УДК 512.64: 552.12

А. М. Романів, В. П. Щедрик

НАЙМЕНШЕ СПІЛЬНЕ ПРАВЕ КРАТНЕ МАТРИЦЬ З ОДНИМ ВІДМІННИМ ВІД ОДИНИЦІ ІНВАРІАНТНИМ МНОЖНИКОМ

Вказано новий метод знаходження найменшого спільного правого кратного для матриць, які мають по одному відмінному від одиниці інваріантному множнику.

Вступ. Нехай R – комутативна область елементарних дільників [7] з одиницею, відмінною від нуля. Прикладами таких областей є, зокрема, області головних ідеалів та адекватні області [6]. Над кільцем R для кожної ($n \times n$)-матриці A існують оборотні матриці P_A та Q_A такі, що

$$P_A A Q_A = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 0, \ldots, 0) = \mathcal{E}, \qquad \varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}, \qquad i = 1, \ldots, k-1 .$$

Матрицю $\mathcal{E}$ називають формою Сміта, ε_i – інваріантними множниками, а матриці P_A та Q_A – лівими та правими перетворювальними матрицями для матриці A.

Позначимо через $\mathbf{P}_A$ множину всіх лівих перетворювальних матриць для матриці A. Згідно з результатами робіт [3, 9] $\mathbf{P}_A = \mathbf{G}_{\mathcal{E}} P_A$, де

$$\mathbf{G}_{\mathcal{E}} = \{ H \in GL_n(R) \,|\, H\mathcal{E} = \mathcal{E} H_1 \},$$

де $H_1 \in GL_n(R)$. Множина $\mathbf{G}_{\mathcal{E}}$ за структурою є мультиплікативною групою.

Якщо $A = BC$, то кажуть, що матриця B є лівим дільником матриці A, а матриця A є правим кратним матриці B. Якщо $A = DA_1$ та $B = DB_1$, то матрицю D називають спільним лівим дільником матриць A та B. Окрім цього, якщо матриця D є правим кратним кожного спільного лівого дільника матриць A та B, то матрицю D називають *найбільшим спільним лівим дільником* (н. с. л. д.) матриць A та B (у позначеннях $(A,B)_\ell$).

Якщо $M = AP = BQ$, то матрицю M називають спільним правим кратним матриць A та B. Крім цього, якщо матриця M є лівим дільником кожного спільного правого кратного матриць A та B, то матрицю M називають *найменшим спільним правим кратним* (н. с. п. к.) матриць A та B (у позначеннях $[A,B]_r$). На підставі теореми 3 із [12] і 3.8 із [7] н. с. л. д. та н. с. п. к. в кільці $M_n(R)$ визначені однозначно з точністю до правої асоційовності.

На початку 90-х років минулого століття М. Ньюмен для матриць над комутативними областями головних ідеалів сформулював задачу: встановити зв'язок між формами Сміта двох матриць і їхніх н. с. д. та н. с. к. Він же і показав, що перший інваріантний множник н. с. д. дорівнює н. с. д. перших інваріантних множників вихідних матриць. Найбільш глибокі результати в цьому напрямку отримав R. C. Thompson [13], який встановив певні необхідні умови, які повинні задовольняти інваріантні множники н. с. д. та н. с. к. Зокрема, він показав, що останній інваріантний множник н. с. к дорівнює н. с. к. останніх інваріантних множників вихідних матриць. У першій частині цієї роботи запропоновано новий метод знаходження н. с. п. к. одного класу матриць, який ґрунтується на знаходженні форми Сміта н. с. п. к. та їх перетворювальних матриць. У другій частині розроблені методи застосовано до дослідження такого важливого поняття теорії кілець, як стабільний ранг кільця, яке було введене H. Bass у 1964 р. [5].

Стабільним рангом кільця R називається найменше натуральне число n таке, що для довільних взаємно простих зліва елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ з R існують елементи $r_1, r_2, \ldots, r_n$ із R такі, що

$$(a_1 + br_1, a_2 + br_2, \ldots, a_n + br_n) = 1.$$

Зауважимо, що кільце R має стабільний ранг 1, якщо для довільних взаємно простих зліва елементів a, b з R існує елемент r такий, що елемент $a + br$ є оборотним елементом кільця R.

L. N. Vasershtein [15] вказав формулу для обчислення стабільного рангу кільця $M_n(R)$. У випадку, коли кільце R має стабільний ранг 1 або 2, то таким самим є стабільний ранг кільця $M_n(R)$. Б. В. Забавський [1] показав, що комутативна область елементарних дільників має стабільний ранг 2. При цьому у спільній роботі з В. П. Петричковичем [2] він вказав один клас матриць, який має стабільний ранг 1, однак основне кільце має стабільний ранг 2. У пропонованій роботі продовжено дослідження у цьому напрямі.

Надалі всюди, якщо це спеціально не обумовлено, R є комутативною областю елементарних дільників.

1. Найменше спільне праве кратне матриць.

Лема 1. *Нехай* $A \sim \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \varepsilon)$, $B \sim \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \delta)$ *− неособливі матриці із* $M_n(R)$, *а* $P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^n$. *Тоді елемент* $((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})$ *є інваріантом стосовно вибору перетворювальних матриць* P_A *та* P_B.

Д о в е д е н н я. Нехай F_A та F_B − інші ліві перетворювальні матриці матриць A та B. Тоді існують матриці $H_A \in \mathbf{G}_{\mathcal{E}}$ та $H_B \in \mathbf{G}_{\Delta}$ такі, що $F_A = H_A P_A$, $F_B = H_B P_B$. Розглянемо добуток матриць

$$F_B F_A^{-1} = H_B P_B (H_A P_A)^{-1} = H_B P_B P_A^{-1} H_A^{-1} = H_B S H_A^{-1},$$

де $S = P_B P_A^{-1}$. З огляду на структуру матриць H_B, H_A^{-1} (див. наслідок 6 із [9]) та асоціативність кільця $M_n(R)$ доведення цього твердження не викликає жодних труднощів. ♦

Лема 2. *Нехай*

$$\mu = \frac{(\varepsilon, \delta)}{((\varepsilon, \delta), \omega_{n-1})}, \qquad \omega_{n-1} = \frac{(\varepsilon, \delta)}{((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})}.$$

Тоді $\mu \mid (s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})$.

Д о в е д е н н я. Оскільки

$$\mu = \frac{(\varepsilon, \delta)}{\left((\varepsilon, \delta), \dfrac{(\varepsilon, \delta)}{((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})}\right)} =$$

$$= \frac{(\varepsilon, \delta)((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})}{((\varepsilon, \delta)((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1}), (\varepsilon, \delta))} =$$

$$= ((\varepsilon, \delta), (s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})),$$

то $\mu \mid (s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})$. ♦

Лема 3. *Нехай* R *− адекватна область,* $S = \|s_{ij}\|_1^n \in GL_n(R)$ *і*

$$\Omega = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \omega_{n-1}, \omega_n),$$

де $\omega_{n-1} \mid \omega_n$, $\omega_i \mid (\varepsilon_i, \delta_i)$, $i = n-1, n$.

Для того щоб існували оборотні матриці

$$L_A = \left\| \begin{matrix} & * & & * & \\ \varepsilon\ell_{n1} & \ldots & \varepsilon\ell_{n.n-2} & \dfrac{\varepsilon}{(\varepsilon,\omega_{n-1})}\ell_{n.n-1} & \ell_{nn} \end{matrix} \right\|, \qquad (1)$$

$$L_B = \left\| \begin{matrix} & * & & * & \\ \delta p_{n1} & \ldots & \delta p_{n.n-2} & \dfrac{\delta}{(\delta,\omega_{n-1})}p_{n.n-1} & p_{nn} \end{matrix} \right\| \qquad (2)$$

такі, що $SL_A = L_B$, *необхідно та достатньо, щоб*

$$\frac{(\varepsilon,\delta)}{((\varepsilon,\delta),\omega_{n-1})} \mid (s_{n1},\ldots,s_{n.n-1}).$$

Д о в е д е н н я. *Необхідність*. Позначимо

$$\frac{\varepsilon}{(\varepsilon,\omega_{n-1})} = a, \qquad \frac{\delta}{(\delta,\omega_{n-1})} = b.$$

Очевидно, що $L_A \in \mathbf{G}_{\mathrm{diag}(1,\ldots,1,a)} = \mathbf{G}_a$ і $L_B \in \mathbf{G}_{\mathrm{diag}(1,\ldots,1,b)} = \mathbf{G}_b$. Отже, $S = L_B L_A^{-1} \in \mathbf{G}_b\mathbf{G}_a$. Звідси випливає, що $(a,b) \mid s_{ni}$, $i = 1,\ldots,n-1$. На підставі леми 1 із [4] запишемо

$$(a,b) = \left(\frac{\varepsilon}{(\varepsilon,\omega_{n-1})}, \frac{\delta}{(\delta,\omega_{n-1})}\right) = \frac{(\varepsilon,\delta)}{((\varepsilon,\delta),\omega_{n-1})}.$$

Таким чином,

$$\frac{(\varepsilon,\delta)}{((\varepsilon,\delta),\omega_{n-1})} \mid (s_{n1},\ldots,s_{n,n-1}).$$

Достатність. Спершу розглянемо випадок, коли матриця S має вигляд

$$S = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ s_{n1} & s_{n2} & \ldots & s_{n.n-1} & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Нехай $(a,b) = \alpha$. Тоді існують елементи t_1, t_2 такі, що

$$at_1 + bt_2 = \alpha.$$

Згідно з умовою леми $\alpha \mid (s_{n1},\ldots,s_{n.n-1})$. Тому

$$(s_{n1},\ldots,s_{n.n-1}) = \alpha\beta.$$

Отже, існує оборотна матриця U така, що

$$\| s_{n1} \;\; \ldots \;\; s_{n.n-1} \| U = \| 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; \alpha\beta \|.$$

Тоді

$$S \left\| \begin{array}{cccc:c} & U & & & \mathbf{0} \\ \hdashline 0 & \ldots & 0 & -a\beta t_1 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc:c} & U & & & \mathbf{0} \\ \hdashline 0 & \ldots & 0 & b\beta t_2 & 1 \end{array} \right\|,$$

що й потрібно було довести.

Нехай тепер $S = \| s_{ij} \|_1^n$ – довільна матриця із $GL_n(R)$. Скориставшись способом доведення теореми 1 із [10], побудуємо матриці $H_1 \in \mathbf{G}_\Delta$ та $T \in \mathbf{G}_{\mathcal{E}}$ такі, що

$$H_1ST = \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & & \cdots \\ c_{n-1.1} & \cdots & c_{n-1.n-2} & 1 & 0 \\ \hline c_{n1} & c_{n2} & & c_{n.n-1} & 1 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c|c} C_{11} & \mathbf{0} \\ \hline C_{21} & 1 \end{array}\right\|.$$

Розглянемо матрицю

$$H_2 = \left\|\begin{array}{c|c} C_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right\|.$$

Тоді

$$H_2H_1ST = \left\|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & 1 & 0 \\ c_{n1} & \cdots & c_{n.n-1} & 1 \end{array}\right\| = C.$$

Зауважимо, що $H_2 \in \mathbf{G}_\Delta$, а отже, і $H_2H_1 \in \mathbf{G}_\Delta$. Із доведення леми 1 випливає, що $\alpha \mid (c_{n1}, \ldots, c_{n.n-1})$. Згідно з доведеним вище, існують матриця L'_A вигляду (1) і матриця L'_B вигляду (2) такі, що $CL'_A = L'_B$, тобто $HSTL'_A = L'_B$. Отже, $S(TL'_A) = H^{-1}L'_B$. На підставі властивості 2 із [9] матриці $TL'_A = L_A$, $H^{-1}L'_B = L_B$ також мають вигляд (1) і (2) відповідно. Доведення завершено. ♦

Лема 4. *Нехай* $\mathcal{E} = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \varepsilon)$, $\Delta = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \delta)$ *і*

$$U = \left\|u_{ij}\right\|_1^n \in GL_n(R).$$

Тоді

$$\mathcal{E}U\Delta \sim \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \gamma_{n-1}, \gamma_n). \tag{3}$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо добуток

$$\mathcal{E}U\Delta = \left\|\begin{array}{ccc|c} u_{11} & \cdots & u_{1.n-1} & \delta u_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n-1.1} & \cdots & u_{n-1.n-1} & \delta u_{n-1.n} \\ \hline \varepsilon u_{n1} & \cdots & \varepsilon u_{n.n-1} & \varepsilon\delta u_{nn} \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{cc} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{array}\right\|.$$

Оскільки матриця U_{11} має порядок $n-1$ і є підматрицею оборотної матриці порядку n, то $U_{11} \sim \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, u)$. Звідси і випливає еквівалентність (3). ♦

Теорема 1. *Нехай A та B − матриці із $M_n(R)$, причому матриця $(A, B)_\ell$ є неособливою. Тоді $(A, B)_\ell$ можна вибрати так, що*

$$[A, B]_r = BA_1,$$

де $A = (A, B)_\ell A_1$.

Д о в е д е н н я. Використавши методи, запропоновані у [8], побудуємо матрицю

$$U = \left\|\begin{array}{cc} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{array}\right\|$$

таку, що

$$\|A \quad B\| \cdot \begin{Vmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{Vmatrix} = \|D \quad \mathbf{0}\|.$$

При цьому

$$AU_{11} + BU_{21} = D = (A, B)_\ell ,$$

$$AU_{12} = -BU_{22} = M = [A, B]_r .$$

Таким чином,

$$\begin{Vmatrix} A & B \\ A & \mathbf{0} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} D & \mathbf{0} \\ * & M \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Нехай $U^{-1} = V = \begin{Vmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{Vmatrix}$. Тоді

$$\begin{Vmatrix} A & B \\ A & \mathbf{0} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} D & \mathbf{0} \\ * & M \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{Vmatrix}.$$

Звідси випливає, що $A = DV_{11}$ та $B = DV_{12}$. Оскільки $U^{-1} = V$, то на підставі теореми 1 із [14] матриці U_{22} та V_{11} є еквівалентними, тобто $U_{22} = KV_{11}S$, де $K, S \in GL_n(R)$. Оскільки також $A = DA_1$, то $DA_1 = DV_{11}$, отже, $D(A_1 - V_{11}) = 0$. Матриця D є неособливою, а отже, не є дільником нуля. Тому $A_1 - V_{11} = 0$, тобто $A_1 = V_{11}$. Розглянемо

$$M = -BU_{22} = -BKV_{11}S = -BKA_1S .$$

Тоді $-MS^{-1} = M_1 = BKA_1$ Оскільки матриця M_1 є асоційованою справа до матриці M, то M_1 є н. с. п. к. матриць A та B. Зауважимо, що

$$A = DA_1 = D(K^{-1}K)A_1 = (DK^{-1})(KA_1) = D'A_1' ,$$

де матриця D' також є н. с. л. д. матриць A та B. Отже, $M_1 = BA_1'$, що й потрібно було показати.

Зауважимо, що схожий результат отримав R. C. Thompson [13] у випадку, коли R є полем.

Теорема 2. *Нехай A, B – $(n \times n)$-матриці над адекватною областю R, причому*

$$A \sim \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \varepsilon) = \mathcal{E} ,$$

$$B \sim \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \delta) = \Delta ,$$

$$P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^n .$$

Тоді

$$[A, B]_r = (L_A P_A)^{-1}\Omega = (L_B P_B)^{-1}\Omega ,$$

де

$$\Omega = \operatorname{diag}\left(1, \ldots 1, \frac{(\varepsilon, \delta)}{((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})}, [\varepsilon, \delta]\right),$$

а матриці L_A та L_B належать відповідно множинам $\mathbf{L}(\Omega, \mathcal{E})$, $\mathbf{L}(\Omega, \Delta)$ і задовольняють рівність $(P_B P_A^{-1})L_A = L_B$.

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що згідно з лемою 1 елемент $((\varepsilon, \delta), s_{n1}, s_{n2}, \ldots, s_{n.n-1})$, а отже, й матриця Ω не залежать від вибору перетворювальних матриць P_A та P_B. Розглянемо матрицю

$$\|A \quad B\| = \left\|P_A^{-1}\mathcal{E}Q_A^{-1} \quad P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1}\right\|.$$

Тоді

$$P_B\|A \quad B\|\left\|\begin{matrix} Q_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_B\end{matrix}\right\| = \left\|(P_B P_A^{-1})\mathcal{E} \quad \Delta\right\|.$$

Скориставшись методом доведення теореми 1 із [10], виберемо матрицю $P_B P_A^{-1}$ нижньою унітрикутною. Тоді

$$\left\|(P_B P_A^{-1})\mathcal{E} \quad \Delta\right\| \sim \left\|\begin{array}{cccc:cccc} 1 & & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & & & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ s_{n1} & \ldots & s_{n.n-1} & \varepsilon & 0 & \ldots & 0 & \delta \end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \operatorname{diag}(1,\ldots,1,((\varepsilon,\delta),s_{n1},s_{n2},\ldots,s_{n.n-1})).$$

Таким чином,

$$(A,B)_\ell \sim \operatorname{diag}(1,\ldots,1,((\varepsilon,\delta),s_{n1},s_{n2},\ldots,s_{n.n-1})).$$

Із теореми 1 випливає, що $[A,B]_r = BUA_1$, де $A = (A,B)_\ell A_1$, $U \in$ $\in GL_n(R)$. Оскільки матриці B, A_1 мають по одному інваріантному множнику, то згідно із лемою 4 $[A,B]_r$ має не більше двох відмінних від одиниці інваріантних множників:

$$[A,B]_r \sim \operatorname{diag}(1,\ldots,1,\omega_{n-1},\omega_n).$$

Із рівності (4) випливає, що

$$\pm\det A\det B = \det(A,B)_\ell \det[A,B]_r,$$

тобто

$$\det[A,B]_r = \pm\frac{\det A\det B}{\det(A,B)_\ell} = \pm\frac{\varepsilon\delta}{((\varepsilon,\delta),s_{n1},s_{n2},\ldots,s_{n.n-1})} = \omega_{n-1}\omega_n.$$

З робіт [13] і [9] випливає, що $\omega_n = [\varepsilon,\delta]$. Тому

$$\omega_{n-1} = \pm\frac{\varepsilon\delta(\varepsilon,\delta)}{\varepsilon\delta((\varepsilon,\delta),s_{n1},s_{n2},\ldots,s_{n.n-1})} = \pm\frac{(\varepsilon,\delta)}{((\varepsilon,\delta),s_{n1},s_{n2},\ldots,s_{n.n-1})}.$$

Враховуючи, що інваріантні множники матриці вибираються з точністю до дільників одиниці, отримуємо

$$[A,B]_r \sim \operatorname{diag}\left(1,\ldots 1,\frac{(\varepsilon,\delta)}{((\varepsilon,\delta),s_{n1},s_{n2},\ldots,s_{n.n-1})},[\varepsilon,\delta]\right) = \Omega.$$

На підставі рівності 1 із [4]

$$\left(\frac{\varepsilon}{(\varepsilon,\omega_{n-1})},\frac{\delta}{(\delta,\omega_{n-1})}\right) = \left(\frac{(\varepsilon,\delta)}{((\varepsilon,\delta),\omega_{n-1})}\right) = \mu.$$

На підставі леми 2 отримаємо, що $\mu \mid (s_{n1},s_{n2},\ldots s_{n.n-1})$. Тоді згідно з лемою 3 існують матриці $L_A \in \mathbf{L}(\Omega,\mathcal{E})$, $L_B \in \mathbf{L}(\Omega,\Delta)$ такі, що $P_B P_A^{-1} L_A = L_B$. Звідси випливає, що

$$L_A^{-1}P_A\Omega = L_B^{-1}P_B\Omega = M.$$

Оскільки $\mathcal{E} \mid \Omega$ та $\Delta \mid \Omega$, то на підставі теореми 5 з [9] матриця M є спільним правим кратним матриць A та B.

Нехай N − н. с. п. к. матриць A та B. Із доведеного вище випливає, що $N \sim \Omega$. Отже, $N = P_N^{-1}\Omega Q_N^{-1}$. Тоді матриця $M = L_A^{-1}P_A\Omega = P_M^{-1}\Omega$ є правим кратним матриці N: $M = NN_1$. Згідно з теоремою 5 із [9] це рівносильно тому, що $P_N = LP_M$, де $L \in \mathbf{L}(\Omega, \Omega)$. Оскільки $\mathbf{L}(\Omega, \Omega) = \mathbf{G}_\Omega$, то на підставі наслідку 2 із [9] матриці M та N є асоційованими справа. Таким чином, матриця M є н. с. п. к. матриць A та B. Теорему доведено. ♦

2. Оборотні матриці в суміжному класі $A + B \cdot M_n(R)$.

Теорема 3. *Нехай* A, B *− неособливі, взаємно прості зліва матриці, причому*

$$A \sim \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \mathcal{E}, \qquad \varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

$$B \sim \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \delta) = \Delta.$$

Тоді існує матриця T *така, що* $A + BT \in GL_n(R)$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $(A, B)_\ell = I$, то із доведення теореми 2 випливає, що

$$((\varepsilon_n, \delta), s_{n1}\varepsilon_1, s_{n2}\varepsilon_2, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}) = 1.$$

Зауваживши, що $A = P_A^{-1}\mathcal{E}Q_A^{-1}$, $B = P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1}$, отримаємо

$$A + BK = P_A^{-1}\mathcal{E}Q_A^{-1} + P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1}K = U.$$

Тоді

$$P_B U Q_A = P_B P_A^{-1}\mathcal{E} + \Delta Q_B^{-1} K Q_A.$$

Позначивши

$$S = P_B P_A^{-1} = \left\| s_{ij} \right\|_1^n, \qquad K_1 = Q_B^{-1} K Q_A = \left\| k_{ij} \right\|_1^n, \qquad U_1 = P_B U Q_A,$$

отримаємо

$$S\mathcal{E} + \Delta K_1 = \begin{Vmatrix} s_{11}\varepsilon_1 + k_{11} & \ldots & s_{1.n-1}\varepsilon_{n-1} + k_{1.n-1} & s_{1n}\varepsilon_n + k_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n1}\varepsilon_1 + \delta k_{n1} & \ldots & s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1} + \delta k_{n.n-1} & s_{nn}\varepsilon_n + \delta k_{nn} \end{Vmatrix} = U_1.$$

Враховуючи властивість 4 із [11], переконуємося, що

$$(s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}, s_{nn}\varepsilon_n, \delta) = (s_{n1}\varepsilon_1, \ldots, s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n, \delta) = 1.$$

На підставі теореми 4 із [1] R є кільцем стабільного рангу 2. Тому існують $k_{n1}^0, \ldots, k_{n.n-1}^0, k_{nn}^0$ такі, що елементи рядка

$$\begin{Vmatrix} s_{n1}\varepsilon_1 + \delta k_{n1}^0 & \ldots & s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1} + \delta k_{n.n-1}^0 & s_{nn}\varepsilon_n + \delta k_{nn}^0 \end{Vmatrix}$$

є взаємно простими. Доповнимо цей рядок до оборотної матриці вигляду

$$\begin{Vmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1.n-1} & u_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n-1.1} & \ldots & u_{n-1.n-1} & u_{n-1.n} \\ s_{n1}\varepsilon_1 + \delta k_{n1}^0 & \ldots & s_{n.n-1}\varepsilon_{n-1} + \delta k_{n.n-1}^0 & s_{nn}\varepsilon_n + \delta k_{nn}^0 \end{Vmatrix}.$$

Розглянемо рівняння $s_{ij}\varepsilon_j + k_{ij} = u_{ij}$, $i = 1, \ldots, n-1$, $j = 1, \ldots, n$, відносно невідомих k_{ij}. Нехай k_{ij}^0 − розв'язки цих рівнянь, $i = 1, \ldots, n-1$, $j = 1, \ldots, n$. Тоді $S\mathcal{E} + \Delta K^0 = V \in GL_n(R)$, де $K^0 = \left\| k_{ij}^0 \right\|_1^n$. Звідси отримуємо

$$P_B^{-1}VQ_A^{-1} = P_B^{-1}(P_B P_A^{-1})\mathcal{E}Q_A^{-1} + P_B^{-1}\Delta Q_B^{-1}(Q_B K^0 Q_A^{-1}) = A + BT,$$

де $T = Q_B K^0 Q_A^{-1}$. Зауваживши, що $P_B^{-1}VQ_A^{-1} \in GL_n(R)$, завершуємо доведення теореми. ♦

1. *Забавський Б. В.* Редукція матриць над кільцями Безу стабільного рангу не більше 2 // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 4. – С. 550–554.
   Те саме: *Zabavs'kyi B. V.* Reduction of matrices over Bezout rings of stable rank not higher than 2 // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, No. 4. – P. 665–670.
2. *Забавський Б. В., Петричкович В. М.* Про стабільний ранг кілець матриць // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**. – № 11. – Р. 1575–1578.
   Те саме: *Zabavs'kyi B. V., Petrychkovych V. M.* On the stable range of matrix rings // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**, No. 11. – P. 1853–1857.
3. *Зелиско В. Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 12. – С. 14–21.
4. *Романів А., Щедрик В.* Найбільший спільний лівий дільник та найменше спільне праве кратне матриць другого порядку // Мат. вісн. НТШ. – 2012. – **9**. – С. 269–284.
5. *Bass H.* K-theory and stable algebra // Publ. Math. I.H.É.S. – 1964. – **22.** – P. 5–60.
6. *Helmer O.* The elementary divisor for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**, No. 2. – P. 225–236.
7. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464–491.
8. *MacDuffee C. C.* Matrices with elements in a principal ideal ring // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – **39**. – P. 564–584.
9. *Shchedryk V.* Factorization of matrices over elementary divisor domain // Algebra Discrete Math. – 2009. – No. 2. – P. 79–98.
10. *Shchedryk V. P.* On decomposition of complete linear group into product of some its subgroups // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 61. – С. 184–190.
11. *Shchedryk V. P.* Some properties of primitive matrices over Bezout *B*-domain // Algebra Discrete Math. – 2005. – No. 2. – P. 46–57.
12. *Stewart B. M.* A note on least common left multiples // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – **55**, No. 6. – P. 587–591.
13. *Thompson R. C.* Left multiples and right divisors of integral matrices // Linear Multilinear Algebra. – 1986. – **19**, No. 3. – P. 287–295.
14. *Thompson R. C.* The Smith form, the inversion rule for 2x2 matrices, and the uniqueness of the invariant factors for finitely generated modules // Linear Algebra Appl. – 1982. – **44**. – P. 197–201.
15. *Vasershtein L. N.* Stable rank of rings and dimensionality of topological spaces // Funct. Anal. Appl. – 1971. – **5**, No. 2. – P. 102–110.

НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ ПРАВОЕ КРАТНОЕ МАТРИЦ С ОДНИМ ОТЛИЧНЫМ ОТ ЕДИНИЦЫ ИНВАРИАНТНЫМ МНОЖИТЕЛЕМ

Указан новый метод нахождения наименьшего общего правого кратного для матриц, которые имеют по одному отличному от единицы инвариантному множителю.

LEAST COMMON RIGHT MULTIPLE OF MATRICES WITH ONE DIFFERENT FROM UNITY INVARIANT FACTOR

A new method for finding the lowest common right multiple to matrices that have one different from unit invariant factor are proposed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.09.13