УДК 517.524

Р. І. Дмитришин

ДВОВИМІРНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ qd-АЛГОРИТМУ РУТИСХАУЗЕРА

Побудовано двовимірне узагальнення qd-алгоритму Рутисхаузера та встановлено умови існування такого алгоритму. Наведено деякі приклади аналітичних функцій, які зображаються регулярними двовимірними C-дробами з нерівнозначними змінними.

Вступ. Для зображення аналітичних і мероморфних функцій двох змінних гіллястими ланцюговими дробами побудовано різні алгоритми розвинення заданого формального подвійного степеневого ряду (ФПСР) у відповідні (про поняття відповідності див. [7, с. 148–160], [8, с. 30–37]) двовимірні неперервні дроби [4, с. 109–115], регулярний C-дріб і приєднаний дріб з нерівнозначними змінними [1], двовимірний q-дріб із нерівнозначними змінними [5], гіллястий ланцюговий дріб із лінійними частинними чисельниками [2]. Узагальненням деяких алгоритмів на випадок довільного числа змінних присвячено роботи [1, 3, 5].

У цій статті запропоновано алгоритм обчислення коефіцієнтів регулярного двовимірного C-дробу з нерівнозначними змінними за допомогою відповідного заданого ФПСР, який є двовимірним узагальненням qd-алгоритму Рутисхаузера [7, с. 227–240]. Встановлено необхідні та достатні умови існування такого алгоритму, а також розглянуто приклади функцій, які зображаються регулярними двовимірними C-дробами з нерівнозначними змінними.

1. Алгоритм. Побудуємо та дослідимо алгоритм розвинення заданого формального подвійного степеневого ряду

$$L(z_1, z_2) = \sum_{r,s=0}^{\infty} c_{rs} z_1^r z_2^s \,, \tag{1}$$

де $c_{rs} \in \mathbb{C}$, $r \ge 0$, $s \ge 0$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, у відповідний регулярний двовимірний C-дріб з нерівнозначними змінними

$$\cfrac{a_0}{F_0(z_1) + \underset{s=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \cfrac{a_{0s} z_2}{F_s(z_1)}}\,, \qquad F_p(z_1) = 1 + \underset{r=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \frac{a_{rp} z_1}{1}\,, \tag{2}$$

де a_0, a_{rs}, $r \ge 0$, $s \ge 0$, $r + s \ge 1$, – комплексні сталі, $a_0 \ne 0$, $a_{rs} \ne 0$, $r \ge 0$, $s \ge 0$, $r + s \ge 1$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

Нехай $c_{00} \ne 0$ і $R_0(z_1, z_2) = \sum_{r,s=1}^{\infty} \left(\frac{c_{rs}}{c_{00}} \right) z_1^r z_2^s$. Позначимо через

$$R_0'(z_1, z_2) = \sum_{r,s=0}^{\infty} c_{rs}^{(0)} z_1^r z_2^s \tag{3}$$

ряд, обернений до подвійного степеневого ряду $R_0(z_1, z_2)$. Коефіцієнти ряду (3) однозначно визначаються за допомогою рекурентних формул

$$c_{rs}^{(0)} = - \sum_{p,q=1}^{r+s} c_{r-p,s-q}^{(0)} \frac{c_{pq}}{c_{00}}, \qquad r \ge 0, \qquad s \ge 0, \qquad r + s \ge 1\,, \tag{4}$$

причому $c_{k\ell}^{(0)} = 0$, якщо $k < 0$ або $\ell < 0$. Ряд (3) за умови, що $c_{01}^{(0)} \ne 0$, запишемо у вигляді

$$R_0'(z_1,z_2)=P_1(z_1)+c_{01}^{(0)}z_2R_1(z_1,z_2)\,,$$

де при $n=1$

$$P_n(z_1)=1+\sum_{r=1}^{\infty}c_{r0}^{(n-1)}z_1^r,\qquad R_n(z_1,z_2)=\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{c_{r,s+1}^{(n-1)}}{c_{01}^{(n-1)}}z_1^rz_2^s\,.$$

Нехай $\sum_{r=0}^{\infty}c_{r0}z_1^r$ − нормальний ряд (про поняття нормальності формального степеневого ряду див. [7, с. 185−190]). Тоді згідно з теоремою 7.5 [7, с. 228−229] існують числа $q_{r0}^{(n)}$, $e_{r0}^{(n)}$, $r\ge 1$, $n\ge 0$, qd -таблиці при $s=0$

$$\begin{array}{cccccc}
 & q_{1s}^{(0)} & & & & \\
e_{0s}^{(1)} & & e_{1s}^{(0)} & & & \\
 & q_{1s}^{(1)} & & q_{2s}^{(0)} & & \\
e_{0s}^{(2)} & & e_{1s}^{(1)} & & e_{2s}^{(0)} & \\
 & q_{1s}^{(2)} & & q_{2s}^{(1)} & \vdots & \ddots, \\
e_{0s}^{(3)} & & e_{1s}^{(2)} & \vdots & & \\
\vdots & q_{1s}^{(3)} & \vdots & & & \\
 & \vdots & & & &
\end{array}\tag{5}$$

елементи якої визначаються за правилами ромба

$$e_{ms}^{(n)}+q_{ms}^{(n)}=q_{ms}^{(n+1)}+e_{m-1,s}^{(n+1)},\qquad e_{ms}^{(n)}q_{m+1,s}^{(n)}=q_{ms}^{(n+1)}e_{ms}^{(n+1)}\,,$$

$$m\ge 1,\qquad n\ge 0\,,\tag{6}$$

з початковими умовами

$$e_{0s}^{(n)}=0,\qquad q_{1s}^{(n)}=\frac{c_{n+1,1}^{(s-1)}}{c_{n1}^{(s-1)}},\qquad n\ge 0\,,\tag{7}$$

при цьому $q_{10}^{(n)}=\dfrac{c_{n+1,0}}{c_{n0}}$, $n\ge 0$. Процедуру обчислення елементів таблиці (5) за допомогою правил ромба (6) з початковими умовами (7) називають qd -алгоритмом Рутисхаузера [7, с. 227]. Згідно з теоремою 7.7 [7, с. 230−231]

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{c_{r0}}{c_{00}}z_1^r\sim\frac{1}{1-}\frac{q_{10}^{(0)}z_1}{1}-\frac{e_{10}^{(0)}z_1}{1}-\frac{q_{20}^{(0)}z_1}{1}-\frac{e_{20}^{(0)}z_1}{1}-\dots,$$

а згідно з лемою 3 [6]

$$1+\sum_{r=1}^{\infty}c_{r0}^{(0)}z_1^r\sim 1-\frac{q_{10}^{(0)}z_1}{1}-\frac{e_{10}^{(0)}z_1}{1}-\frac{q_{20}^{(0)}z_1}{1}-\frac{e_{20}^{(0)}z_1}{1}-\dots,$$

оскільки ряд $P_1(z_1)$ є обернений до ряду $\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{c_{r0}}{c_{00}}\right)z_1^r$. Тут символ «$\sim$» означає відповідність між рядом і дробом. Покладемо $a_{2r-1,0}=-q_{r0}^{(0)}$, $a_{2r,0}=-e_{r0}^{(0)}$, $r\ge 1$.

Нехай $\sum_{s=0}^{\infty}c_{0s}z_2^s$ − нормальний ряд. Тоді згідно з теоремою 7.5 [7, с. 228−229] існують числа $q_{0s}^{(n)}$, $e_{0s}^{(n)}$, $s\ge 1$, $n\ge 0$, qd -таблиці

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & q_{01}^{(0)} & & & & & \\
e_{00}^{(1)} & & e_{01}^{(0)} & & & & \\
 & q_{01}^{(1)} & & q_{02}^{(0)} & & & \\
e_{00}^{(2)} & & e_{01}^{(1)} & & e_{02}^{(0)} & & \\
 & q_{01}^{(2)} & & q_{02}^{(1)} & \vdots & \ddots, & \\
e_{00}^{(3)} & & e_{01}^{(2)} & \vdots & & & \\
\vdots & q_{01}^{(3)} & \vdots & & & & \\
 & \vdots & & & & &
\end{array} \tag{8}
$$

елементи якої визначаються за правилами ромба

$$
e_{0m}^{(n)} + q_{0m}^{(n)} = q_{0m}^{(n+1)} + e_{0,m-1}^{(n+1)}, \qquad e_{0m}^{(n)} q_{0,m+1}^{(n)} = q_{0m}^{(n+1)} e_{0m}^{(n+1)},
$$

$$
m \ge 1, \qquad n \ge 0\,, \tag{9}
$$

з початковими умовами

$$
e_{00}^{(n)} = 0, \qquad q_{01}^{(n)} = \frac{c_{0,n+1}}{c_{0n}}, \qquad n \ge 0\,, \tag{10}
$$

а згідно з теоремою 7.7 [7, с. 230–231] маємо

$$
\sum_{s=0}^{\infty} c_{0s} z_2^s \sim \frac{c_{00}}{1} - \frac{q_{01}^{(0)} z_2}{1} - \frac{e_{01}^{(0)} z_2}{1} - \frac{q_{02}^{(0)} z_2}{1} - \frac{e_{02}^{(0)} z_2}{1} - \ldots.
$$

Оскільки $c_{01}^{(0)} = -\dfrac{c_{01}}{c_{00}} = -q_{01}^{(0)}$, то покладемо $a_0 = c_{00}$, $a_{01} = -q_{01}^{(0)}$.

Позначимо через

$$
R_1'(z_1, z_2) = \sum_{r,s=0}^{\infty} c_{rs}^{(1)} z_1^r z_2^s \tag{11}
$$

ряд, обернений до подвійного степеневого ряду $R_1(z_1, z_2)$. Коефіцієнти ряду (11) однозначно визначаються за допомогою рекурентних формул при $n = 1$:

$$
c_{rs}^{(n)} = -\sum_{p,q=1}^{r+s} c_{r-p,s-q}^{(n)} \frac{c_{pq}^{(n-1)}}{c_{01}^{(n-1)}}, \quad r \ge 0, \quad s \ge 0, \quad r + s \ge 1\,, \tag{12}
$$

де $c_{00}^{(n)} = 1$, причому $c_{k\ell}^{(n)} = 0$, якщо $k < 0$ або $\ell < 0$. Ряд (11) подібно, як і ряд (3), за умови, що $c_{01}^{(1)} \ne 0$, запишемо у вигляді

$$
R_1'(z_1, z_2) = P_2(z_1) + c_{01}^{(1)} z_2 R_2(z_1, z_2).
$$

Нехай $\sum\limits_{r=0}^{\infty} c_{r0}^{(0)} z_1^r$ – нормальний ряд. Тоді згідно з теоремою 7.5 [7, с. 228–229] існують числа $q_{r1}^{(n)}$, $e_{r1}^{(n)}$, $r \ge 1$, $n \ge 0$, qd-таблиці (5) з правилами ромба (6) і початковими умовами (7) при $s = 1$. Згідно з теоремою 7.7 [7, с. 230–231]

$$
\sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_{r1}^{(0)}}{c_{01}^{(0)}} z_1^r \sim \frac{1}{1} - \frac{q_{11}^{(0)} z_1}{1} - \frac{e_{11}^{(0)} z_1}{1} - \frac{q_{21}^{(0)} z_1}{1} - \frac{e_{21}^{(0)} z_1}{1} - \ldots,
$$

а згідно з лемою 3 [6] маємо

$$
1 + \sum_{r=1}^{\infty} c_{r0}^{(1)} z_1^r \sim 1 - \frac{q_{11}^{(0)} z_1}{1} - \frac{e_{11}^{(0)} z_1}{1} - \frac{q_{21}^{(0)} z_1}{1} - \frac{e_{21}^{(0)} z_1}{1} - \ldots,
$$

оскільки ряд $P_2(z_1)$ є обернений до ряду $\sum\limits_{r=0}^{\infty} \frac{c_{r1}^{(0)}}{c_{01}^{(0)}} z_1^r$. Оскільки

$$c_{01}^{(1)} = -\frac{c_{02}^{(0)}}{c_{01}^{(0)}} = -\frac{c_{02}c_{00} - c_{01}^2}{c_{01}c_{00}} = -e_{01}^{(0)},$$

то покладемо $a_{2r-1,1} = -q_{r1}^{(0)}$, $a_{2r,1} = -e_{r1}^{(0)}$, $r \geq 1$, і $a_{02} = -e_{01}^{(0)}$.

Обчислюючи далі коефіцієнти $c_{rs}^{(n)}$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r + s \geq 1$, $n \geq 2$, за допомогою рекурентних формул (12) і продовжуючи процес ітерації, за умов, що ряди

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_{r0} z_1^r, \qquad \sum_{s=0}^{\infty} c_{0s} z_2^s, \qquad \sum_{r=0}^{\infty} c_{r0}^{(n)} z_1^r, \qquad n \geq 0, \tag{13}$$

є нормальними, для ряду (1) отримаємо дріб (2), де $a_0 = c_{00}$, $a_{2r-1,s} = -q_{rs}^{(0)}$, $a_{2r,s} = -e_{rs}^{(0)}$, $r \geq 1$, $s \geq 0$ (числа $q_{rs}^{(0)}$, $e_{rs}^{(0)}$, $r \geq 1$, $s \geq 0$, є діагональними елементами qd-таблиці (5) з правилами ромба (6) і початковими умовами (7)), $a_{0,2s-1} = -q_{0s}^{(0)}$, $a_{0,2s} = -e_{0s}^{(0)}$, $s \geq 1$ (числа $q_{0s}^{(0)}$, $e_{0s}^{(0)}$, $s \geq 1$, є діагональними елементами qd-таблиці (8) з правилами ромба (9) і початковими умовами (10)).

Таким чином, якщо задано коефіцієнти c_{rs} ФПСР (1), побудовано рекурентний алгоритм обчислення коефіцієнтів відповідного регулярного двовимірного C-дробу (2). Цей алгоритм є двовимірним узагальненням qd-алгоритму Рутисхаузера [7, с. 227–240]. Відповідність дробу (2) до ряду (1) доводиться за схемою, запропонованою в роботі [6].

Отже, справджується

Теорема 1. *Регулярний двовимірний C-дріб з нерівнозначними змінними* (2) *є відповідним до заданого ФПСР* (1) *тоді й лише тоді, коли формальні степеневі ряди* (13) *є нормальними.*

2. Приклади. Розглянемо приклади обчислення коефіцієнтів регулярних двовимірних C-дробів з нерівнозначними змінними, відповідних заданому ФПСР.

Приклад 1. Функція

$$f(z_1, z_2) = 1 + \sqrt{z_1}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{z_1} + \sqrt{\frac{z_2}{1 + z_2\sqrt{z_1}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{z_1}}}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{z_2}{1 + z_2\sqrt{z_1}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{z_1}}}$$

має в точці $(z_1, z_2) = (0, 0)$ ФПСР вигляду

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{z_1^r}{2r-1} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1} z_2^s}{2s-1} \times$$
$$\times \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty}\left(\sum_{\alpha(r)=r} \frac{(r-\alpha'(r))!}{\alpha(r)!} \prod_{p=1}^{r}\left(\frac{-z_2}{2p-1}\right)^{\alpha_p}\right) z_1^r\right)^s. \tag{14}$$

Тут α_p, $1 \leq p \leq r$, $r \geq 1$, – цілі невід’ємні числа, $\alpha(r) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + r\alpha_r$, $\alpha'(r) = \alpha_2 + 2\alpha_3 + \ldots + (r-1)\alpha_r$, $\alpha(r)! = \alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_r!$, $r \geq 1$. qd-таблиці (6) і (9) ряду (14) мають однаковий вигляд:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 1 & & & & \\
0 & & -\dfrac{2^2}{1\cdot 3} & & & \\
 & -\dfrac{1}{3} & & -\dfrac{3^2}{3\cdot 5} & & \\
0 & & -\dfrac{2^2}{3\cdot 5} & & -\dfrac{4^2}{5\cdot 7} & \\
 & -\dfrac{3}{5} & & -\dfrac{3^2}{5\cdot 7} & \vdots & \ddots \\
0 & & -\dfrac{2^2}{5\cdot 7} & \vdots & & \\
\vdots & -\dfrac{5}{7} & \vdots & & & \\
 & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Із цієї таблиці та теореми 1 випливає, що регулярний двовимірний C-дріб з нерівнозначними змінними

$$
\cfrac{1}{1+\cfrac{z_1}{1+\cfrac{\frac{1}{3}z_1}{1+\cfrac{\frac{2^2}{3\cdot 5}z_1}{1+\cfrac{\frac{3^2}{5\cdot 7}z_1}{1+\ddots}}}}+\cfrac{z_2}{1+\cfrac{z_1}{1+\cfrac{\frac{1}{3}z_1}{1+\cfrac{\frac{2^2}{3\cdot 5}z_1}{1+\ddots}}}+\cfrac{\frac{1}{3}z_2}{1+\cfrac{z_1}{1+\cfrac{\frac{1}{3}z_1}{1+\ddots}}+\cfrac{\frac{2^2}{3\cdot 5}z_2}{1+\cfrac{z_1}{1+\ddots}+\cfrac{\frac{3^2}{5\cdot 7}z_2}{1+\ddots}}}}}
$$

є відповідним ФПСР (14) у точці $(z_1, z_2) = (0, 0)$.

Приклад 2. Для ряду

$$
F(a,1,c,z_1)F(b,1,d,z_2(F(a,1,c,z_1))^2) = \sum_{s=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r}{(c)_r}z_1^r\right)^{2s+1}\frac{(b)_s}{(d)_s}z_2^s, \qquad (15)
$$

де $(a)_k$ – символ Похгамера: $(a)_k = a(a+1)(a+2)\ldots(a+k-1)$, $k \ge 1$, $(a)_0 = 1$; a, b, c і d – дійсні сталі, причому $c, d \notin \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, отримуємо такі вирази для елементів $q_{rs}^{(n)}$, $e_{rs}^{(n)}$, $r \ge 0$, $s \ge 0$, $r+s \ge 1$, $n \ge 0$, відповідних qd-таблиць:

$$
q_{10}^{(n)} = \frac{a+n}{c+n}, \qquad q_{01}^{(n)} = \frac{b+n}{d+n}, \qquad n \ge 0,
$$

$$
q_{rs}^{(n)} = \frac{(a+n+r-1)(c+n+r-2)}{(c+n+2r-3)(c+n+2r-2)}, \qquad r \ge 2, \quad s \ge 0, \quad n \ge 0,
$$

$$
q_{0s}^{(n)} = \frac{(b+n+s-1)(d+n+s-2)}{(d+n+2s-3)(d+n+2s-2)}, \qquad s \ge 2, \quad n \ge 0,
$$

$$
e_{rs}^{(n)} = \frac{r(c-a+r-1)}{(c+n+2r-2)(c+n+2r-1)}, \qquad r \ge 1, \quad s \ge 0, \quad n \ge 0,
$$

$$
e_{0s}^{(n)} = \frac{s(d-b+s-1)}{(d+n+2s-2)(d+n+2s-1)}, \qquad s \ge 1, \quad n \ge 0.
$$

Таким чином, згідно з теоремою 1 дріб

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{a}{c}z_1}{1-\cfrac{\frac{1(c-a)}{c(c+1)}z_1}{1-\cfrac{\frac{(a+1)c}{(c+1)(c+2)}z_1}{1-\ddots}}}-\cfrac{\frac{b}{d}z_2}{1-\cfrac{\frac{a}{c}z_1}{1-\cfrac{\frac{1(c-a)}{c(c+1)}z_1}{1-\ddots}}-\cfrac{\frac{1(d-b)}{d(d+1)}z_2}{1-\cfrac{\frac{a}{c}z_1}{1-\ddots}-\cfrac{\frac{(b+1)d}{(d+1)(d+2)}z_2}{1-\ddots}}}}$$

є відповідним ряду (15) у точці $(z_1, z_2) = (0, 0)$.

Приклад 3. Для ряду

$$\Phi(1, c, z_1)\Phi(1, d, z_2(\Phi(1, c, z_1))^2) = \sum_{s=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(c)_r}z_1^r\right)^{2s+1}\frac{1}{(d)_s}z_2^s, \tag{16}$$

де c і d – дійсні сталі, причому $c, d \notin \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, отримуємо такі вирази для елементів $q_{rs}^{(n)}$, $e_{rs}^{(n)}$, $r \ge 0$, $s \ge 0$, $r + s \ge 1$, $n \ge 0$, відповідних qd-таблиць:

$$q_{10}^{(n)} = \frac{1}{c+n}, \qquad q_{01}^{(n)} = \frac{1}{d+n}, \qquad n \ge 0,$$

$$q_{rs}^{(n)} = \frac{c+n+r-2}{(c+n+2r-3)(c+n+2r-2)}, \qquad r \ge 2, \quad s \ge 0, \quad n \ge 0,$$

$$q_{0s}^{(n)} = \frac{d+n+s-2}{(d+n+2s-3)(d+n+2s-2)}, \qquad s \ge 2, \quad n \ge 0,$$

$$e_{rs}^{(n)} = \frac{-r}{(c+n+2r-2)(c+n+2r-1)}, \qquad r \ge 1, \quad s \ge 0, \quad n \ge 0,$$

$$e_{0s}^{(n)} = \frac{-s}{(d+n+2s-2)(d+n+2s-1)}, \qquad s \ge 1, \quad n \ge 0.$$

Тому згідно з теоремою 1 регулярний двовимірний C-дріб з нерівнозначними змінними

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{1}{c}z_1}{1-\cfrac{\frac{1}{c(c+1)}z_1}{1-\cfrac{\frac{c}{(c+1)(c+2)}z_1}{1-\ddots}}}-\cfrac{\frac{1}{d}z_2}{1-\cfrac{\frac{1}{c}z_1}{1-\cfrac{\frac{1}{c(c+1)}z_1}{1-\ddots}}-\cfrac{\frac{1}{d(d+1)}z_2}{1-\cfrac{\frac{1}{c}z_1}{1-\ddots}-\cfrac{\frac{d}{(d+1)(d+2)}z_2}{1-\ddots}}}}$$

є відповідним ряду (16) у точці $(z_1, z_2) = (0, 0)$.

Висновки. Запропоноване двовимірне узагальнення qd-алгоритму Рутисхаузера надає зручну чисельну процедуру обчислення коефіцієнтів регулярних двовимірних C-дробів з нерівнозначними змінними, відповідних до заданого ФПСР. Цей алгоритм можна узагальнити на випадок довільного числа змінних. Залишається відкритим питання побудови та дослідження класу функцій, що розвиваються у такі дроби.

1. *Баран О. Є., Дмитришин Р. І.* Деякі типи гіллястих ланцюгових дробів, відповідних до кратних степеневих рядів // Праці Ін-ту математики НАН України. – Т. 31: Теорія наближення функцій та її застосування. – 2000. – С. 82–92.

2. *Боднар Д. И.* Соответствующие ветвящиеся цепные дроби с линейными частными числителями для двойного степенного ряда // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 4. – С. 474–482.
3. *Боднар Д. І.* Багатовимірні C-дроби // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39,** № 2. – С. 39–46.
4. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2010. – 218 с.
5. *Dmytryshyn R. I.* The multidimensional generalization of g-fractions and their application // J. Comput. Appl. Math. – 2004. – **164–165**. – P. 265–284.
6. *Dmytryshyn R. I.* The two-dimensional g-fraction with independent variables for double power series // J. Approx. Theory. – 2012. – **164,** No. 12. – P. 1520–1539.
7. *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. – Reading, MA.: Addison-Wesley Publ. Co., 1980. – 428 p. – Encyclopedia Math. Appl. – Vol. 11.
   Те саме: *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
8. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions. – Vol. 1: Convergence theory. – Amsterdam – Paris: Atlantis Press/Word Scientific, 2008. – 308 p.

ДВУМЕРНОЕ ОБОБЩЕНИЕ qd -АЛГОРИТМА РУТИСХАУЗЕРА

Построено двумерное обобщение qd-алгоритма Рутисхаузера и установлены условия существования такого алгоритма. Приведены некоторые примеры аналитических функций, которые представляются регулярными двумерными C-дробями с неравнозначными переменными.

THE TWO-DIMENSIONAL GENERALIZATION OF RUTISHAUSER'S qd -ALGORITHM

The two-dimensional generalization of Rutishauser qd-algorithm is constructed and the conditions for existence of such an algorithm are established. Some examples of analytic functions represented by regular two-dimensional C-fractions with nonequivalent variables are shown.

Прикарпат. нац. ун-т
ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
01.11.12