

НАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, НАГРУЖЕННОЙ ДВУМЯ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫМИ УСИЛИЯМИ ЧЕРЕЗ ЖЕСТКИЕ КРУГОВЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ

Получено аналитическое решение задачи о напряженном состоянии пологой изотропной сферической оболочки с двумя круговыми абсолютно жесткими включениями, нагруженными сдвигающими усилиями. Численно исследованы случаи включений равных или неравных радиусов. Выявлено значительное увеличение напряжений в оболочке при уменьшении радиусов включений или перемычки между ними.

Введение. Исследования напряжённого состояния оболочек и пластин с концентраторами напряжений в виде отверстий [1–5, 10–12], включений [1, 3, 6, 8, 9, 12], сосредоточенных [7] и локальных воздействий [1, 3 (гл. 24)] по-прежнему остаются теоретически и практически актуальными.

Аналитические решения и численные результаты оболочек, нагруженных усилием и моментом через жесткую шайбу, получены лишь для случая с одним абсолютно жестким включением для сферической [3] и цилиндрической [1] оболочек.

Однако исследования для оболочек с двумя круговыми абсолютно жесткими включениями при действии равномерного давления [6, 8] показали, что при близком расположении включений между ними может происходить значительное увеличение концентрации напряжений. В этой статье аналитически решена задача для сферической оболочки с двумя равными или неравными круговыми абсолютно жесткими включениями, нагруженными сдвигающими усилиями.

Постановка задачи. Рассмотрим пологую изотропную сферическую оболочку с двумя круговыми абсолютно жесткими включениями, центры которых расположены на одной оси Ox (рис. 1). На недеформируемых контурах включений Γ_q , $q = 1, 2$, ставятся следующие деформационные [1] краевые условия:

$$\varepsilon_{\tau\tau}|_{\Gamma_q} = 0, \quad \alpha_{\tau\tau}|_{\Gamma_q} = 0, \quad \alpha_{\tau\nu}|_{\Gamma_q} = 0, \quad \alpha_{n\tau}|_{\Gamma_q} = 0, \quad q = 1, 2. \quad (1)$$

Предполагаем, что жесткие шайбы нагружены сдвигающими усилиями, составляющая главного вектора которых $F_x^{(q)} \neq 0$.

Возмущенное напряженное состояние, вносимое включениями, будем определять исходя из однородного разрешающего дифференциального уравнения тонких сферических изотропных оболочек, предложенного в [1]:

$$\nabla^2 \nabla^2 U + i \nabla^2 U = 0. \quad (2)$$

Здесь U – искомая комплексная функция; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ – оператор Лапласа в полярной системе координат ρ, θ ; $\rho = \frac{r}{\sqrt{cR}}$ – безразмерный радиус-вектор, $re^{i\theta} = x + iy$; $c = h/\sqrt{12(1-\nu^2)}$; ν – коэффициент Пуассона; R – радиус срединной поверхности оболочки; h – толщина оболочки; i – мнимая единица.

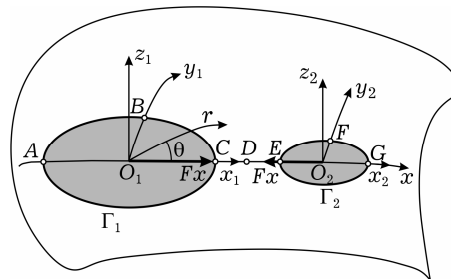


Рис. 1

Решение однородного дифференциального уравнения (2) представим в виде трёх составляющих: цилиндрической, полигармонической и аналитической

$$U = U_c + \frac{R}{2} U_p - \frac{R}{2} U_a.$$

Решения, удовлетворяющие условиям симметрии напряжённого состояния относительно оси Ox и убывающие по абсолютной величине при удалении от Γ_q , имеют вид [1]:

$$U_c(\rho_q, \theta_q) = \sum_{q=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_{qn} H_n^{(1)}(\sigma \rho_q) \cos n\theta_q, \quad (3)$$

$$U_p(\rho_q, \theta_q) = \sum_{q=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{qn} \frac{1}{r_q^n} \cos n\theta_q, \quad (4)$$

$$U_a(z_q) = \sum_{q=1}^2 \left[\alpha_1^{(q)} z_q (1 + 2 \ln z_q) + \bar{\alpha}_2^{(q)} \bar{z}_q (1 + 2 \overline{\ln z_q}) + \beta_1^{(q)} (1 + \ln z_q) + \bar{\beta}_2^{(q)} (1 + \overline{\ln z_q}) + \gamma_1^{(q)} \frac{1}{z_q} + \bar{\gamma}_2^{(q)} \frac{1}{\bar{z}_q} \right]. \quad (5)$$

Здесь c_{qn} , a_{qn} , $\alpha_j^{(q)}$, $\beta_j^{(q)}$, $\gamma_j^{(q)}$ – комплексные неизвестные, $j = 1, 2$;

$H_n^{(1)}(\sigma \rho_q)$ – функция Ханкеля; $\sigma = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\rho_q = \frac{r_q}{\sqrt{cR}}$ – безразмерный радиус-вектор с началом в центре O_q контура Γ_q ; $z_q = r_q e^{i\theta_q}$.

Главный вектор и главный момент внешней нагрузки, приложенной к одной из жёстких шайб Γ_q , определяются согласно [1]:

$$F_x^{(q)} = 2\pi E h c R \operatorname{Im}(\alpha_1^{(q)} - \alpha_2^{(q)}),$$

$$F_y^{(q)} = 2\pi E h c R \operatorname{Re}(\alpha_1^{(q)} - \alpha_2^{(q)}), \quad (6)$$

$$B_x^{(q)} = \pi E h c \operatorname{Re}[(\gamma_1^{(q)} - \gamma_2^{(q)}) + 2icR(1-\nu)(\alpha_1^{(q)} + \alpha_2^{(q)})],$$

$$B_y^{(q)} = \pi E h c \operatorname{Im}[(\gamma_1^{(q)} - \gamma_2^{(q)}) - 2icR(1-\nu)(\alpha_1^{(q)} + \alpha_2^{(q)})], \quad (7)$$

$$F_z^{(q)} = \pi E h c \operatorname{Im}(\beta_1^{(q)} - \beta_2^{(q)}), \quad B_z^{(q)} = \pi E h c R \operatorname{Re}(\beta_2^{(q)} - \beta_1^{(q)}). \quad (8)$$

Следуя [1], необходимо также выполнить условия однозначности комплексных смещений на контурах Γ_q :

$$\alpha_1^{(q)} = -\alpha_2^{(q)}, \quad \beta_1^{(q)} = -\beta_2^{(q)},$$

$$\gamma_1^{(q)} + \gamma_2^{(q)} = -4icR(1+\nu)\bar{\alpha}_1^{(q)}. \quad (9)$$

Комплексные неизвестные постоянные $\alpha_j^{(q)}$, $\beta_j^{(q)}$, $\gamma_j^{(q)}$ определяются из системы уравнений (6)–(9) при задании компонент главного вектора и главного момента внешней нагрузки.

Ограничимся рассмотрением случая, когда жёсткие шайбы нагружены заданными равными и противоположно направленными сдвигающими усилиями $F_x^{(q)} = F_x^0 (-1)^{q+1}$, а $F_z^{(q)} = 0$, $F_y^{(q)} = 0$, $B_x^{(q)} = 0$, $B_y^{(q)} = 0$, $B_z^{(q)} = 0$. Тогда, как очевидно из системы уравнений (6)–(9), имеем

$$\alpha_1^{(q)} = (-1)^{q+1} \frac{iF_x^0}{4\pi E h c R}, \quad \gamma_j^{(q)} = (-1)^q \frac{(1+\nu)F_x^0}{2\pi E h}, \quad \beta_j^{(q)} = 0, \quad (10)$$

и аналитическая часть U_a примет вид:

$$U_a(z_q) = \sum_{q=1}^2 \left\{ \alpha_1^{(q)} [z_q(1 + 2 \ln z_q) + \bar{z}_q(1 + 2 \overline{\ln z_q})] + \gamma_1^{(q)} \left(\frac{1}{z_q} + \frac{1}{\bar{z}_q} \right) \right\}. \quad (11)$$

Для разделения переменных в функции U в q -й системе координат применим методику, предложенную в [1] и основанную на использовании теоремы Графа для цилиндрических функций в (3) и разложений в ряд Лорана каждого из членов степенной (4) и аналитической (11) частей решения. Получим следующие выражения:

$$U_c(\rho_q, \theta_q) = \sum_{q=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ J_n(\sigma \rho_{0q}) e_n \sum_{p=0}^{\infty} e_{np} c_{3-q,p} [H_{n-p}^{(1)}(\sigma \ell) + (-1)^n H_{n+p}^{(1)}(\sigma \ell)] + c_{qn} H_n(\sigma \rho_{0q}) \right\} \cos n \theta_q, \quad (12)$$

$$U_p(r_q, \theta_q) = \sum_{q=1}^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (p+n-1)! r_{0q}^n}{(p-1)! n! L_1^{p+n}} a_{3-q,p} \cos n \theta_q + \sum_{n=1}^{\infty} a_{qn} \frac{1}{r_{0q}^n} \cos n \theta_q \right]. \quad (13)$$

Здесь

$$e_n = \begin{cases} 1/2, & n = 0, \\ 1, & n \neq 0, \end{cases} \quad e_{np} = \begin{cases} 1, & q = 1, \\ (-1)^{n+p}, & q = 2, \end{cases}$$

$J_n(\sigma \rho_{0q})$ – функция Бесселя первого рода; $\rho_{0q} = \frac{r_{0q}}{\sqrt{cR}}$ – безразмерный радиус q -го включения; $\ell = L/\sqrt{cR}$, где L – расстояние между центрами круговых контуров ($O_1 O_2$ на рис. 1); $\ell_1 = \ell(-1)^q$; $L_1 = L(-1)^q$.

Для аналитической (11) части решения получим:

$$U_a(z_q) = \sum_{q=1}^2 \left\{ \alpha_1^{(q)} [z_q(1 + 2 \ln z_q) + \bar{z}_q(1 + 2 \overline{\ln z_q})] + \gamma_1^{(q)} \left(\frac{1}{z_q} + \frac{1}{\bar{z}_q} \right) \right\} - \sum_{q=1}^2 \left\{ \alpha_1^{(q)} [z_q + \bar{z}_q + 2L_1 + 2[U_{2a}(z_q) + \overline{U_{2a}(z_q)}]] + \gamma_1^{(q)} [U_{1a}(z_q) + \overline{U_{1a}(z_q)}] \right\}, \quad (14)$$

где

$$U_{1a}(z_q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{L_1^{n+1}} z_q^n, \\ U_{2a}(z_q) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)L_1^{n-1}} z_q^n + z(1 + \ln L_1) + L_1 \ln L_1.$$

Выражения для деформационных краевых величин, вошедших в (1), имеют вид

$$\varepsilon_{\tau\tau} = T_0 - \nu T_r, \quad \alpha_{\tau\tau} = \frac{6}{h} (G_0 - \nu G_r), \quad \alpha_{\tau\nu} = \frac{6(1+\nu)}{h} H_{r0}, \\ \alpha_{n\tau} = \frac{\partial(T_r + T_0)}{\partial\rho} - \frac{(1+\nu)}{\rho} \frac{\partial S_{r0}}{\partial\theta}. \quad (15)$$

Усилия и моменты, соответствующие решениям (12)–(14), согласно [1] имеют вид

$$\begin{aligned}
T_r &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{Im} \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right), & S_{r\theta} &= \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right), \\
H_{r\theta} &= -(1-\nu)c \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right), & T_\theta &= -\operatorname{Im} \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}, \\
G_r &= -c \operatorname{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\nu}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right), \\
G_\theta &= -(1+\nu)c \operatorname{Re} \nabla^2 U - G_r.
\end{aligned} \tag{16}$$

Подставляя усилия и моменты (16) с учётом (12)–(14) в краевые условия (1), (15) и приравнивая члены при одинаковых гармониках, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно действительных и мнимых частей неизвестных a_{qn} , c_{qn} . Поскольку комплексные неизвестные постоянные $\alpha_j^{(q)}$, $\beta_j^{(q)}$, $\gamma_j^{(q)}$ найдены в (10), то этим также определяются правые части системы.

Для деформационных краевых величин, записанных в виде (15), между коэффициентами при неизвестных постоянных существуют следующие зависимости:

– для нулевой гармоники

$$\rho \cdot \alpha_{\tau\tau}^0 \equiv -\sqrt{3(1-\nu^2)} \alpha_{n\tau}^0, \quad \alpha_{\tau\nu}^0 \equiv 0; \tag{17}$$

– для первой гармоники

$$\alpha_{\tau\tau}^1 \equiv -\alpha_{\tau\nu}^1, \quad \rho^2 \alpha_{\tau\tau}^1 \equiv \sqrt{3(1-\nu^2)} (\varepsilon_{\tau\tau}^1 - \rho \alpha_{n\tau}^1). \tag{18}$$

При построении системы опускаем уравнения, зависимые в соответствии с тождествами (17) и (18). Так, для нулевой гармоники оставляли условия

$$\varepsilon_{\tau\tau}^0 \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \alpha_{\tau\tau}^0 \Big|_{\Gamma_1} = 0,$$

а для первой гармоники ставили условия

$$\varepsilon_{\tau\tau}^1 \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \alpha_{n\tau}^1 \Big|_{\Gamma_1} = 0,$$

или

$$\alpha_{\tau\tau}^1 \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \alpha_{n\tau}^1 \Big|_{\Gamma_1} = 0.$$

Полученную систему решали методом редукции.

Подставляя полученные в результате решения системы значения a_{qn} , c_{qn} в формулы (12)–(14), находим функцию U . Далее по формулам (16) находим в задаваемых точках усилия и моменты, которые ещё при переходе к направлениям σ , τ преобразуются по известным формулам поворота [1].

Были найдены коэффициенты концентрации мембранных и изгибных напряжений

$$\begin{aligned}
k_\theta^T &= \frac{T_\theta}{d}, & k_r^T &= \frac{T_r}{d}, & k_\theta^B &= \frac{6G_\theta}{hd}, & k_r^B &= \frac{6G_r}{hd}, \\
\tau_{r\theta}^T &= \frac{S_{r\theta}}{d}, & \tau_{r\theta}^B &= \frac{6H_{r\theta}}{hd},
\end{aligned}$$

где $d = F_x^0 / 2\pi\sqrt{cR}$, а по ним – и относительные эквивалентные напряжения по энергетической теории прочности [1]:

$$k_\theta = k_\theta^T \pm k_\theta^B, \quad k_r = k_r^T \pm k_r^B, \quad k_{r\theta} = \tau_{r\theta}^T \pm \tau_{r\theta}^B, \\ k_{\text{eq}} = \sqrt{k_r^2 + k_\theta^2 - k_r k_\theta + 3k_{r\theta}^2}. \quad (19)$$

Относительным эквивалентным напряжениям на наружной поверхности оболочки $k_{\text{eq}}^{\text{Ext}}$ в формулах (19) соответствует знак «+», а на внутренней $k_{\text{eq}}^{\text{Int}}$ – знак «-».

Численные исследования проведены для изотропной сферической оболочки с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$ под действием сдвигающих усилий $F_x^{(q)} = F_x^0 (-1)^{q+1}$, приложенных к двум абсолютно жёстким круговым включениям.

Рассмотрим, прежде всего, случай двух одинаковых круговых шайб радиусами $\rho_{01} = \rho_{02} = 0.02$ при $S = 0.2$ (т. е. $L = 0.24$). Здесь и далее приняты следующие обозначения относительных безразмерных величин: ρ_{0q} – радиусы включений; S – ширина перемычки между контурами включений, отнесенная к \sqrt{cR} (CE на рис. 1); $s = S/\rho_{0q}$ – относительная ширина перемычки. Результаты для этого случая представлены на рис. 2 и в табл. 1.

На рис. 2 по вертикальной оси откладывались значения относительных эквивалентных напряжений $k_{\text{eq}}^{\text{Int}}$, относительных тангенциальных k_r^T , k_θ^T и изгибных k_r^B напряжений. По горизонтальной оси рис. 2 приведены значения ρ – расстояния от центра включения O_1 по оси O_1x . Было проведено сравнение с результатами, полученными согласно [7] для сферической оболочки под действием сосредоточенных сил $F_x^{(q)}$, приложенных в точках O_1 , O_2 на таком же расстоянии $L = 0.24$. Наблюдалась аналогичная рис. 2 картина распределения напряжений. При этом посредине перемычки отличие в результатах, полученных этими двумя способами, не превышает 5%, но при приближении к месту приложения сосредоточенных сил отличие увеличивается. Так, при $\rho = 0.04$, т. е. на расстоянии двух радиусов от центра включения O_1 (т. е.

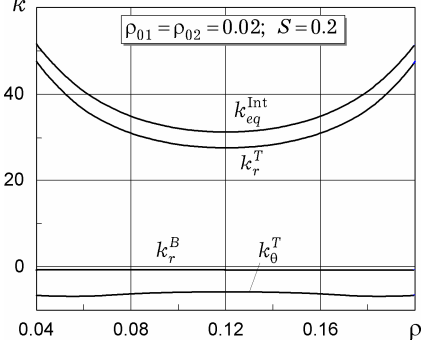


Рис. 2

от точки приложения сосредоточенных сил $F_x^{(q)}$) отличие относительных эквивалентных напряжений $k_{\text{eq}}^{\text{Ext}}$ составляет 9%.

В табл. 1 приведены значения относительных напряжений в точках контура Γ_1 жёсткой шайбы. Здесь и далее обозначено $\theta_q^* = \pi - \theta_q$. Из табл. 1 видно, что при $S = 0.2$ во внутренней точке C напряжения $k_{\text{eq}}^{\text{Int}}$ на 58% больше, чем во внешней точке A , т. е. отсутствуют симметрия напряжений относительно осей Oy_j , а также их локальность, т. к. посредине перемычки в точке D (т. е. на расстоянии шести радиусов ρ_{0j} от центров жёстких шайб O_1 и O_2) напряжения $k_{\text{eq}}^{\text{Int}}$ затухают лишь незначительно и составляют 56% от напряжений в точке C .

Таблица 1

	точка A , $\theta_1^* = 0$	точка B , $\theta_1^* = \pi/2$	точка C , $\theta_1^* = \pi$	точка D , $S/2$
$S = 0.2 \quad (s = 10)$				
k_r^T	-40.599	-2.071	61.499	27.701
k_θ^T	-12.180	-0.621	18.450	-5.698
k_r^B	-1.007	-0.096	-1.159	-0.647
k_θ^B	-0.302	-0.029	-0.348	-0.402
$\tau_{r\theta}^T$	0.000	-48.970	0.000	0.000
k_{eq}^{Ext}	36.980	84.841	53.632	30.563
k_{eq}^{Int}	35.190	84.837	55.692	31.334
$S = 0.4 \quad (s = 20)$				
k_{eq}^{Int}	38.606	86.081	50.979	17.421
$S = 1 \quad (s = 50)$				
k_{eq}^{Int}	41.384	86.516	47.771	7.971
$S = 2 \quad (s = 100)$				
k_{eq}^{Int}	43.12	86.591	45.956	4.503

Из табл. 1 также видно, что аналогичные отличия значений величины k_{eq}^{Int} при $S = 1$ ($s = 50$) составят 15% и 16.7%, а при $S = 2$ ($s = 100$) – 6.5% и 9.8%. Таким образом, лишь при значительном увеличении относительной ширины перемычки $s > 50$ можно считать, что напряженное состояние становится практически симметричным относительно осей Oy_j и затухающим.

Это демонстрирует также и рис. 3, где приведены графики распределения относительных эквивалентных напряжений k_{eq}^{Int} для оболочки с двумя жёсткими шайбами одинаковых радиусов $\rho_{01} = \rho_{02} = 0.01$ при значениях ширины перемычки $s = 0.5, 1, 2, 10, 50, 100$. Параметр η , откладываемый по горизонтальной оси рис. 3, принимает следующие значения: $\eta = \frac{\theta_1^*}{\pi}$ при $0 \leq \eta \leq 1$ (в этом случае параметр η описывает половину контура Γ_1 включения, т. е.

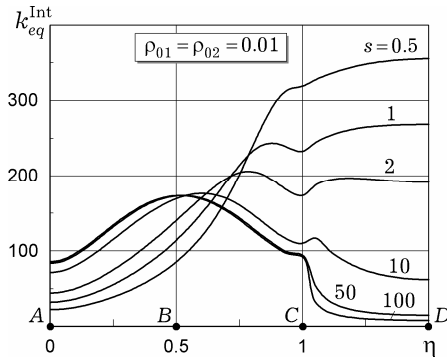


Рис. 3

имеем случай симметрии относительно оси Ox : $0 \leq \theta_1^* \leq \pi$); $\eta = 1 + \frac{x_1 - r_{01}}{S}$ при $1 \leq \eta \leq 1.5$ – по перемычке S до её половины, т. е., когда $x_1 \in \left[r_{01}, r_{01} + \frac{S}{2} \right]$.

При сопоставлении табл. 1 и рис. 3 видно, что при уменьшении радиусов шайб концентрация напряжений на контурах шайб и на перемычке может возрастать в несколько раз.

Из рис. 3 также видим, что при уменьшении ширины перемычки может происходить значительное увеличение наибольших относительных эквивалентных напряжений k_{eq}^{Int} на перемычке и на контурах шайб. При

этом зона опасных напряжений смещается на перемычку. Так, при уменьшении ширины перемычки от $s = 50$ до $s = 1$ напряжения $k_{\text{eq}}^{\text{Int}}$ увеличиваются в 1.5 раза в точке B , в 1.8 раза – в точке D и уменьшаются в 2.5 раза в точке C .

Численные исследования были проведены также для сферической оболочки с двумя *неравными* жёсткими шайбами при различных значениях радиусов ($\rho_{01} \neq \rho_{02}$) и ширины перемычки S . Результаты для этих случаев представлены на рис. 4, рис. 5 и в табл. 2, 3.

На рис. 4 и рис. 5 параметр η , откладываемый по горизонтальной оси, принимает следующие значения: $\eta = 2q - 2 + \frac{\theta_q^*}{\pi}$ при $2(q-1) \leq \eta \leq 2q-1$ (описывает половину контура Γ_q включения, $q = 1, 2$, т.е. случай симметрии относительно оси Ox : $0 \leq \theta_q^* \leq \pi$); $\eta = 1 + \frac{x_1 - r_{01}}{S}$ при $1 \leq \eta \leq 2$ – по перемычке S , т.е., когда $x_1 \in [r_{01}, r_{01} + S]$; $\eta = q + \frac{x_q}{r_{0q}}$ при удалении от контура Γ_q по оси Ox_q на расстояние до $5r_{0q}$ т.е., когда $-5 \leq x_1 \leq 0$ или $3 \leq x_2 \leq 8$.

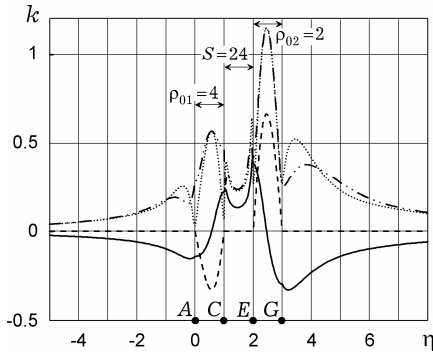


Рис. 4

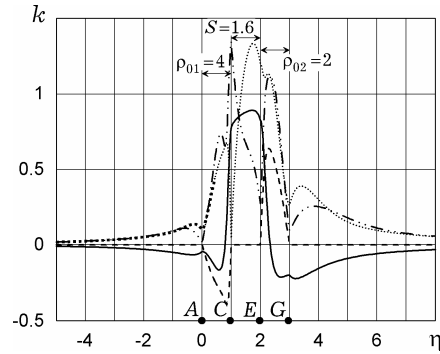


Рис. 5

На рис. 4, рис. 5 приведены графики распределения напряжений для оболочки с двумя жёсткими шайбами радиусами $\rho_{01} = 4$ и $\rho_{02} = 2$ соответственно при значениях ширины перемычки $S = 24$ и $S = 1.6$. На рис. 4, рис. 5 показаны относительные тангенциальные напряжения: k_r^T – сплошными линиями, относительные эквивалентные напряжения на внутренней поверхности $k_{\text{eq}}^{\text{Int}}$ – пунктирными, тангенциальные напряжения τ_{r0}^T – штриховыми линиями и относительные эквивалентные напряжения на наружной поверхности оболочки $k_{\text{eq}}^{\text{Ext}}$ – длинными штрих-двух-пунктирными линиями.

Из графиков на рис. 4 и табл. 2 видно, что при больших значениях ширины перемычки ($S = 24$ и $S = 30$ соответственно) на контуре меньшей шайбы, $\rho_{02} = 2$, концентрация относительных эквивалентных напряжений $k_{\text{eq}}^{\text{Int}}$ выше (почти вдвое), чем на шайбе большего радиуса. Но из рис. 5 и табл. 2 видно, что при уменьшении ширины перемычки ($S = 1.6$ и $S = 0.3$ соответственно) происходит увеличение относительных эквивалентных напряжений на ней и вблизи шайбы большего радиуса $\rho_{01} = 4$. При этом видно, что наибольший вклад вносят мембранные напряжения k_r^T .

Таблица 2

		$\rho_{01} = 4$			$\rho_{02} = 2$			
		точка A	точка B	точка C	точка D	точка E	точка F	точка G
$S = 30$	k_r^T	-0.146	-0.033	0.213	0.112	0.375	-0.035	-0.304
	k_θ^T	-0.044	-0.010	0.064	-0.112	0.112	-0.011	-0.091
	k_r^B	-0.184	-0.050	0.286	0.001	0.077	-0.038	-0.001
	k_θ^B	-0.055	-0.015	0.086	-0.001	0.023	-0.011	0.000
	$\tau_{r\theta}^T$	0.000	-0.320	0.000	0.000	0.000	0.661	0.000
	k_{eq}^{Ext}	0.293	0.560	0.444	0.195	0.402	1.146	0.271
	k_{eq}^{Int}	0.033	0.555	0.065	0.191	0.265	1.144	0.269
$S = 0.3$	k_r^T	-0.027	-0.176	1.659	1.688	1.681	-0.143	-0.197
	k_θ^T	-0.008	-0.053	0.498	0.418	0.504	-0.043	-0.059
	k_r^B	0.116	-0.445	-0.172	-0.920	-1.689	-0.383	-0.058
	k_θ^B	0.035	-0.133	-0.052	-0.305	-0.507	-0.115	-0.017
	$\tau_{r\theta}^T$	0.000	-0.230	0.000	0.000	0.000	0.391	0.000
	k_{eq}^{Ext}	0.079	0.681	1.321	0.718	0.007	0.823	0.226
	k_{eq}^{Int}	0.127	0.465	1.627	2.332	2.995	0.711	0.124

В табл. 3 приведены значения относительных напряжений для оболочки с двумя жёсткими шайбами меньших, чем в табл. 2 радиусов: $\rho_{01} = 3$ и $\rho_{02} = 1$ при значениях ширины перемычки $S = 20$ и $S = 0.2$. При сопоставлении табл. 2 и табл. 3 видно, что при уменьшении радиусов шайб концентрация напряжений вблизи них и на перемычке возрастает.

Таблица 3

		$\rho_{01} = 3$			$\rho_{02} = 1$			
		точка A	точка B	точка C	точка D	точка E	точка F	точка G
$S = 20$	k_r^T	-0.179	-0.051	0.284	0.168	0.857	-0.057	-0.743
	k_θ^T	-0.054	-0.015	0.085	-0.168	0.257	-0.017	-0.223
	k_r^B	-0.122	-0.070	0.266	0.004	-0.292	-0.037	0.365
	k_θ^B	-0.037	-0.021	0.080	-0.004	-0.088	-0.011	0.110
	$\tau_{r\theta}^T$	0.000	-0.436	0.000	0.000	0.000	1.200	0.000
	k_{eq}^{Ext}	0.268	0.762	0.488	0.298	0.502	2.080	0.335
	k_{eq}^{Int}	0.050	0.755	0.016	0.284	1.022	2.079	0.985
$S = 0.2$	k_r^T	-0.038	-0.222	3.344	3.437	3.438	-0.198	-0.448
	k_θ^T	-0.012	-0.067	1.003	0.815	1.031	-0.059	-0.134
	k_r^B	0.177	-0.588	-1.035	-2.186	-3.574	-0.420	-0.249
	k_θ^B	0.053	-0.177	-0.310	-0.744	-1.072	-0.126	-0.075
	$\tau_{r\theta}^T$	0.000	-0.240	0.000	0.000	0.000	0.600	0.000
	k_{eq}^{Ext}	0.123	0.832	2.053	1.216	0.121	1.176	0.619
	k_{eq}^{Int}	0.191	0.528	3.892	5.028	6.233	1.058	0.176

Достоверность полученных результатов.

– Проверялась точность удовлетворения граничных условий путём непосредственного вычисления заданных усилий и моментов в точках контуров с использованием рядов (3)–(5), (11), т. е. без применения теоремы Графа и ряда Лорана. Вычисления проводились на РС в среде пакета Maple. Точность вычислений можно регулировать, задавая значение системной переменной Digits, а также – число гармоник n в решениях. Так, при $n = 30$ и Digits = 70 для случаев, представленных в табл. 2, при численной реализации абсолютная погрешность выполнения граничных условий при $S = 30$ не превышала 10^{-28} , а при $S = 0.3 - 10^{-2}$, а в случаях, представленных в табл. 3 при $\rho_{01} = 3$, абсолютная погрешность выполнения граничных условий при $S = 20$ и $S = 0.2$ не превышала соответственно 10^{-26} и 10^{-1} . Заметим, что на меньшем контуре точность выполнения граничных условий повышалась: так, в последнем случае на контуре $\rho_{02} = 1$ она составляла 10^{-5} . (При этом максимальное значение напряжений не превышало 7.)

– Проверялась точность выполнения дифференциального уравнения (1) функцией U с коэффициентами, определёнными после решения системы. Абсолютная погрешность не превышала 10^{-66} при Digits = 70.

– После решения системы вычислялись составляющие главного вектора и главного момента, определяемые как интегралы в соответствии с [1]. Получено хорошее совпадение с заданными компонентами: при Digits = 70 абсолютная погрешность не превышала 10^{-68} . (При этом максимальное значение компонент не превышало 2π .)

– При расчётах с весьма малыми относительными радиусами жёстких включений ($\rho_{01} = \rho_{02} = 0.02$) наблюдалось, что в рассмотренном здесь случае (с распределённой по шайбе нагрузкой) напряжённое состояние весьма близко приближается к случаю сосредоточенной силы, рассчитанному согласно [7].

Заключение. Приведенные в данной работе численные исследования для сферической оболочки с двумя круговыми жёсткими включениями, нагруженными сдвигающими усилиями, показали, что при уменьшении ширины перемычки между включениями и их радиусов относительные эквивалентные напряжения на них возрастают и могут увеличиться в несколько раз.

Результаты работы вместе с разработанной в среде Maple программой расчетов могут быть использованы в инженерной практике для определения величины напряжений и зоны их затухания в сферической оболочке, нагруженной через жёсткие шайбы.

1. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов Вал. Н., Чехов Вик. Н., Шнеренко К. И. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. – Киев: Наук. думка, 1980. – 636 с. – Методы расчета оболочек: В 5 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 1.
2. Панасюк В. В., Саврук М. П. До питання про визначення концентрації напружень у розтягнутій пластині з двома отворами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 2. – С. 112–123.
То же: Panasyuk V. V., Savruk M. P. On the problem of determination of stress concentration in a stretched plate with two holes // J. Math. Sci. – 2009. – 162, No. 1. – P. 132–148.
3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник: В 3 т. / Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. – Москва: Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 831 с.)

4. Руденко І. Б. Рівновага пружно-пластичної сферичної оболонки з двома різними круговими отворами // Проблеми обчисл. механіки і міцності конструкцій. – 2011. – Вип. 15. – С. 156–161.
5. Сало В. А., Корниенко А. В. Расчет напряженного состояния упругой оболочки с периодической системой круглых отверстий // Вопросы проектирования и производства конструкций летат. аппаратов. – 2011. – Вып. 1. – С. 76–82.
6. Чехов В. Н., Загора С. В. Концентрация напряжений трансверсально-изотропной сферической оболочки с двумя круговыми жесткими включениями // Прикл. механика. – 2011. – 47, № 4. – С. 111–118.
То же: Chekhov V. N., Zakora S. V. Stress concentration in a transversely isotropic spherical shell with two circular rigid inclusions // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, No. 4. – P. 441–448.
7. Шевченко В. П. К решению задачи статики пологих оболочек под действием локальных нагрузок // Прикл. механика. – 1971. – 7, № 6. – С. 37–42.
То же: Shevchenko V. P. On the solution of static problems for shallow shells under the actions of local loads // Int. Appl. Mech. – 1971. – 7, No. 6. – P. 612–616.
8. Шевченко В. П., Загора С. В. Про взаємовплив близько розміщених кругових отворів із жорсткими контурами у сферичній оболонці // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 4. – С. 160–165.
То же: Shevchenko V. P., Zakora S. V. On the mutual influence of closely located circular holes with rigid contours in a spherical shell // J. Math. Sci. – 2011. – 174, No. 3. – P. 322–330.
9. Deryugin Y. Y., Lasko G. V. Field of stresses in an isotropic plane with circular inclusion under tensile stress // Engineering. – 2012. – 4, No. 9. – P. 583–589.
10. Fuad Kh., Siregar R. A., Rangkuti Ch., Ariwahjoedi B., Firdaus M. Stress concentration factors of various adjacent holes configurations in a spherical pressure vessel // Proc. 5th Australasian Congr. on Appl. Mech, ACAM-2007, 10–12 Dec. 2007, Brisbane, Australia. – P. 68–73.
11. Kubair D. V., Bhanu-Chandar B. Stress concentration factor due to a circular hole in functionally graded panels under uniaxial tension // Int. J. Mech. Sci. – 2008. – 50, No. 4. – P. 732–742.
12. Miyagawa M., Suzuki T., Shimura J. Analysis of in-plane problems with singular disturbances for an isotropic elastic medium with two circular holes or rigid inclusions // J. Environment and Engineering. – 2011. – 6, No. 4. – P. 778–791.

НАПРУЖЕННЯ У ПОЛОГІЙ СФЕРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ, НАВАНТАЖЕНІЙ ДВОМА ТАНГЕНЦІАЛЬНИМИ ЗУСИЛЛЯМИ ЧЕРЕЗ ЖОРСТКІ КРУГОВІ ВКЛЮЧЕННЯ

Отримано аналітичний розв'язок задачі про напружений стан пологої ізотропної сферичної оболонки з двома круговими абсолютно жорсткими включеннями, навантаженими зсувними зусиллями. Чисельно досліджено випадки включень однакової і різних радіусів. Виявлено значне збільшення напружень в оболонці при зменшенні радіуса включення або розміру перемички між жорсткими включеннями.

STRESSES IN SHALLOW SPHERICAL SHELL LOADED BY TWO TANGENTIAL FORCES THROUGH RIGID CIRCULAR INCLUSIONS

The problem of the stress state in isotropic shallow spherical shell with two circular rigid inclusions which are loaded by tangential forces is solved analytically. The cases of two equal or unequal inclusions are analyzed numerically. The stresses are increasing considerably at decreasing of inclusions or the distance between them.

¹ Тавричеськ. нац. ун-т
им. В. І. Вернадського, Симферополь,
² Донецьк. нац. ун-т, Донецьк

Получено
14.12.12