

РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ПОВЗУЧОСТІ ТА ПОШКОДЖУВАНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ТІЛА З ДОВІЛЬНОЮ ФОРМОЮ МЕРИДІОНАЛЬНОГО ПЕРЕРІЗУ

Розглянуто осесиметричну задачу повзучості та пошкоджуваності внаслідок повзучості для кусково-однорідних тіл з довільною формою меридіонального перерізу. Розроблено метод розв'язання початково-крайової задачі, який базується на спільному застосуванні методів R-функцій і Рунге – Кутта – Мерсона. Побудовано структури розв'язку для основних типів крайових умов. Наведено приклад розрахунку повзучості та тривалої міцності тришарового циліндра, який є розрахунковою схемою твердооксидного паливного елемента.

Стан проблеми. Постановка початково-крайової задачі повзучості.

Задачі розрахунку напружено-деформованого стану та міцності кусково-однорідних циліндричних тіл досить широко представлені у вітчизняній та іноземній літературі. У той же час нелінійне деформування кусково-однорідних тіл, зокрема, задачі повзучості та пошкоджуваності досліджені недостатньо. Це пов'язано зі складністю розв'язування нелінійних початково-крайових задач для кусково-однорідних систем та із труднощами, пов'язаними з побудовою визначальних співвідношень, які повинні враховувати різноманітні ефекти деформування сучасних матеріалів. Окрім того, практичні розрахунки повзучості, пошкоджуваності та тривалої міцності часто потребують урахування складної геометричної форми тіла або меж розділу його складових частин.

Розглянемо тіло обертання скінченних розмірів, віднесене до циліндричної системи координат $Oz\varphi$, яке складається з M складових частин V_1, V_2, \dots, V_M ($V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_M$), жорстко з'єднаних між собою. Тіло знаходиться під дією зовнішніх поверхневих навантажень, прикладених на частині S_p поверхні тіла та температурного поля $T = T(r, z, t)$. Розподіл навантажень на S_p і заданих кінематично можливих переміщень на поверхні S_u є такими, що шуканий розв'язок не залежить від φ . Зовнішні сили та температура змінюються з часом настільки повільно, що інерційними членами в рівняннях руху можна знехтувати. Деформації тіла в процесі повзучості залишаються малими.

Межі розділу сусідніх частин тіла V_a, V_b позначимо через ∂V_{ab} . Вісь Oz збігається з віссю обертання. Переріз тіла в площині rOz має форму області Ω з межею $\partial\Omega$. Область Ω є об'єднанням складових областей Ω_k , $k = 1, \dots, M$, з межами $\partial\Omega_k$. На частинах межі $\partial\Omega_u$ та $\partial\Omega_p$ задано швидкості переміщень і зовнішні навантаження відповідно. Межу розділу сусідніх областей Ω_a, Ω_b позначимо через $\partial\Omega_{ab}$, а сторони поверхні $\partial\Omega_{ab}$, що належать Ω_a та Ω_b , – через $\partial\Omega_{ab}^*$ та $\partial\Omega_{ba}^*$ відповідно. Вважаємо, що матеріали складових частин тіла є ізотропними, а геометричні та механічні характеристики кожної частини не залежать від кутової координати φ .

Компоненти тензора швидкостей повних деформацій $\dot{\epsilon}_{ij}$ складаються з компонентів тензорів швидкостей пружних $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ і температурних $\dot{\epsilon}_{ij}^T$ деформацій, а також компонентів тензора швидкостей незворотних деформацій повзучості \dot{p}_{ij} :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^T + \dot{p}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

У циліндричній системі координат маємо

$$\dot{\varepsilon}_r(r, z, t) = \dot{\varepsilon}_r^e(r, z, t) + \dot{\varepsilon}_r^T(r, z, t) + \dot{p}_r(r, z, t),$$

$$\dot{\varepsilon}_z(r, z, t) = \dot{\varepsilon}_z^e(r, z, t) + \dot{\varepsilon}_z^T(r, z, t) + p_z(r, z, t),$$

$$\dot{\varepsilon}_\varphi(r, z, t) = \dot{\varepsilon}_\varphi^e(r, z, t) + \dot{\varepsilon}_\varphi^T(r, z, t) + \dot{p}_\varphi(r, z, t),$$

$$\dot{\varepsilon}_{rz}(r, z, t) = \dot{\varepsilon}_{rz}^e(r, z, t) + \dot{\varepsilon}_{rz}^T(r, z, t) + \dot{p}_{rz}(r, z, t).$$

Тут крапкою над символом позначено повну похідну за часом t .

Температурні деформації обчислюються за формулою

$$\varepsilon_r^T = \varepsilon_z^T = \varepsilon_\varphi^T = \alpha(T - T_0), \quad \varepsilon_{rz}^T = 0,$$

де $T = T(r, z, t)$ – температура; $\alpha = \alpha(r, z, T)$ – коефіцієнт лінійного температурного розширення; T_0 – температура, за якої напруження та деформації відсутні. Вважаємо, що розподіл температури $T(r, z, t)$ є заданим або відомим із розв'язку задачі нестационарної теплопровідності.

Визначальні співвідношення повзучості та кінетичні рівняння для параметрів стану, в рамках теорії структурних параметрів Ю. М. Работнова, у загальному випадку для матеріалу k -ї складової частини тіла можна записати у вигляді [3]

$$\dot{p}_{ij}^k = f_{ij}^k(\sigma_{ek}, \psi_k, q_{1k}, q_{2k}, \dots, q_{Nk}),$$

$$\dot{\psi}_k = g_k(\sigma_{e1k}, \psi_k, q_{1k}, q_{2k}, \dots, q_{Nk}),$$

$$\dot{q}_{ik} = h_{ik}(\sigma_{e2k}, \psi_k, q_{1k}, q_{2k}, \dots, q_{Nk}).$$

Тут $\sigma_{ek}, \sigma_{e1k}, \sigma_{e2k}, k = 1, \dots, M$, – еквівалентні напруження, $\psi_k, q_{ik} \quad i = 1, \dots, N$, – скалярні параметри пошкоджуваності та структурні параметри стану.

Крайова задача повзучості та пошкоджуваності внаслідок повзучості для осесиметрично навантаженого тіла обертання скінченних розмірів у довільний момент часу $t \neq 0$ може бути зведена до варіаційної проблеми знаходження мінімуму функціонала у формі Лагранжа [1]:

$$\begin{aligned} \Lambda(\dot{\mathbf{U}}) = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \iint_{\Omega_i} \left[\lambda_{1i} (\dot{u}_{r,r}^2 + \dot{u}_{z,z}^2 + \dot{u}_r^2 r^{-2}) + G_i (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r})^2 + \right. \\ & \left. + 2\lambda_i (\dot{u}_{r,r} \dot{u}_{z,z} + \dot{u}_r (\dot{u}_{r,r} + \dot{u}_{z,z}) r^{-1}) \right] r dr dz - \\ & - \sum_{i=1}^M \iint_{\Omega_i} \left[\dot{u}_{r,r} \dot{N}_{ri}^f + \dot{u}_{z,z} \dot{N}_{zi}^f + \dot{u}_r \dot{N}_{\varphi i}^f r^{-1} + \right. \\ & \left. + \dot{N}_{rzi}^f (\dot{u}_{r,z} + \dot{u}_{z,r}) \right] r dr dz - \int_{\partial\Omega_p} (\dot{P}_n^0 \dot{u}_n + \dot{P}_\tau^0 \dot{u}_\tau) d\partial\Omega, \quad (1) \end{aligned}$$

де $\dot{\mathbf{U}}(r, z, t) = (\dot{u}_r(r, z, t), \dot{u}_z(r, z, t))$ – вектор швидкостей переміщень; $\dot{u}_r(r, z, t), \dot{u}_z(r, z, t)$ – швидкості переміщень уздовж осей Or та Oz відповідно, які є неперервними в Ω і задовольняють кінематичні граничні умови

на $\partial\Omega_u$; $\dot{P}_n^0(r, z, t)$, $\dot{P}_\tau^0(r, z, t)$ – швидкості нормальної і дотичної складових зовнішніх поверхневих сил; \dot{N}_r^f , \dot{N}_z^f , \dot{N}_{rz}^f – швидкості «фіктивних» зусиль; \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ – зовнішня нормаль та дотична до $\partial\Omega$; $\dot{u}_n = \dot{u}_r n_1 + \dot{u}_z n_2$, $\dot{u}_\tau = \dot{u}_z n_1 - \dot{u}_r n_2$ – нормальна та тангенціальна складові вектора швидкостей переміщень; n_1 , n_2 – напрямні косинуси нормалі \mathbf{n} ; $\lambda_i = \lambda_i(r, z, T) = \frac{E_i \nu_i}{(1 - 2\nu_i)(1 + \nu_i)}$, $\lambda_{1i} = \lambda_i + 2G_i$, $G_i = G_i(r, z, T) = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)}$; $E_i = E_i(r, z, T)$, $\nu_i = \nu_i(r, z, T)$, $i = 1, \dots, M$, – пружні характеристики, які в загальному випадку є неперервними функціями координат і температури у межах кожної складової частини тіла.

Швидкості «фіктивних» зусиль, зумовлені деформаціями повзучості та температурними деформаціями, в i -й складовій частині тіла обчислюються за формулами

$$\begin{aligned}\dot{N}_{ri}^f &= [\lambda_{1i} \dot{e}_{ri} + \lambda_i (\dot{e}_{zi} + \dot{e}_{\phi i})], & \dot{N}_{zi}^f &= [\lambda_{1i} \dot{e}_{zi} + \lambda_i (\dot{e}_{ri} + \dot{e}_{\phi i})], \\ \dot{N}_{\phi i}^f &= [\lambda_{1i} \dot{e}_{\phi i} + \lambda_i (\dot{e}_{ri} + \dot{e}_{zi})], & \dot{N}_{rzi}^f &= 2G_i \dot{e}_{rzi},\end{aligned}\quad (2)$$

де

$$\begin{aligned}\dot{e}_{ri} &= \dot{p}_{ri} + \dot{\varepsilon}_{ri}^T, & \dot{e}_{zi} &= \dot{p}_{zi} + \dot{\varepsilon}_{zi}^T, & \dot{e}_{\phi i} &= \dot{p}_{\phi i} + \dot{\varepsilon}_{\phi i}^T, \\ \dot{e}_{rzi} &= \dot{p}_{rzi}, & \dot{\varepsilon}_{ri}^T &= \dot{\varepsilon}_{zi}^T = \dot{\varepsilon}_{\phi i}^T = \alpha_i \dot{T},\end{aligned}$$

а \dot{p}_{ri} , \dot{p}_{zi} , $\dot{p}_{\phi i}$, $2\dot{p}_{rzi}$ залежать від вигляду визначальних співвідношень повзучості матеріалу відповідної складової частини.

Якщо є відомим діапазон зміни температури $T \in [T_1, T_2]$ та значення пружних характеристик матеріалів складових частин тіла V_j , $j = 1, \dots, M$, за температур T_1 , T_2 , то для модулів Юнга E_j , модулів зсуву G_j , коефіцієнтів Пуассона ν_j , а також для коефіцієнтів лінійного температурного розширення α_j можна прийняти найпростішу лінійну інтерполяцію:

$$F_j(r, z, T) = K_{1j}(r, z) + K_{2j}(r, z)T,$$

де коефіцієнти K_{1j} , K_{2j} мають вигляд

$$\begin{aligned}K_{1j}(r, z) &= \frac{T_2 F_j(r, z, T_1) - T_1 F_j(r, z, T_2)}{T_2 - T_1}, \\ K_{2j}(r, z) &= \frac{F_j(r, z, T_2) - F_j(r, z, T_1)}{T_2 - T_1}.\end{aligned}$$

Тут $F_j(r, z, T_1)$, $F_j(r, z, T_2)$ – значення будь-якої пружної характеристики або коефіцієнта лінійного температурного розширення за температур T_1 та T_2 відповідно.

Швидкості деформацій повзучості в функціоналі (1) вважаються заданими і не варіюються.

На основі функціонала (1) можна сформулювати функціонал в формі Лагранжа, визначений в просторі векторів швидкостей переміщень вигляду $\dot{\mathbf{U}}_k(r, z, t) = (\dot{u}_{rk}(r, z, t), \dot{u}_{zk}(r, z, t))$, $k = 1, \dots, M$:

$$\begin{aligned}
\Pi(\dot{\mathbf{U}}_1, \dot{\mathbf{U}}_2, \dots, \dot{\mathbf{U}}_M) = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \iint_{\Omega_k} [\lambda_{1k} (\dot{u}_{rk,r}^2 + \dot{u}_{zk,z}^2 + \dot{u}_{rk}^2 r^{-2}) + G_k (\dot{u}_{rk,z} + \\
& + \dot{u}_{zk,r})^2 + 2\lambda_k (\dot{u}_{rk,r} \dot{u}_{zk,z} + \dot{u}_{rk} (\dot{u}_{rk,r} + \dot{u}_{zk,z}) r^{-1})] r dr dz - \\
& - \sum_{k=1}^M \iint_{\Omega_k} [\dot{u}_{rk,r} \dot{N}_{rk}^f + \dot{u}_{zk,z} \dot{N}_{zk}^f + \dot{u}_{rk} \dot{N}_{\phi k}^f r^{-1} + \\
& + \dot{N}_{rz k}^f (\dot{u}_{rk,z} + \dot{u}_{zk,r})] r dr dz - \sum_s \int_{\partial\Omega_{ps}} (\dot{P}_n^0 \dot{u}_{ns} + \dot{P}_\tau^0 \dot{u}_{\tau s}) d\partial\Omega. \quad (3)
\end{aligned}$$

Тут $\lambda_k, \lambda_{1k}, G_k$ – функції пружних характеристик k -ї складової частини; $\dot{u}_{rk}(r, z, t), \dot{u}_{zk}(r, z, t), k = 1, \dots, M$, – швидкості радіальних та осьових переміщень в k -й складовій частині; s – номер складової частини тіла, до якої прикладені зовнішні сили; швидкості «фіктивних» зусиль у k -й складовій частині тіла обчислюються за формулами (2).

Сукупність функцій швидкостей переміщень $\dot{u}_{rk}(r, z, t), \dot{u}_{zk}(r, z, t)$ повинна задовольняти такі умови:

1°) бути неперервними у відповідних складових областях $\Omega_k, k = 1, \dots, M$;

2°) співпадати на межах сусідніх областей:

$$\dot{u}_{ra}(r, z, t) = \dot{u}_{rb}(r, z, t), \quad \dot{u}_{za}(r, z, t) = \dot{u}_{zb}(r, z, t) \quad \text{на} \quad \partial\Omega_{ab};$$

3°) задовольняти кінематичні крайові умови, якщо відповідна складова частина V_ℓ примикає до межі тіла:

$$\dot{u}_{r\ell}(r, z, t) = \dot{f}_{r\ell}^0, \quad \dot{u}_{z\ell}(r, z, t) = \dot{f}_{z\ell}^0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega_{u\ell}.$$

Тут $\dot{f}_{r\ell}^0, \dot{f}_{z\ell}^0$ – задані функції.

На межах сусідніх областей $\partial\Omega_{ab}$ повинні виконуватися умови рівноваги:

$$\sigma_{na}^a(r, z) - \sigma_{nb}^b(r, z) = 0, \quad \tau_{na}^a(r, z, t) - \tau_{nb}^b(r, z) = 0, \quad (4)$$

де $\sigma_{na}^a(r, z), \sigma_{nb}^b(r, z), \tau_{na}^a(r, z, t), \tau_{nb}^b(r, z)$ – нормальні та дотичні напруження, що діють на поверхнях $\partial\Omega_{ab}^*$ та $\partial\Omega_{ba}^*$ відповідно; $\mathbf{n}_a, \mathbf{n}_b$ – зовнішні нормалі до поверхонь $\partial\Omega_{ab}^*, \partial\Omega_{ba}^*, \mathbf{n}_a = -\mathbf{n}_b$.

Умови (4) можна отримати як умови стаціонарності або, інакше кажучи, як природні крайові умови функціонала (3), якщо функції $\dot{u}_{ra}, \dot{u}_{za}, \dot{u}_{rb}, \dot{u}_{zb}$ задовольняють умови 1°, 2°.

Основні невідомі задачі повзучості та пошкоджуваності внаслідок повзучості в довільній точці тіла можна знайти із розв'язку задачі Коші за часом для системи диференціальних рівнянь, яка для j -ї складової частини тіла має вигляд:

$$\begin{aligned}
\frac{du_{rj}}{dt} &= \dot{u}_{rj}, & \frac{du_{zj}}{dt} &= \dot{u}_{zj}, \\
\frac{d\varepsilon_{rj}}{dt} &= \dot{u}_{rj,r}, & \frac{d\varepsilon_{zj}}{dt} &= \dot{u}_{zj,z}, \\
\frac{d\varepsilon_{\phi j}}{dt} &= \frac{\dot{u}_{rj}}{r}, & \frac{d\gamma_{rzj}}{dt} &= 2 \frac{d\varepsilon_{rzj}}{dt} = \dot{u}_{rj,z} + \dot{u}_{zj,r},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{rj}}{dt} &= \lambda_j(\dot{\varepsilon}_{zj} + \dot{\varepsilon}_{\varphi j} - \dot{e}_{zj} - \dot{e}_{\varphi j}) + \lambda_{1j}(\dot{\varepsilon}_{rj} - \dot{e}_{rj}), \\
\frac{d\sigma_{zj}}{dt} &= \lambda_j(\dot{\varepsilon}_{rj} + \dot{\varepsilon}_{\varphi j} - \dot{e}_{rj} - \dot{e}_{\varphi j}) + \lambda_{1j}(\dot{\varepsilon}_{zj} - \dot{e}_{zj}), \\
\frac{d\sigma_{\varphi j}}{dt} &= \lambda_j(\dot{\varepsilon}_{rj} + \dot{\varepsilon}_{zj} - \dot{e}_{rj} - \dot{e}_{zj}) + \lambda_{1j}(\dot{\varepsilon}_{\varphi j} - \dot{e}_{\varphi j}), \\
\frac{d\sigma_{rzj}}{dt} &= G_j(\dot{\gamma}_{rzj} - 2\dot{e}_{rzj}), & \frac{dp_{rj}}{dt} &= \dot{p}_{rj}, & \frac{dp_{zj}}{dt} &= \dot{p}_{zj}, \\
\frac{dp_{\varphi j}}{dt} &= \dot{p}_{\varphi j}, & \frac{dp_{rzj}}{dt} &= \dot{p}_{rzj}, & \frac{d\psi_j}{dt} &= \dot{\psi}_j, & \frac{dq_{ij}}{dt} &= \dot{q}_{ij}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Початкові умови для шуканих функцій, в момент часу $t = 0$, знаходяться із розв'язку задачі пружного деформування. Для розв'язку пружної задачі може бути використаний функціонал вигляду (1) або (3). При цьому у формулі для функціонала необхідно замінити похідні функцій за часом самими функціями, а при обчисленні «фіктивних» зусиль за формулами (2) покласти деформації повзучості рівними нулеві.

Метод розв'язання. Структури розв'язку. Початкову задачу (5) будемо розв'язувати методом Рунге – Кутта – Мерсона з автоматичним вибором кроку [2]. Варіаційні задачі для функціонала (1) або (3) у моменти часу, що відповідають схемі Рунге – Кутта – Мерсона, розв'язуються методом Рітца в комбінації з методом R -функцій [4, 5]. Метод R -функцій дозволяє точно враховувати геометрію області та граничні умови найбільш загального типу. При цьому наближений розв'язок крайової задачі подається у вигляді формули – структури розв'язку, яка точно задовольняє всі (загальна структура розв'язку) або частину (часткова структура розв'язку) граничних умов і є інваріантною стосовно форми області Ω . Структури розв'язку є основою для побудови систем координатних функцій варіаційних методів.

Розглянемо деякі умови закріплення, відповідні їм граничні умови та структури розв'язку в рамках постановки крайової задачі на основі функціонала (1).

Нехай на частині межі $\partial\Omega_u$ області Ω задано швидкості переміщень:

$$\dot{u}_r(r, z, t) = \dot{f}_r^0, \quad \dot{u}_z(r, z, t) = \dot{f}_z^0. \tag{6}$$

Припустимо також, що інша частина межі $\partial\Omega_p$, де прикладені зовнішні зусилля, відноситься до m -ї складової частини тіла і на ній задані швидкості нормальних та дотичних напружень:

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_n &= \dot{\sigma}_r n_1^2 + 2\dot{\sigma}_{rz} n_1 n_2 + \dot{\sigma}_z n_2^2 = \dot{P}_n^0, \\
\dot{\tau}_n &= (\dot{\sigma}_z - \dot{\sigma}_r) n_1 n_2 + \dot{\sigma}_{rz} (n_1^2 - n_2^2) = \dot{P}_\tau^0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Умови (7) можна записати через швидкості переміщень [1]:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1m}(\dot{u}_{r,n} n_1 + \dot{u}_{z,n} n_2) + \lambda_m(\dot{u}_{z,\tau} n_1 - \dot{u}_{r,\tau} n_2) + \lambda_m \frac{\dot{u}_r}{r} &= \dot{P}_n^0 + \dot{P}_n^f, \\
G_m(\dot{u}_{r,\tau} n_1 - \dot{u}_{r,n} n_2 + \dot{u}_{z,n} n_1 + \dot{u}_{z,\tau} n_2) &= \dot{P}_\tau^0 + \dot{P}_\tau^f,
\end{aligned} \tag{8}$$

де $\dot{P}_n^f = \dot{N}_r^f n_1^2 + 2\dot{N}_{rz}^f n_1 n_2 + \dot{N}_z^f n_2^2$, $\dot{P}_\tau^f = (\dot{N}_z^f - \dot{N}_r^f) n_1 n_2 + \dot{N}_{rz}^f (n_1^2 - n_2^2)$.

Умови (8) є природними для функціонала (1).

Легко перевірити, що часткову структуру розв'язку, яка задовольняє кінематичні граничні умови (6), можна записати у вигляді

$$\dot{u}_r = \dot{f}_r + \omega_u \Phi_1 + \omega^2 \Phi_{10}, \quad \dot{u}_z = \dot{f}_z + \omega_u \Phi_2 + \omega^2 \Phi_{20}.$$

Тут \dot{f}_r, \dot{f}_z – продовження функцій \dot{f}_r^0, \dot{f}_z^0 в область $\Omega \cup \partial\Omega_p$; $\omega_u(r, z) = 0$ – рівняння ділянки $\partial\Omega_u$ ($\omega_u > 0$ поза $\partial\Omega_u$); $\omega(r, z) = 0$ – рівняння межі області Ω ($\omega > 0$ всередині Ω); $\Phi_i, \Phi_{i0}, i = 1, 2$, – невизначені компоненти структури розв'язку [4]. Функції \dot{f}_r, \dot{f}_z можуть бути побудовані за допомогою оператора продовження межових значень $EC(\dots)$ [4]. Якщо маємо тільки дві характерні частини межі області Ω , $\partial\Omega_u$ та $\partial\Omega_p$, то функції \dot{f}_r, \dot{f}_z можемо подати як

$$\dot{f}_r = EC(\dot{f}_r^0) = \frac{\dot{f}_r^0 \omega_p}{\omega_u + \omega_p}, \quad \dot{f}_z = EC(\dot{f}_z^0) = \frac{\dot{f}_z^0 \omega_p}{\omega_u + \omega_p},$$

де $\omega_p(r, z) = 0$ – рівняння ділянки $\partial\Omega_p$ ($\omega_p > 0$ поза $\partial\Omega_p$).

Загальна структура розв'язку, яка точно задовольняє умови (6), (8), має вигляд [1]

$$\dot{u}_r = \dot{u}_{0r} + \dot{u}_{1r}, \quad \dot{u}_z = \dot{u}_{0z} + \dot{u}_{1z}, \quad (9)$$

де $\dot{u}_{0r}, \dot{u}_{0z}$ задовольняють неоднорідні граничні умови, а $\dot{u}_{1r}, \dot{u}_{1z}$ – однорідні:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{0r} &= \frac{1}{\lambda_{1m}} \dot{P}_n \omega \omega_{p,r} - \frac{1}{G_m} \dot{P}_\tau \omega \omega_{p,z} + \dot{f}_r - \omega D_1^{(p)} \dot{f}_r + \omega \left(1 + \frac{\lambda_m}{\lambda_{1m}}\right) \times \\ &\quad \times \omega_{p,r} \omega_{p,z} T_1^{(p)} \dot{f}_r - \omega T_1^{(p)} \dot{f}_z \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{1m}} \omega_{p,r}^2 - \omega_{p,z}^2\right) - \frac{\lambda_m}{\lambda_{1m}} \omega \omega_{p,r} \frac{\dot{f}_r}{r}, \\ \dot{u}_{0z} &= \frac{1}{\lambda_{1m}} \dot{P}_n \omega \omega_{p,z} + \frac{1}{G_m} \dot{P}_\tau \omega \omega_{p,r} + \dot{f}_z - \omega D_1^{(p)} \dot{f}_z - \omega \left(1 + \frac{\lambda_m}{\lambda_{1m}}\right) \times \\ &\quad \times \omega_{p,r} \omega_{p,z} T_1^{(p)} \dot{f}_z - \omega T_1^{(p)} \dot{f}_r \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{1m}} \omega_{p,z}^2 - \omega_{p,r}^2\right) - \frac{\lambda_m}{\lambda_{1m}} \omega \omega_{p,z} \frac{\dot{f}_r}{r}, \\ \dot{u}_{1r} &= \Phi_1 \omega_u - \omega \left[D_1^{(p)}(\Phi_1 \omega_u) - T_1^{(p)}(\Phi_1 \omega_u) \omega_{p,r} \omega_{p,z} \left(1 + \frac{\lambda_m}{\lambda_{1m}}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_m}{\lambda_{1m}} \frac{\Phi_1 \omega_u}{r} \omega_{2,r} - T_1^{(p)}(\Phi_2 \omega_u) \left(\omega_{p,z}^2 - \frac{\lambda_m}{\lambda_{1m}} \omega_{p,r}^2\right) \right] + \omega \omega_p \Phi_3, \\ \dot{u}_{1z} &= \Phi_2 \omega_u - \omega \left[D_1^{(p)}(\Phi_2 \omega_u) + T_1^{(p)}(\Phi_2 \omega_u) \omega_{p,r} \omega_{p,z} \left(1 + \frac{\lambda_m}{\lambda_{1m}}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_m}{\lambda_{1m}} \frac{\Phi_1 \omega_u}{r} \omega_{p,z} + T_1^{(p)}(\Phi_1 \omega_u) \left(\omega_{p,r}^2 - \frac{\lambda_m}{\lambda_{1m}} \omega_{p,z}^2\right) \right] + \omega \omega_p \Phi_4. \end{aligned}$$

Тут $\omega(r, z) = 0$ – нормалізоване до першого порядку рівняння межі області Ω ($\omega_n = -1$ на $\partial\Omega$, $\omega > 0$ всередині Ω); $\omega_u(r, z) = 0$, $\omega_p(r, z) = 0$ – нормалізовані до першого порядку рівняння ділянок $\partial\Omega_u$ та $\partial\Omega_p$ відповідно; $\Phi_i, i = 1, \dots, 4$, – невизначені компоненти структури розв'язку; $D_1^{(p)} = \frac{\partial \omega_p}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \omega_p}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}$, $T_1^{(p)} = -\frac{\partial \omega_p}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \omega_p}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z}$ – диференціальні оператори [4, 5]; \dot{P}_n, \dot{P}_τ – продовження функцій контурних зусиль в область $\Omega \cup \partial\Omega_u$:

$$\dot{P}_n = EC(\dot{P}_n^0) + EC(\dot{P}_n^f), \quad \dot{P}_\tau = EC(\dot{P}_\tau^0) + EC(\dot{P}_\tau^f)$$

або

$$\begin{aligned}\dot{P}_n &= \frac{\dot{P}_n^0 \omega_u}{\omega_u + \omega_p} + \dot{N}_r^f \omega_{p,r}^2 + 2\dot{N}_{rz}^f \omega_{p,r} \omega_{p,z} + \dot{N}_z^f \omega_{p,z}^2, \\ \dot{P}_\tau &= \frac{\dot{P}_\tau^0 \omega_u}{\omega_u + \omega_p} + (\dot{N}_z^f - \dot{N}_r^f) \omega_{p,r} \omega_{p,z} + \dot{N}_{rz}^f (\omega_{p,r}^2 - \omega_{p,z}^2).\end{aligned}$$

Відмітимо, що структури розв'язку для основних осесиметричних задач теорії пружності отримано в монографії [5]. Вони можуть бути використані для розв'язання задачі пружного деформування, при знаходженні початкових умов для основних невідомих початково-крайової задачі повзучості та пошкоджуваності внаслідок повзучості.

Далі розглянемо основні граничні умови, умови з'єднання частин тіла та відповідні їм структури розв'язку в рамках постановки задачі на базі функціонала (3). У цьому випадку задача зводиться до знаходження в кожній з областей Ω_i , $i = 1, \dots, M$, швидкостей радіальних \dot{u}_{ri} та осьових переміщень \dot{u}_{zi} . При цьому функції \dot{u}_{ri} , \dot{u}_{zi} повинні задовольняти рівняння рівноваги, записані для швидкостей, умови 2° на межах сусідніх складових частин та кінематичні крайові умови 3°, якщо відповідна складова частина примикає до межі тіла.

Позначимо через Ω_n , $n = 1, \dots, N$, області, що примикають до межі тіла. На частинах меж $\partial\Omega_{un}$ областей Ω_n задано швидкості переміщень, на частинах $\partial\Omega_{pn}$ – швидкості напружень, а на частинах $\partial\Omega_{cn}$ – умови з'єднання сусідніх частин. Усю межу області Ω_n можна подати як об'єднання меж: $\partial\Omega_n = \partial\Omega_{un} \cup \partial\Omega_{pn} \cup \partial\Omega_{cn}$. Якщо задано тільки швидкості переміщень або тільки швидкості напружень, то відповідна частина ($\partial\Omega_{un}$ або $\partial\Omega_{pn}$) межі може бути відсутня.

Нехай граничні умови для швидкостей переміщень на частині $\partial\Omega_{un}$ мають вигляд

$$\dot{u}_{rn}(r, z, t) = \dot{f}_{rn}^0, \quad \dot{u}_{zn}(r, z, t) = \dot{f}_{zn}^0. \quad (10)$$

Тоді часткові структури розв'язку для швидкостей переміщень \dot{u}_{rn} , \dot{u}_{zn} можна записати як

$$\dot{u}_{rn} = \dot{u}_{0rn} + \dot{u}_{1rn}, \quad \dot{u}_{zn} = \dot{u}_{0zn} + \dot{u}_{1zn}, \quad (11)$$

де u_{0rn} , u_{0zn} задовольняють неоднорідні крайові умови, а u_{1rn} , u_{1zn} – однорідні умови та визначаються формулами

$$\dot{u}_{0rn} = \dot{f}_{rn}, \quad \dot{u}_{0zn} = \dot{f}_{zn}, \quad (12)$$

$$\dot{u}_{1rn} = \omega_u \Phi_1 + \omega^2 \Phi_{10} + \omega_{ucn}^2 \Phi_{1n}, \quad \dot{u}_{1zn} = \omega_u \Phi_2 + \omega^2 \Phi_{20} + \omega_{ucn}^2 \Phi_{2n}. \quad (13)$$

Тут $\omega(r, z) = 0$ – рівняння межі тіла $\partial\Omega$ ($\omega > 0$ всередині Ω); $\omega_u(r, z) = 0$ – рівняння ділянки $\partial\Omega_u$ ($\omega_u > 0$ поза $\partial\Omega_u$); $\omega_{ucn}(r, z) = 0$ – рівняння ділянки $\partial\Omega_{ucn} = \partial\Omega_{un} \cup \partial\Omega_{cn}$ ($\omega_{ucn} > 0$ поза $\partial\Omega_{ucn}$). Функції \dot{f}_{rn} , \dot{f}_{zn} можуть бути записані як

$$\dot{f}_{rn} = EC(\dot{f}_{rn}^0) = \frac{\dot{f}_{rn}^0 \omega_{pcn}}{\omega_{un} + \omega_{pcn}}, \quad \dot{f}_{zn} = EC(\dot{f}_{zn}^0) = \frac{\dot{f}_{zn}^0 \omega_{pcn}}{\omega_{un} + \omega_{pcn}},$$

де $\omega_{pcn}(r, z) = 0$ – рівняння ділянки $\partial\Omega_{pcn} = \partial\Omega_{pn} \cup \partial\Omega_{cn}$ ($\omega_{pcn} > 0$ поза $\partial\Omega_{pcn}$); $\omega_{un}(r, z) = 0$ – рівняння ділянки $\partial\Omega_{un}$ ($\omega_{un} > 0$ поза $\partial\Omega_{un}$).

Структури розв'язку, подані формулами (11)–(13), точно задовольняють кінематичні крайові умови на $\partial\Omega_u$ та умови з'єднання 2° за будь-якого вибору невизначених компонент $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_{10}, \Phi_{20}, \Phi_{1i}, \Phi_{2i}, i = 1, \dots, M$.

Якщо на зовнішній межі деякої області Ω_j задано тільки швидкості напружень, інакше кажучи, відсутня межа $\partial\Omega_{uj}$, то в цьому випадку у формулах (12), (13) треба покласти: $\dot{u}_{0rj} \equiv 0, \dot{u}_{0zj} \equiv 0, \omega_{ucj} = \omega_{cj}$, де $\omega_{cj}(r, z) = 0$ – рівняння ділянки $\partial\Omega_{cj}$ ($\omega_{cj} > 0$ поза $\partial\Omega_{cj}$).

Для внутрішніх складових частин $\Omega_\ell, \ell = 1, \dots, L$, області Ω , на межах яких повинні виконуватися тільки умови з'єднання з сусідніми складовими частинами, в структурах розв'язку необхідно покласти $\dot{u}_{0r\ell} \equiv 0, \dot{u}_{0z\ell} \equiv 0, \omega_{uc\ell} = \omega_\ell$, де $\omega_\ell(r, z) = 0$ – рівняння межі області Ω_ℓ ($\omega_\ell > 0$ всередині Ω_ℓ).

Рівняння межі області Ω і її складових частин у структурах розв'язку будуються за допомогою R -функцій [4].

При дискретизації крайової задачі невизначені компоненти структур розв'язку подають у вигляді [4]

$$\Phi_\ell(\mathbf{x}) \approx \Phi_{\ell N}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N_\ell} C_k^\ell \Phi_k^\ell, \quad \mathbf{x} = (r, z),$$

де $\{\Phi_k^\ell\}$ – відомі елементи деякого функціонального простору \mathbf{M}^ℓ , у якому містяться Φ_ℓ , які утворюють в ньому повну послідовність, C_k^ℓ – невідомі коефіцієнти. У ролі $\{\Phi_k^\ell\}$ можна вибирати звичайні степеневі поліноми, поліноми Чебишева, сплайни та ін. [4].

Чисельні результати. Як приклад розглянемо повзучість і пошкоджуваність тришарового циліндра, який є розрахунковою схемою твердооксидної паливної комірки (рис. 1), розробленої фірмою Siemens-Westinghouse [8].

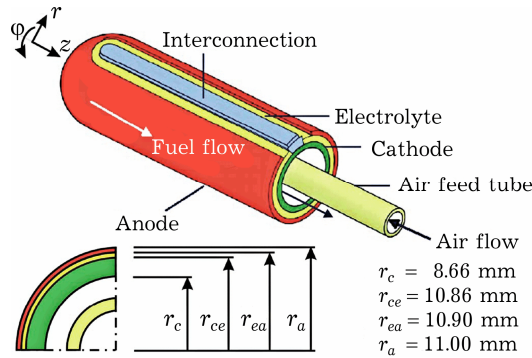


Рис. 1

У сучасній техніці твердооксидні паливні комірки (Solid Oxide Fuel Cells – SOFC) є одними з найбільш ефективних енергогенеруючих систем, що конвертують хімічну енергію в електричну. Твердооксидні паливні комірки складаються з електроліту, катода та анода. Шар електроліту укладено між двома тонкими пористими електродами. Катод, анод та електроліт вироблено із керамічних матеріалів. Теорія та технологія виробництва твердооксидних паливних комірок розвиваються і досліджуються досить недавно [7–10].

Однією з центральних проблем при проектуванні та експлуатації твердооксидних паливних комірок є забезпечення їх тривалої міцності та збільшення часу безвідмовної роботи.

Розміри паливної комірки в радіальному напрямку показані на рис. 1. Шари циліндра жорстко зчеплені між собою. Довжина електрохімічно активної частини $\ell = 1.5$ м. Товщини катода $h_1 = 2.2 \cdot 10^{-3}$ м, електроліту – $h_2 = 0.04 \cdot 10^{-3}$ м, анода – $h_3 = 0.1 \cdot 10^{-3}$ м. Катод виготовлено із матеріалу WPC3, електроліт та анод із матеріалів 8YSZ (діоксид цирконію, стабілізований оксидом ітрію) та Ni+YSZ (нікелевий кермет) відповідно [8]. Робоча температура $T = 900^\circ \text{C}$. Модулі Юнга та коефіцієнти Пуассона матеріалів катода, електроліту й анода при температурі 900°C [8, 13]: $E_1 = 58.0$ ГПа, $E_2 = 155.0$ ГПа, $E_3 = 64.0$ ГПа, $\nu_1 = 0.25$, $\nu_2 = 0.316$, $\nu_3 = 0.25$. Коефіцієнти лінійного температурного розширення: $\alpha_1 = 10.7 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$, $\alpha_2 = 10.3 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$, $\alpha_3 = 12.0 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$. Температура, за якої відсутні напруження та деформації, $T_0 = 1250^\circ \text{C}$. Зовнішні поверхневі сили відсутні: $P_n^0 = 0$, $P_\tau^0 = 0$.

Матеріал катода, за існуючого рівня інтенсивності напружень, повзучості не виявляє. Закон одновісної повзучості та кінетичне рівняння пошкоджуваності для матеріалів електроліту та анода мають вигляд:

$$\dot{p} = A \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) t^{-k} \frac{\sigma^n}{(1-\psi)^n}, \quad \frac{d\psi}{dt} = B \exp\left(-\frac{\Delta}{RT}\right) \frac{\sigma^m}{(1-\psi)^m}.$$

Тут ψ – скалярний параметр пошкоджуваності, який у початковий момент часу $t = 0$ дорівнює нулеві, а в момент $t = t_*$ руйнування параметр $\psi = 1$; $R = 0.0083144$ кДж/(моль \cdot К) – універсальна газова стала; T – абсолютна температура. Константи повзучості матеріалу електроліту [12]: $A = 704.5$ (МПа) $^{-n} \cdot \text{год}^{-1}$, $B = 1.1722$ (МПа) $^{-m} \cdot \text{год}^{-1}$, $m = 1.7$, $n = 1$, $k = 0$, $Q = 320.0$ кДж/моль, $\Delta = 44.23$ кДж/моль. Константи повзучості матеріалу анода [11]: $A = 9.145 \cdot 10^{-13}$ (МПа) $^{-n} \cdot \text{год}^{-1}$, $B = 0$, $m = 0$, $n = 7.181$, $k = 0.943$, $Q = 72.5$ кДж/моль.

За складного напруженого стану визначальні співвідношення повзучості та кінетичне рівняння пошкоджуваності запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= \frac{3}{2} A \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) t^{-k} \frac{\sigma_i^{n-1}}{(1-\psi)^n} \left(\sigma_r - \frac{1}{3} I_1\right), \\ \dot{p}_z &= \frac{3}{2} A \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) t^{-k} \frac{\sigma_i^{n-1}}{(1-\psi)^n} \left(\sigma_z - \frac{1}{3} I_1\right), \\ \dot{p}_\phi &= \frac{3}{2} A \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) t^{-k} \frac{\sigma_i^{n-1}}{(1-\psi)^n} \left(\sigma_\phi - \frac{1}{3} I_1\right), \\ \dot{p}_{rz} &= \frac{3}{2} A \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) t^{-k} \frac{\sigma_i^{n-1}}{(1-\psi)^n} \sigma_{rz}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= B \exp\left(-\frac{\Delta}{RT}\right) \frac{\sigma_i^m}{(1-\psi)^m}, \end{aligned}$$

де $\sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_z^2 + \sigma_\phi^2 - \sigma_r \sigma_z - \sigma_r \sigma_\phi - \sigma_\phi \sigma_z + 3\sigma_{rz}^2}$ – інтенсивність напружень; $I_1 = \sigma_r + \sigma_z + \sigma_\phi$.

Далі розглянемо граничні умови та відповідні структури розв'язку. Боківі межі циліндра $r = r_c = 8.66 \cdot 10^{-3}$ м, $r = r_a = 11.0 \cdot 10^{-3}$ м вільні від закріплення і зовнішніх навантажень. Торці $z = \pm \ell/2$ паливного елемента можуть вільно переміщуватися уздовж осі Oz .

Граничні умови на торцях циліндра $z = \pm \ell/2$:

$$\dot{\sigma}_{zi}(\dot{u}_{ri}, \dot{u}_{zi}) = 0, \quad \dot{\sigma}_{zri}(\dot{u}_{ri}, \dot{u}_{zi}) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

На внутрішній $r = r_c$ та зовнішній $r = r_a$ поверхнях циліндра:

$$\dot{\sigma}_{rj}(\dot{u}_{rj}, \dot{u}_{zj}) = 0, \quad \dot{\sigma}_{rzj}(\dot{u}_{rj}, \dot{u}_{zj}) = 0, \quad j = 1, 3.$$

На межах шарів повинні виконуватися умови з'єднання:

$$\dot{u}_{rk} = \dot{u}_{rk+1}, \quad \dot{u}_{zk} = \dot{u}_{zk+1}, \quad k = 1, 2. \quad (14)$$

При чисельній реалізації будемо використовувати симетрію задачі. При цьому на осі симетрії, у перерізі $z = 0$, задаємо наступні умови:

$$\dot{u}_{zi} = 0, \quad \frac{\partial \dot{u}_{ri}}{\partial z} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Використовуючи викладену вище методику побудови структур розв'язку, одержимо структури, які задовольняють умови (14), (15):

$$\dot{u}_{ri} = \Phi_1 - \omega_u D_1^{(u)} \Phi_1 + \omega^2 \Phi_{10} + \omega_{uci}^2 \Phi_{1i},$$

$$\dot{u}_{zi} = \omega_u \Phi_2 + \omega^2 \Phi_{20} + \omega_{uci}^2 \Phi_{2i}.$$

Тут $\omega_u = z$, $\omega_{uci} = \omega_u \wedge_0 \omega_{ci} = \omega_u + \omega_{ci} - \sqrt{\omega_u^2 + \omega_{ci}^2}$, $\omega_{ci} = 0$ – рівняння поверхонь розділу шарів циліндра:

$$\omega_{c1} = r_2 - r, \quad \omega_{c2} = \frac{(r - r_2)(r_3 - r)}{r_3 - r_2}, \quad \omega_{c3} = r - r_3,$$

\wedge_0 – символ операції R -кон'юнкції [4]; $r_1 = r_c$, $r_2 = r_{ce}$, $r_3 = r_{ea}$, $r_4 = r_a$;

$D_1^{(u)} = \frac{\partial \omega_u}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \omega_u}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}$ – диференціальний оператор; $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_{10}, \Phi_{20}, \Phi_{1i}, \Phi_{2i}$, $i = 1, 2, 3$, – невизначені компоненти структури розв'язку. Відмітимо, що тут функції ω_{uci} можуть також бути отримані як звичайні добутки:

$$\omega_{uci} = \omega_u \cdot \omega_{ci}.$$

Рівняння межі області Ω ($\omega = 0$, $\omega_{,n} = -1$ на $\partial\Omega$, $\omega > 0$ всередині Ω) має вигляд

$$\omega = \omega_r \wedge_0 \omega_z = \omega_r + \omega_z - \sqrt{\omega_r^2 + \omega_z^2} = 0,$$

$$\text{де } \omega_r = \frac{(r - r_1)(r_4 - r)}{r_4 - r_1}, \quad \omega_z = \frac{2z}{\ell} \left(\frac{\ell}{2} - z \right).$$

При чисельній реалізації функції $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_{10}, \Phi_{20}, \Phi_{1i}, \Phi_{2i}$ подавали у вигляді лінійних комбінацій бікубічних сплайнів Шенберга [6].

Системи сплайн-функцій будували на рівномірних прямокутних сітках. При цьому $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_{10}, \Phi_{20}$ задавали в усій області Ω , а Φ_{1i}, Φ_{2i} , $i = 1, 2, 3$, – тільки у відповідних підобластях Ω_i з рівняннями меж ($\omega_i = 0$, $\omega_{i,n} = 1$ на $\partial\Omega_i$, $\omega_i > 0$ всередині Ω_i):

$$\omega_i = \omega_{ri} \wedge_0 \omega_z = \omega_{ri} + \omega_z - \sqrt{\omega_{ri}^2 + \omega_z^2} = 0,$$

$$\text{де } \omega_{ri} = \frac{(r - r_i)(r_{i+1} - r)}{r_{i+1} - r_i}.$$

В результаті розрахунків встановлено, що час до руйнування $t_* = 4360$ год. Руйнування починається у шарі електроліту в точках, що знаходяться на межі з анодом. На рис. 2 – рис. 4 наведено результати розрахунків напружень і пошкоджуваності в перерізі $z = 0$.

На рис. 2 показано результати для інтенсивності напружень в різні моменти часу: $t = 0$ – штрихова лінія; $t = t_*$ – суцільна лінія. Для кращої візуалізації результатів уздовж вісі абсцис відкладено безрозмірну радіальну координату ξ , яку у відповідних шарах обчислювали за формулою

$$\xi_n = \alpha_n \frac{r - r_{n-1}}{r_n - r_{n-1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k, \quad n = 1, 2, 3,$$

де $r_0 = 8.66$ мм, $r_1 = 10.86$ мм, $r_2 = 10.9$ мм, $r_3 = 11.0$ мм; α_k – вагові коефіцієнти: $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.18$, $\alpha_3 = 0.32$. На рис. 3 зображено розподіл пошкоджуваності в шарі електроліту в різні моменти часу: кривій 1 відповідає $t = 2000$ год, 2 – $t = 3000$ год, 3 – $t = t_* = 4360$ год.

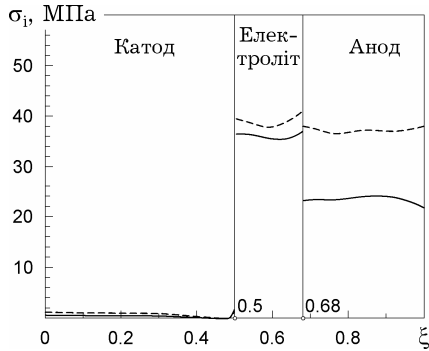


Рис. 2

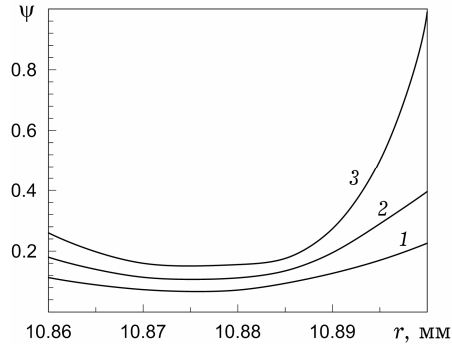


Рис. 3

На рис. 4 наведено графіки зростання за часом пошкоджуваності в різних точках електроліту: крива 1 – на межі електроліту та анода ($r = 10.8999$ мм), 2 – на межі електроліту та катода ($r = 10.8601$ мм), 3 – всередині електроліту ($r = 10.88$ мм).

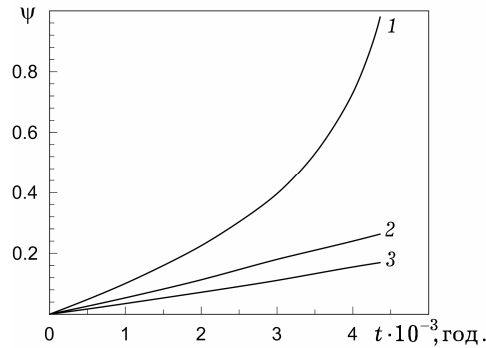


Рис. 4

Висновки. Розроблено чисельно-аналітичний метод розв'язання осесиметричної початково-крайової задачі повзучості та пошкоджуваності внаслідок повзучості для кусково-однорідного тіла обертання з довільною формою меридіонального перерізу, яке знаходиться під дією силових і температурних навантажень. Метод базується на спільному застосуванні методів R -функцій та Рунге – Кутта – Мерсона. Побудовано структури розв'язків для основних типів граничних умов. Як приклад розв'язано задачу повзучості, пошкоджуваності та тривалої міцності твердооксидної трубчастій паливної комірки, розрахунковою схемою якої є тришаровий циліндр. З проведених досліджень можна зробити висновок, що під час роботи в твердооксидних паливних комітках внаслідок повзучості відбувається перерозподіл механічних напружень і накопичення пошкоджуваності. Рівень напружень в електроліті та в аноді впродовж всього часу залиша-

ється високим. У кінцевому підсумку це призводить до руйнації паливної комірки. Для подовження терміну безвідмовної роботи паливних комірок потрібно досягати зниження рівня напружень, наприклад, за рахунок зменшення різниці між коефіцієнтами лінійного температурного розширення матеріалів шарів.

1. Золочевский А. А., Склепус А. Н., Склепус С. Н. Нелинейная механика деформируемого твердого тела. – Харьков: Бизнес Инвестор Групп, 2011. – 720 с.
2. Мудров А. Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. – Томск: МП «Раско», 1991. – 270 с.
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. – Москва: Наука, 1966. – 752 с.
4. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
5. Рвачев В. Л., Синекон Н. С. Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности. – Киев: Наук. думка, 1990. – 212 с.
6. Федотова Е. А. Практические указания по использованию сплайн-аппроксимации в программирующих системах серии «Поле». – Харьков, 1984. – 59 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т проблем машиностроения; 202).
7. Bieberle-Hütter A., Beckel D., Infortuna A., Muecke U. P., Rupp J. L. M., Gauckler L. J. A micro-solid oxide fuel cell system as battery replacement // J. Power Sources. – 2008. – **177**, No. 1. – P. 123–130.
8. Fisher K., Seume J. R. Impact of the temperature profile on thermal stress in a tubular solid oxide fuel cell // J. Fuel Cell Sci. Technol. – 2009. – **6**, No. 1. – P. 011017-1 – 011017-9.
9. Hotz N., Senn S. M., Poulidakos D. Exergy analysis of a solid oxide fuel cell micropowerplant // J. Power Sources. – 2006. – **158**, No. 1. – P. 333–347.
10. Joo J. H., Choi G. M. Micro-solid oxide fuel cell using thick-film ceria // Solid State Ionics. – 2009. – **180**. – P. 839–842.
11. Lara-Curzio E. Durability and reliability of SOFC materials and components // Proc. 7th Annual SECA Workshop and Peer Review, Philadelphia, PA, September 12–14, 2006.
12. Lowrie F. L., Rawlings R. D. Room and high temperature failure mechanisms in solid oxide fuel cell electrolytes // J. Eur. Ceramic Soc. – 2000. – **20**. – P. 751–760.
13. Nakajo A., Stiller C., Härkegerd G., Bolland O. Modeling of thermal stresses and probability of survival of tubular SOFC // J. Power Sources. – 2006. – **158**, No. 1. – P. 287–294.

РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ И ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ДЛЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ТЕЛА С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМОЙ МЕРИДИОНАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотрена осесимметричная задача ползучести и повреждаемости вследствие ползучести для кусочно-однородных тел с произвольной формой меридионального сечения. Разработан метод решения начально-краевой задачи, который базируется на совместном применении методов R-функций и Рунге – Кутты – Мерсона. Построены структуры решения для основных типов краевых условий. Приведен пример расчета ползучести и длительной прочности трехслойного цилиндра, который является расчетной схемой твердооксидного топливного элемента.

SOLUTION OF THE AXISYMMETRIC CREEP AND CREEP DAMAGE PROBLEM FOR A PIECEWISE-HOMOGENEOUS BODY WITH ARBITRARY SHAPE OF MERIDIONAL SECTION

The paper considers the axisymmetric problem of creep and creep damage for piecewise-homogeneous bodies with an arbitrary meridian section. A method of solving initial boundary value problem, which is based on the joint application of R-functions method and Runge – Kutta – Merson method, is developed. The structures of solution for the main types of boundary conditions have been obtained. An example of calculating the creep and long-term strength of three-layer cylinder, which is a design scheme of solid oxide fuel cell, has been shown.

Ин-т проблем машинобудування
ім. А. М. Підгорного НАН України, Харків

Одержано
08.10.12