3^0}{\partial x_3^3}, \tag{14}$$

$$u_3^0 \Big|_{x_3=0} = \phi_{31}(\zeta_1, \zeta_2, \tau), \quad \left( \Lambda_{3333} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_3^2} - D_{33} \frac{\partial \eta^0}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=0} = \phi_{33}(\zeta_1, \zeta_2, \tau),$$

$$u_3^0 \Big|_{x_3=1} = \phi_{32}(\zeta_1, \zeta_2, \tau), \quad \left( \Lambda_{3333} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_3^2} - D_{33} \frac{\partial \eta^0}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=1} = \phi_{34}(\zeta_1, \zeta_2, \tau). \tag{15}$$

Решения задач (13) находятся стандартными методами математической физики. В частности, при сделанных предположениях эти задачи имеют нулевые решения:

$$u_{1,2}^0(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau) = 0.$$

Рассмотрим теперь задачу (14), (15). Введя для краткости обозначения

$$D = D_{33}g, \quad \gamma = \gamma_{33}, \quad \Lambda = \Lambda_{3333}, \quad x = x_3, \quad \phi_{3k} = \phi_k,$$

$$\eta(x, \tau) = \eta^0(\zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau), \quad u(x, \tau) = u_3^0(\zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau),$$

приводим ее к следующему виду:

$$\ddot{u} = u'' - \gamma\eta', \quad \dot{\eta} = D\eta'' - \Lambda u''', \quad (16)$$

$$u|_{x=0} = \phi_1(\zeta_1, \zeta_2, \tau), \quad (\Lambda u'' - D\eta')|_{x=0} = \phi_3(\zeta_1, \zeta_2, \tau),$$

$$u|_{x=1} = \phi_2(\zeta_1, \zeta_2, \tau), \quad (\Lambda u'' - D\eta')|_{x=1} = \phi_4(\zeta_1, \zeta_2, \tau), \quad (17)$$

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = 0, \quad \eta|_{\tau=0} = 0. \quad (18)$$

Здесь штрихи соответствуют производной по  $x$ .

Решение этой начально-краевой задачи представляем в интегральной форме:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \sum_{k=1}^2 [G_{u,2k-1}(x, \tau) * \phi_{2k-1}(\tau) + G_{u,2k-1}(1-x, \tau) * \phi_{2k}(\tau)], \\ \eta(x, \tau) &= \sum_{k=1}^2 [G_{\eta,2k-1}(x, \tau) * \phi_{2k-1}(\tau) - G_{\eta,2k-1}(1-x, \tau) * \phi_{2k}(\tau)], \end{aligned} \quad (19)$$

где  $G_{u,k}(x, \tau)$  и  $G_{\eta,k}(x, \tau)$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , – фундаментальные решения (функции влияния) задачи (16)–(18), соответствующие граничным условиям с правыми частями вида

$$\phi_\ell(\zeta_1, \zeta_2, \tau) = \delta_{\ell k} \delta(\tau), \quad \ell = 1, \dots, 4.$$

Здесь  $\delta_{\ell k}$  – символ Кронекера,  $k$  – номер фундаментальной задачи.

**Замечание 3.** В представлении (19) учтено, что функции влияния связаны соотношениями

$$\begin{aligned} G_{u2}(x, \tau) &= G_{u1}(1-x, \tau), & G_{u4}(x, \tau) &= G_{u3}(1-x, \tau), \\ G_{\eta2}(x, \tau) &= -G_{\eta1}(1-x, \tau), & G_{\eta4}(x, \tau) &= -G_{\eta3}(1-x, \tau). \end{aligned}$$

Поэтому достаточно найти только функции  $G_{uk}$  и  $G_{\eta k}$  при  $k = 1, 3$ .

Применяя к задаче (16)–(18) преобразование Лапласа (индекс « $L$ » обозначает изображение;  $s$  – параметр преобразования) и выполняя редукцию к нулевым граничным условиям с помощью формул

$$u^L = \varphi + U^L, \quad \eta^L = \psi + H^L,$$

получаем

$$\begin{aligned} s^2 U^L - (U^L)'' + \gamma(H^L)' &= F_1(x, s), & sH^L - D(H^L)'' + \Lambda(U^L)''' &= F_3(x, s), \\ F_1(x, s) &= \varphi_*(x) \left[ -s^2 \phi_1^L(s) + \frac{\gamma}{D} \phi_3^L(s) \right], & F_3(x, s) &= [1 - s\psi_*(x)] \phi_3^L(s), \end{aligned} \quad (20)$$

$$U^L|_{x=0,1} = 0, \quad (\Lambda(U^L)'' - D(H^L)')|_{x=0,1} = 0,$$

где

$$\varphi = \varphi_*(x)\phi_1^L, \quad \psi = \psi_*(x)\phi_3^L, \quad \varphi_*(x) = 1 - x, \quad \psi_*(x) = \frac{1}{D} \left( \frac{x^2}{2} - x \right).$$

Далее, решение задачи (20) представляем в виде рядов по собственным функциям соответствующих операторов:

$$\begin{aligned} U^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n^L(s) \sin \lambda_n x, \\ H^L(x, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n^L(s) \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi n, \\ \varphi_*(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \lambda_n x, \quad \psi_*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \cos \lambda_n x, \\ F_1^L(x, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{1n}(s) \sin \lambda_n x, \quad F_3^L(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{3n}(s) \cos \lambda_n x. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя (21) в (20), приходим к алгебраическим уравнениям относительно коэффициентов  $U_n^L$  и  $H_n^L$ :

– при  $n = 0$ :

$$sH_0^L = F_{30}(s);$$

– при  $n \geq 1$ :

$$(s^2 + \lambda_n^2)U_n^L - \gamma\lambda_n H_n^L = F_{1n}(s), \quad -\Lambda\lambda_n^3 U_n^L + (s + D\lambda_n^2)H_n^L = F_{3n}(s).$$

Их решения имеют вид

$$H_0^L = \left(1 - \frac{\Psi_0}{s}\right)\phi_3^L(s), \quad (22)$$

$$U_n^L = -\varphi_n \phi_1^L + G_{u1n}^L \phi_1^L + G_{u3n}^L \phi_3^L,$$

$$H_n^L = -\psi_n \phi_3^L + G_{\eta1n}^L \phi_1^L + G_{\eta3n}^L \phi_3^L, \quad (23)$$

где

$$G_{\eta30}^L = \frac{1}{s}, \quad G_{\eta1n}^L = -\frac{2\Lambda\lambda_n^2 s^2}{P_{3n}(s)}, \quad G_{\eta3n}^L = \frac{2(s^2 + \lambda_n^2)}{P_{3n}(s)},$$

$$G_{u1n}^L = \frac{2\lambda_n(s + (D - \gamma\Lambda)\lambda_n^2)}{\lambda_n P_{3n}(s)}, \quad G_{u3n}^L = \frac{2\gamma\lambda_n}{P_{3n}(s)}, \quad n \geq 1,$$

$$P_{3n}(s) = (s^2 + \lambda_n^2)(s + D\lambda_n^2) - \gamma\Lambda\lambda_n^4.$$

Отметим, что  $G_{\eta30}^L$ ,  $G_{\eta1n}^L$ ,  $G_{\eta3n}^L$ ,  $G_{u1n}^L$  и  $G_{u3n}^L$  являются коэффициентами разложений в ряды Фурье изображений функций влияния:

$$G_{u1}^L = \sum_{n=1}^{\infty} G_{u1n}^L(s) \sin \lambda_n x, \quad G_{u3}^L = \sum_{n=1}^{\infty} G_{u3n}^L(s) \sin \lambda_n x,$$

$$G_{\eta1}^L = \sum_{n=1}^{\infty} G_{\eta1n}^L(s) \cos \lambda_n x, \quad G_{\eta3}^L = G_{\eta30}^L(s) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{\eta3n}^L(s) \cos \lambda_n x.$$

Оригинал функции  $G_{\eta30}$  находим непосредственно по таблицам операционного исчисления:

$$G_{\eta 30}(x, \tau) = H(\tau),$$

где  $H(\tau)$  – функция Хевисайда.

Для нахождения оригиналов  $G_{uk}$  и  $G_{\eta k}$  рациональные функции, входящие в формулы (23), раскладываем на элементарные дроби:

$$\frac{s^2}{P_{3n}(s)} = \frac{A_{1n}s + A_{2n}}{s^2 + z_n^2} + \frac{A_{3n}}{s - s_{3n}}, \quad \frac{s^2 + \lambda_n^2}{P_{3n}(s)} = \frac{E_{1n}s + E_{2n}}{s^2 + z_n^2} + \frac{E_{3n}}{s - s_{3n}},$$

$$\frac{s + (D - \gamma\Lambda)\lambda_n^2}{P_{3n}(s)} = \frac{B_{1n}s + B_{2n}}{s^2 + z_n^2} + \frac{B_{3n}}{s - s_{3n}},$$

$$\frac{1}{P_{3n}(s)} = \frac{C_{1n}s + C_{2n}}{s^2 + z_n^2} + \frac{C_{3n}}{s - s_{3n}},$$

где

$$A_{1n} = \frac{z_n^2}{z_n^2 + s_{3n}^2}, \quad A_{2n} = \frac{s_{3n}z_n^2}{z_n^2 + s_{3n}^2}, \quad A_{3n} = \frac{s_{3n}^2}{z_n^2 + s_{3n}^2},$$

$$B_{1n} = -\frac{s_{3n} + (D - \gamma\Lambda)\lambda_n^2}{z_n^2 + s_{3n}^2}, \quad B_{2n} = \frac{z_n^2 - s_{3n}(D - \gamma\Lambda)\lambda_n^2}{z_n^2 + s_{3n}^2},$$

$$B_{3n} = \frac{s_{3n} + (D - \gamma\Lambda)\lambda_n^2}{z_n^2 + s_{3n}^2},$$

$$C_{1n} = -\frac{1}{z_n^2 + s_{3n}^2}, \quad C_{2n} = -\frac{s_{3n}}{z_n^2 + s_{3n}^2}, \quad C_{3n} = \frac{1}{z_n^2 + s_{3n}^2},$$

$$E_{1n} = \frac{z_n^2 - \lambda_n^2}{z_n^2 + s_{3n}^2}, \quad E_{2n} = s_{3n} \frac{z_n^2 - \lambda_n^2}{z_n^2 + s_{3n}^2}, \quad E_{3n} = \frac{s_{3n}^2 + \lambda_n^2}{z_n^2 + s_{3n}^2},$$

а  $s_{kn}$  – нули многочлена  $P_{3n}(s)$ ,  $z_n = |s_{1n}|$ .

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа [4], окончательно получаем оригиналы функций влияния:

$$\begin{aligned} G_{u1} &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{u1n} \sin \lambda_n x, & G_{u3} &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{u3n} \sin \lambda_n x, \\ G_{\eta 1} &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{\eta 1n} \cos \lambda_n x, & G_{\eta 3} &= G_{\eta 30} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{\eta 3n} \cos \lambda_n x, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$G_{u1n} = 2\lambda_n [A_{1n} \cos z_n \tau + A_{2n} z_n^{-1} \sin z_n \tau + A_{3n} e^{s_{3n}\tau}],$$

$$G_{\eta 1n} = -2\lambda_n^2 [B_{1n} \cos z_n \tau + B_{2n} z_n^{-1} \sin z_n \tau + B_{3n} e^{s_{3n}\tau}],$$

$$G_{u3n} = 2\gamma\lambda_n [C_{1n} \cos z_n \tau + C_{2n} z_n^{-1} \sin z_n \tau + C_{3n} e^{s_{3n}\tau}],$$

$$G_{\eta 30} = H(\tau),$$

$$G_{\eta 3n} = 2[E_{1n} \cos z_n \tau + E_{2n} z_n^{-1} \sin z_n \tau + E_{3n} e^{s_{3n}\tau}]. \quad (25)$$

**4. Решение задачи первого приближения.** В рассматриваемом случае ортотропной среды задача (7), (8) имеет вид

$$C_{\alpha 3\alpha 3} \frac{\partial^2 u_\alpha^1}{\partial x_3^2} = \ddot{u}_\alpha^1 - C_{\alpha\alpha 33} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial \zeta_\alpha \partial x_3} + \gamma_{\alpha\alpha} \frac{\partial \eta^0}{\partial \zeta_\alpha},$$

$$u_\alpha^1 \Big|_{x_3=0,1} = 0, \quad u_\alpha^1 \Big|_{\tau=0} = \dot{u}_\alpha^1 \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 u_3^1}{\partial x_3^2} - \gamma_{33} \frac{\partial \eta^1}{\partial x_3} = \ddot{u}_3^1, \quad D_{33} \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial x_3^2} - \Lambda_{3333} \frac{\partial^3 u_3^1}{\partial x_3^3} = \dot{\eta}^1,$$

$$u_3^1 \Big|_{x_3=0,1} = 0, \quad \left( \Lambda_{3333} \frac{\partial^2 u_3^1}{\partial x_3^2} - D_{33} \frac{\partial \eta^1}{\partial x_3} \right) \Big|_{x_3=0,1} = 0,$$

$$u_3^1 \Big|_{\tau=0} = \dot{u}_3^1 \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \eta^1 \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (27)$$

Решение задачи (27) является тривиальным:

$$u_3^1(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau) = 0,$$

$$\eta^1(\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau) = 0.$$

Задачу (26), вводя дополнительно обозначения

$$N_\alpha = C_{\alpha 3\alpha 3}, \quad K_\alpha = C_{\alpha\alpha 33}, \quad \gamma_\alpha = \gamma_{\alpha\alpha}, \quad u_\alpha(x, \tau) = u_\alpha^1(\zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau),$$

записываем так:

$$N_\alpha \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} = \ddot{u}_\alpha + \omega_\alpha, \quad \omega_\alpha = -K_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta_\alpha \partial x} + \gamma_\alpha \frac{\partial \eta}{\partial \zeta_\alpha}, \quad (28)$$

$$u_\alpha \Big|_{x=0,1} = 0, \quad u_\alpha \Big|_{\tau=0} = \dot{u}_\alpha \Big|_{\tau=0} = 0, \quad (29)$$

где

$$\omega_\alpha = \omega_\alpha(\zeta_1, \zeta_2, x, \tau) = \omega_{\alpha 0}^c(\zeta_1, \zeta_2, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{\alpha n}^c(\zeta_1, \zeta_2, \tau) \cos \lambda_n x,$$

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha n}^c(\zeta_1, \zeta_2, \tau) = & -K_\alpha \lambda_n \left[ \frac{\partial \phi_1(\zeta_1, \zeta_2, \tau)}{\partial \zeta_\alpha} - (-1)^n \frac{\partial \phi_2(\zeta_1, \zeta_2, \tau)}{\partial \zeta_\alpha} \right] * G_{u1n}(\tau) - \\ & -K_\alpha \lambda_n \left[ \frac{\partial \phi_3(\zeta_1, \zeta_2, \tau)}{\partial \zeta_\alpha} - (-1)^n \frac{\partial \phi_4(\zeta_1, \zeta_2, \tau)}{\partial \zeta_\alpha} \right] * G_{u3n}(\tau) + \\ & + \gamma_\alpha \left[ \frac{\partial \phi_1(\zeta_1, \zeta_2, \tau)}{\partial \zeta_\alpha} + (-1)^n \frac{\partial \phi_2(\zeta_1, \zeta_2, \tau)}{\partial \zeta_\alpha} \right] * G_{\eta 1n}(\tau) + \\ & + \gamma_\alpha \left[ \frac{\partial \phi_3(\zeta_1, \zeta_2, \tau)}{\partial \zeta_\alpha} + (-1)^n \frac{\partial \phi_4(\zeta_1, \zeta_2, \tau)}{\partial \zeta_\alpha} \right] * G_{\eta 3n}(\tau), \end{aligned}$$

$$\omega_{\alpha 0}^c(\zeta_1, \zeta_2, \tau) = \varphi_\alpha \left( \frac{\partial \phi_3(\zeta_1, \zeta_2, \tau)}{\partial \zeta_\alpha} + (-1)^n \frac{\partial \phi_4(\zeta_1, \zeta_2, \tau)}{\partial \zeta_\alpha} \right) * G_{\eta 30}(\tau). \quad (30)$$

Данное представление функции  $\omega_\alpha$  получено на основе решения задачи нулевого приближения. Для решения же задачи (28), (29) с учётом нулевых граничных условий для функции  $u_\alpha$  удобнее переразложить функцию  $\omega_\alpha$  в ряд по синусам. С этой целью умножаем первое из равенств (30) на  $\sin \lambda_n x$  и проинтегрируем в промежутке от нуля до единицы. В результате получаем искомые коэффициенты и функцию  $\omega_\alpha$ :

$$\omega_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{\alpha k}^s(\tau) \sin \lambda_k x,$$

$$\omega_{\alpha k}^s = [1 - (-1)^k] \frac{\omega_{\alpha 0}^c}{\lambda_k} + \lambda_k \sum_{n=1, n \neq k}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^{n+k}] \omega_{\alpha n}^c}{\lambda_k^2 - \lambda_n^2}. \quad (31)$$

Тогда решение задачи (28), (29) представляется в виде ряда

$$u_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} u_{\alpha n}(\tau) \sin \lambda_n x. \quad (32)$$

Подстановка (31) и (32) в (28) и (29) приводит к следующим соотношениям:

$$\ddot{u}_{\alpha n} + N_\alpha \lambda_n^2 u_{\alpha n} = -\omega_{\alpha n}^s, \quad u_{\alpha n}|_{\tau=0} = \dot{u}_{\alpha n}|_{\tau=0} = 0. \quad (33)$$

Структура решения этого обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид

$$u_{\alpha n} = \Omega_{\alpha 1} \cos(\lambda_n \sqrt{N_\alpha} \tau) + \Omega_{\alpha 2} \sin(\lambda_n \sqrt{N_\alpha} \tau) + u_{\alpha n}^{\text{pt}},$$

где  $u_{\alpha n}^{\text{pt}}$  – частное решение, соответствующее его правой части.

В некоторых случаях, когда функции  $\phi_k(\zeta_1, \zeta_2, \tau)$  имеют степенные, тригонометрические или экспоненциальные зависимости от времени, то функция  $\omega_{\alpha n}^s$  есть обобщённым многочленом, и частное решение можно найти методом неопределённых коэффициентов. Описанный подход будет продемонстрирован в примерах.

**Замечание 4.** Задачи второго и более высоких приближений могут быть решены аналогичным образом. Здесь они не рассматриваются. Тем не менее, отметим, что, продолжая вышеописанную процедуру далее, можно показать, что для функций  $u_1, u_2$  все чётные приближения, а для  $u_3, \eta$  – все нечётные приближения будут нулевыми, т. е.

$$u_\alpha = \varepsilon u_\alpha^1 + \varepsilon^3 u_\alpha^3 + \dots, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$u_3 = u_3^0 + \varepsilon^2 u_3^2 + \dots,$$

$$\eta = \eta^0 + \varepsilon^2 \eta^2 + \dots$$

**5. Пример.** Рассмотрим следующий вариант внешней нагрузки:

$$\phi_3(\zeta_1, \zeta_2, \tau) = \phi(\zeta_1, \zeta_2) H(\tau),$$

$$\phi_1(\zeta_1, \zeta_2, \tau) = \phi_2(\zeta_1, \zeta_2, \tau) = \phi_4(\zeta_1, \zeta_2, \tau) \equiv 0.$$

Тогда из формул (19), (24), (25) получаем следующий результат для нулевого приближения:

$$\begin{aligned} u_3^0(\zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau) &= G_{u_3}(x_3, \tau) * H(\tau) \phi(\zeta_1, \zeta_2) = \\ &= \phi(\zeta_1, \zeta_2) \sum_{n=1}^{\infty} G_{u_3 n}(\tau) * H(\tau) \sin \lambda_n x_3, \\ \eta^0(\zeta_1, \zeta_2, x_3, \tau) &= G_{\eta_3}(x_3, \tau) * H(\tau) \phi(\zeta_1, \zeta_2) = \\ &= \phi(\zeta_1, \zeta_2) \left[ G_{\eta_3 0}(\tau) * H(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} G_{\eta_3 n}(\tau) * H(\tau) \cos \lambda_n x_3 \right], \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$G_{u_{3n}}(\tau) * H(\tau) = 2\gamma\lambda_n \left[ \frac{C_{1n}}{z_n} \sin z_n \tau + \frac{C_{2n}}{z_n^2} (1 - \cos z_n \tau) - \frac{C_{3n}}{s_{3n}} (1 - e^{s_{3n}\tau}) \right],$$

$$G_{\eta_{30}}(\tau) * H(\tau) = \tau,$$

$$G_{\eta_{3n}}(\tau) * H(\tau) = 2 \left[ \frac{E_{1n}}{z_n} \sin z_n \tau + \frac{E_{2n}}{z_n^2} (1 - \cos z_n \tau) - \frac{E_{3n}}{s_{3n}} (1 - e^{s_{3n}\tau}) \right].$$

Для первого приближения с учётом (34) и в соответствии с формулами (30), (31) имеем такие равенства:

$$\omega_{\alpha k}^s = \Phi_{\alpha 11} \tau + \Phi_{\alpha 2k} + \Phi_{\alpha 3k} \sin z_k \tau + \Phi_{\alpha 4k} \cos z_k \tau + \Phi_{\alpha 5k} e^{s_{3n}\tau},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha 1k} &= [1 - (-1)^k] \frac{\gamma_\alpha}{\lambda_k} \frac{\partial \phi(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \zeta_\alpha}, \\ \Phi_{\alpha 2k} &= 2\lambda_k \frac{\partial \phi(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \zeta_\alpha} \sum_{n=1, n \neq k}^{\infty} a_{nk} \left( \frac{b_{\alpha 4n}}{z_n^2} - \frac{b_{\alpha 5n}}{s_{3n}} \right), \\ \Phi_{\alpha 3k} &= 2\lambda_k \frac{\partial \phi(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \zeta_\alpha} \sum_{n=1, n \neq k}^{\infty} a_{nk} \frac{b_{\alpha n 3}}{z_n}, \\ \Phi_{\alpha 4k} &= 2\lambda_k \frac{\partial \phi(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \zeta_\alpha} \sum_{n=1, n \neq k}^{\infty} a_{nk} \frac{b_{\alpha 4n}}{z_n^2}, \\ \Phi_{\alpha 5k} &= 2\lambda_k \frac{\partial \phi(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \zeta_\alpha} \sum_{n=1, n \neq k}^{\infty} a_{nk} \frac{b_{\alpha n 5}}{s_{3n}}, \\ a_{nk} &= \frac{1 - (-1)^{n+k}}{\lambda_k^2 - \lambda_n^2}, \quad b_{\alpha nk} = \gamma_\alpha E_{m-2, n} - \gamma K_\alpha \lambda_n^2 C_{m-2, n}. \end{aligned} \quad (35)$$

Таким образом, для  $n$ -й гармоники перемещений имеем

$$\begin{aligned} u_{\alpha n} &= \Omega_{\alpha 1} \cos(\lambda_n \sqrt{N_\alpha} \tau) + \Omega_{\alpha 2} \sin(\lambda_n \sqrt{N_\alpha} \tau) + U_{\alpha 1k} \tau + U_{\alpha 2k} + \\ &+ U_{\alpha 3k} \sin z_k \tau + U_{\alpha 4k} \cos z_k \tau + U_{\alpha 5k} e^{s_{3n}\tau}. \end{aligned} \quad (36)$$

Коэффициенты  $\Omega_{\alpha 1}$  и  $\Omega_{\alpha 2}$  в этой формуле находятся из начальных условий (33):

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha 1} &= -U_{\alpha 2k} - U_{\alpha 4k} - U_{\alpha 5k}, \\ \Omega_{\alpha 2} &= -\frac{1}{\lambda_k \sqrt{N_\alpha}} (U_{\alpha 1k} + z_k U_{\alpha 3k} + s_{3k} U_{\alpha 5k}), \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} U_{\alpha 1k} &= -\frac{\Phi_{\alpha 1k}}{N_\alpha \lambda_k^2}, \quad U_{\alpha 2k} = -\frac{\Phi_{\alpha 2k}}{N_\alpha \lambda_k^2}, \quad U_{\alpha 3k} = -\frac{\Phi_{\alpha 3k}}{N_\alpha \lambda_k^2 - z_k^2}, \\ U_{\alpha 4k} &= -\frac{\Phi_{\alpha 4k}}{N_\alpha \lambda_k^2 - z_k^2}, \quad U_{\alpha 5k} = \frac{\Phi_{\alpha 5k}}{N_\alpha \lambda_k^2 + z_k^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Окончательно, с учетом первых двух приближений решение задачи (1)–(3) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  может быть записано так:

$$u_\alpha = \varepsilon u_\alpha^1 + o(\varepsilon^2), \quad \alpha = 1, 2,$$

$$u_3 = u_3^0 + o(\varepsilon),$$

$$\eta = \eta^0 + o(\varepsilon^2),$$

где нулевые приближения  $u_3^0$  и  $\eta^0$  определяются по формулам (34),  $u_\alpha^1$  – по формулам (32), (36)–(38).

В расчетах в качестве функции, моделирующей плотность диффузионного потока в (34), возьмём зависимость

$$\phi(\zeta_1, \zeta_2) = (1 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2)^{-1},$$

и полагаем, что материал слоя имеет следующие безразмерные характеристики:

$$D = 0.5, \quad \gamma = 0.01, \quad \Lambda = 0.001.$$

Результаты вычислений представлены на следующих графиках. На рис. 1 показана зависимость перемещений от времени, а на рис. 2 – зависимость изменения концентрации от времени. Здесь сплошная линия соответствует  $x = 0.1$ , пунктирная –  $x = 0.5$ , а штриховая –  $x = 0.9$ . На рис. 3, рис. 4 приведены пространственные распределения приращения концентрации по переменным  $x_1$  и  $x_2$  при  $x_3 = 0$  в моменты времени  $\tau = 0.1$  и  $\tau = 0.5$ . Рис. 5 характеризует пространственно-временное распределение приращения концентрации.

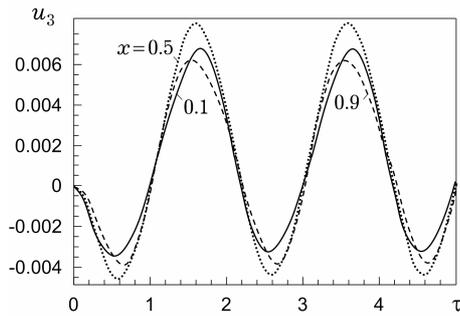


Рис. 1

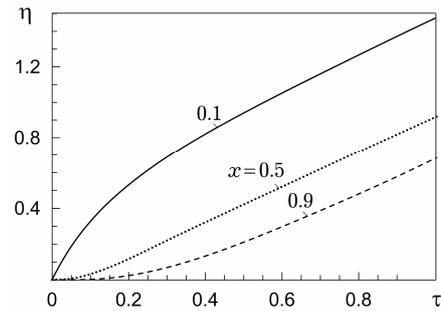
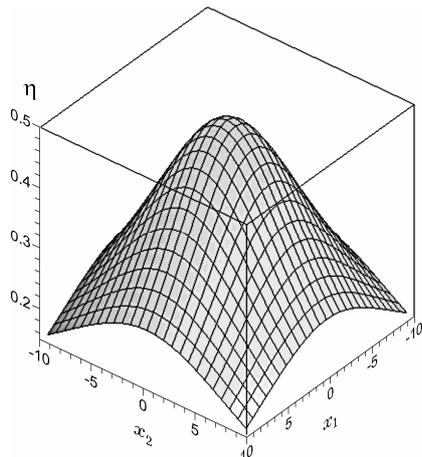
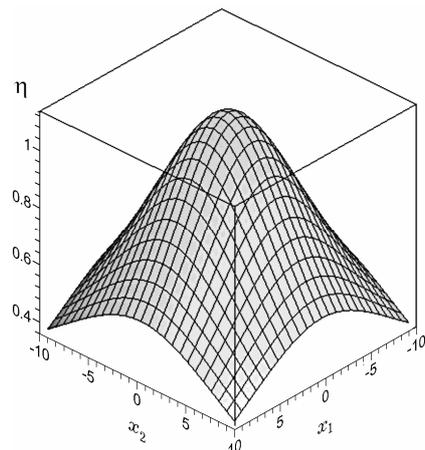


Рис. 2



$\tau = 0.1$

Рис. 3



$\tau = 0.5$

Рис. 4

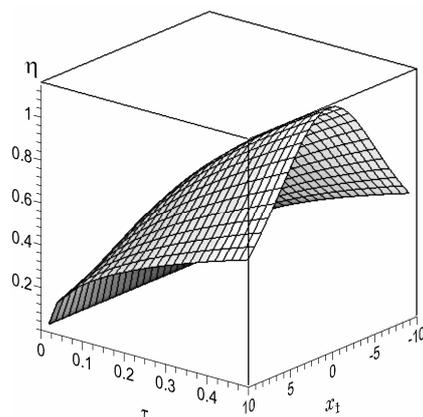


Рис. 5

**Выводы.** Построена рекуррентная последовательность начально-краевых задач (5)–(12), которая позволяет найти решение исходной задачи (1)–(3) в виде асимптотического ряда (4). Предложенная методика позволяет решать многомерные задачи с неоднородными краевыми условиями при условии, что правые части граничных условий являются медленно меняющимися функциями своих аргументов. Кроме того, указанный подход можно использовать и тогда, когда невозможно применять интегральное преобразование Фурье. Погрешность полученного решения определяется количеством членов в разложении (4).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-08-00064-а), ФЦП (Соглашение №14.В37.21.0381).

1. Бокштейн Б. С., Бокштейн С. З., Жуховицкий А. А. Термодинамика и кинетика диффузии в твёрдых телах. – Москва: Металлургия, 1974. – 280 с.
2. Вестяк В. А., Земсков А. В., Фёдоров И. А. Асимптотическое разделение переменных в задаче термоупругости для анизотропного слоя с неоднородными краевыми условиями // Изв. Саратов. ун-та. Новая сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – **12**, вып. 3. – С. 50–56.
3. Гачкевич А. Р., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Линейная модель связанной термоупругости с учётом диффузии для неоднородных анизотропных сред // Материалы XVII Междунар. симп. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. – Москва: ООО «ТР-ПРИНТ». – 2011. – Т. 2. – С. 96–106.
4. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. – Москва: Высш. шк., 1965. – 468 с.
5. Еремеев В. С. Диффузия и напряжения. – Москва: Энергоатомиздат, 1984. – 182 с.
6. Князева А. Г. Введение в локально-равновесную термодинамику физико-химических превращений в деформируемых средах. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1996. – 146 с.
7. Князева А. Г. О моделировании необратимых процессов в материалах с большим числом внутренних поверхностей // Физ. мезомеханика. – 2003. – **6**, № 5. – С. 11–27.
8. Любов Б. Я. Диффузионные процессы в неоднородных твёрдых средах. – Москва: Наука, 1981. – 296 с.
9. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Львів: СПОЛОМ, 2006–2011. – Т. 1–5.
10. Павлина В. С. О влиянии диффузии на температурные напряжения в окрестности цилиндрической полости // Физ.-хим. механика материалов. – 1965. – **1**, № 4. – С. 390–394.  
То же: Pavlina V. S. Effect of diffusion upon the thermal stresses in the vicinity of a cylindrical cavity // Mater. Sci. – 1965. – **1**, No. 4. – P. 265–268.
11. Подстригач Я. С. Диффузионная теория неупругости металлов // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1965. – № 2. – С. 67–72.

12. Подстригач Я. С., Павлина В. С. Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в  $n$ -компонентном твердом растворе // Физ.-хим. механика материалов. – 1965. – **1**, № 4. – С. 383–389.  
То же: Podstrigach Ya. S., Pavlina V. S. Differential equations of thermodynamic processes in  $n$ -component solid solutions // Mater. Sci. – 1965. – **1**, No. 4. – P. 259–264.
13. Подстригач Я. С., Швец Р. Н., Павлина В. С. Квазистатическая задача термодиффузии для деформируемых твердых тел // Прикл. механика. – 1971. – **7**, № 12. – С. 11–16.  
То же: Podstrigach Ya. S., Shvets R. N., Pavlina V. S. The quasistatic problem of thermal diffusion for deformed solid bodies // Int. Appl. Mech. – 1971. – **7**, No. 12. – P. 1300–1304.
14. Cesari L. Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations. – Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer-Verlag, 1959. – VII + 271 S. – (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 16.)
15. Groot S. R. De, Mazur P. Non-equilibrium thermodynamics. – Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1962. – 510 p.
16. Maugin G. A., Muschik W. Thermodynamics with internal variables. Part I. General concepts // J. Non-Equil. Thermodyn. – 1994. – **19**, No. 3. – P. 217–249.
17. Maugin G. A., Muschik W. Thermodynamics with internal variables. Part II. Applications // J. Non-Equil. Thermodyn. – 1994. – **19**, No. 3. – P. 250–289.
18. Nayfeh A. H. Perturbation methods. – New York: J. Wiley & Sons, 1973. – 425 p.
19. Zolnikov K. P., Psakh'e S. G., Panin V. E. Alloy phase diagrams using temperature, concentration and density as variables // J. Phys. F: Met. Phys. – 1986. – **16**, No. 8. – P. 1145–1152.

#### НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ПРУЖНУ ДИФУЗІЮ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ШАРУ

*Розглядається тривимірна нестационарна задача для пружного шару з урахуванням дифузії. Використовується локально рівноважна модель механодифузії, яка включає зв'язану систему рівнянь руху пружного тіла та рівняння масопереносу. Застосовується асимптотична процедура відокремлення змінних, що дає можливість звести багатовимірну задачу до рекурентної послідовності одновимірних задач, які розв'язуються за допомогою рядів Фур'є і перетворення Лапласа за часом. Оригінали зображень шуканих функцій визначено аналітично.*

#### APPROXIMATE SOLUTION OF THREE-DIMENSIONAL PROBLEM FOR ELASTIC DIFFUSION IN ORTHOTROPIC LAYER

*The three-dimensional unsteady-state problem for an elastic layer with taking into account the diffusion is considered. Local equilibrium model of mechano-diffusion, which includes a coupled system of equations of motion of an elastic body and mass transfer equations, is used. Asymptotic procedure of separation of variables, which allows to reduce the multi-dimensional problem to a recurrent sequence of one-dimensional problems which are solved by means of Fourier series and Laplace transform in time is applied. The originals of transforms of unknown functions are determined analytically.*

Моск. авиац. ин-т  
(нац. исслед. ун-т), Москва, Россия

Получено  
29.11.12