УДК 539.3

М. В. Лавренюк

ЗАСТОСУВАННЯ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ АНІЗОТРОПНИХ СЕРЕДОВИЩ

Розглянуто задачу про визначення напружено-деформованого стану тонкої пружної ортотропної пластинки за наявності в ній ортотропних включень довільної форми під дією прикладених до країв пластинки зусиль. Для розв'язання задачі запропоновано модифікацію прямого методу граничних елементів, яка дозволяє одночасно визначати всі шукані величини на поверхнях контакту кожного з включень з матрицею за допомогою двовимірної апроксимації компонент вектора переміщень і тензора напружень на кожному елементі дискретизації. Одержано вихідні визначальні співвідношення для всіх компонент вектора переміщень і тензора напружень як на межі, так і у внутрішніх точках розглядуваної структури.

В останні роки широко застосовуються матеріали та елементи конструкцій з анізотропними властивостями, оскільки вони дозволяють одержати потрібні експлуатаційні характеристики міцності та жорсткості. Для ефективного та безпечного використання таких матеріалів необхідні точні та надійні чисельні методи оцінки їхнього напружено-деформованого стану. Традиційні обчислювальні методи, що використовують дискретизацію самої області (метод скінченних елементів) чи її границі (метод граничних елементів), є високоефективними у тому випадку, коли для розглядуваної задачі відомі відповідні фундаментальні розв'язки. Анізотропія збільшує кількість пружних сталих у законі Гука, а отже, це ускладнює процес побудови фундаментальних розв'язків. Проте у випадку двовимірної задачі теорії пружності фундаментальний розв'язок, зазвичай, є відомим [5, 6]. Аналіз напружено-деформованого стану для такого класу задач було здійснено, наприклад, у роботах [4, 7, 8].

При застосуванні традиційного методу граничних елементів із розв'язку граничних інтегральних рівнянь можна визначити лише частину складових тензора напружень, а саме тих, які входять в умови контакту. Для визначення інших складових тензора напружень потрібно здійснювати граничний перехід як в інтегральних зображеннях складових вектора переміщень, так і в їхніх продиференційованих зображеннях. Двовимірна апроксимація переміщень на границі включень [1] усуває необхідність диференціювати зображення і дозволяє вже з самих граничних інтегральних рівнянь визначити всі складові вектора переміщень і тензора напружень на межі розглядуваних тіл.

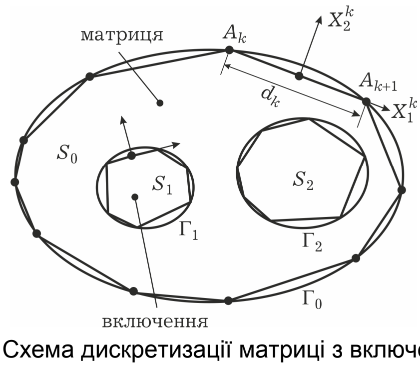

Рис. 1. Схема дискретизації матриці з включеннями.

Застосуємо цей підхід до побудови визначальних співвідношень для плоскої задачі теорії пружності ортотропних тіл. Розглянемо тонку пружну ортотропну пластинку з ортотропними включеннями довільної форми.

Пластинка перебуває під дією об'ємних сил X_i та прикладених до її країв розподілених зусиль p_i. Тоді її можна розглядати як пружну ортотропну матрицю із пружними ортотропними включеннями.

У випадку ортотропного пружного матеріалу залежності між напруженнями та деформаціями для узагальненого плоского напруженого стану в площині Oxy записуються у такому вигляді:

$$\varepsilon_{11} = s_{11}\sigma_{11} + s_{12}\sigma_{22}, \qquad \varepsilon_{22} = s_{12}\sigma_{11} + s_{22}\sigma_{22}, \qquad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} s_{66}\sigma_{12}.$$

Залежності між напруженнями та деформаціями є такими:

$$\sigma_{11} = \frac{s_{22}\varepsilon_{11} - s_{12}\varepsilon_{22}}{s_{11}s_{22} - s_{12}^2}, \qquad \sigma_{22} = \frac{-s_{12}\varepsilon_{11} + s_{11}\varepsilon_{22}}{s_{11}s_{22} - s_{12}^2}, \qquad \sigma_{12} = \frac{2\varepsilon_{12}}{s_{66}}.$$

Система рівнянь рівноваги в переміщеннях для пружної матриці ($x \in S_0$) і кожного з включень ($x \in S_p$) (див. рис. 1) має вигляд:

$$\frac{s_{22}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{s_{66}^0}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \left(\frac{1}{s_{66}^0} - \frac{s_{12}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2}\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + X_1 = 0,$$

$$\frac{1}{s_{66}^0}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{s_{11}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \left(\frac{1}{s_{66}^0} - \frac{s_{12}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2}\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + X_2 = 0,$$

$$\frac{s_{22}^p}{s_{11}^p s_{22}^p - (s_{12}^p)^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{s_{66}^p}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \left(\frac{1}{s_{66}^p} - \frac{s_{12}^p}{s_{11}^p s_{22}^p - (s_{12}^p)^2}\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + X_1 = 0,$$

$$\frac{1}{s_{66}^p}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{s_{11}^p}{s_{11}^p s_{22}^p - (s_{12}^p)^2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \left(\frac{1}{s_{66}^p} - \frac{s_{12}^p}{s_{11}^p s_{22}^p - (s_{12}^p)^2}\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + X_2 = 0. \quad (1)$$

Крайові умови на межі пластинки (матриці) запишемо так:

$$\sigma_{ij}^0 n_j^0\Big|_{\Gamma_p^\sigma} = p_i, \qquad u_i^p\Big|_{\Gamma_p^u} = \varphi_i, \qquad i, j = 1, 2, \qquad p = 1, \ldots, N,$$

де $\Gamma_p^\sigma \cup \Gamma_p^u = \Gamma_p$.

Умови ідеального механічного контакту на межі матриці та кожного з включень запишуться у формі

$$u_i^p\Big|_{\Gamma_p} = u_i^{p+1}\Big|_{\Gamma_p}, \qquad i, j = 1, 2, \qquad p = 1, \ldots, N.$$

У випадку неідеального контакту ці умови слід замінити такими:

– *у випадку гладкого проковзування*

$$\sigma_{22}^0\Big|_{\Gamma_0} = \sigma_{22}^p\Big|_{\Gamma_p}, \qquad \tau_{12}^0\Big|_{\Gamma_0} = \tau_{12}^p\Big|_{\Gamma_p} = 0,$$

$$u_2^0\Big|_{\Gamma_p} = u_2^p\Big|_{\Gamma_p}, \qquad i, j = 1, 2, \qquad p = 1, \ldots, N; \quad (2)$$

– *у випадку гладкого проковзування з натягом*

$$\sigma_{22}^0\Big|_{\Gamma_0} = \sigma_{22}^p\Big|_{\Gamma_p}, \qquad \tau_{12}^0\Big|_{\Gamma_0} = \tau_{12}^p\Big|_{\Gamma_p} = 0,$$

$$u_2^p\Big|_{\Gamma_p} - u_2^0\Big|_{\Gamma_0} = \varepsilon, \qquad i, j = 1, 2, \qquad p = 1, \ldots, N; \quad (3)$$

– *у випадку ідеального зчеплення з початковим натягом*

$$\sigma_{ij}^0 n_j^0\Big|_{\Gamma_0} = \sigma_{ij}^p n_j^p\Big|_{\Gamma_p},$$

$$u_1^0\Big|_{\Gamma_0} = u_1^p\Big|_{\Gamma_p}, \quad u_2^p\Big|_{\Gamma_p} - u_2^0\Big|_{\Gamma_0} = \varepsilon, \qquad i, j = 1, 2, \qquad p = 1, \ldots, N. \quad (4)$$

Тут ε – величина початкового натягу.

Домножаючи обидві частини кожного з рівнянь системи (1) на відповідні фундаментальні розв'язки $U_i^{k(0)}$ та $U_i^{k(p)}$, $p = 1,\ldots,N$, та інтегруючи по областях матриці та включень, одержимо

– *для матриці*:

$$\int\limits_{S_0 \setminus \cup \sum\limits_{p=1}^{N} S_p} \left(\frac{s_{22}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{s_{66}^0} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{s_{66}^0} - \frac{s_{12}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) U_1^{k(0)} \, dS_0 -$$

$$- \int\limits_{S_0 \setminus \cup \sum\limits_{p=1}^{N} S_p} X_k U_1^{k(0)} \, dS_0 = 0 \, , \tag{5}$$

$$\int\limits_{S_0 \setminus \cup \sum\limits_{p=1}^{N} S_p} \left(\frac{1}{s_{66}^0} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{s_{11}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{s_{66}^0} - \frac{s_{12}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) U_2^{k(0)} \, dS_0 -$$

$$- \int\limits_{S_0 \setminus \cup \sum\limits_{p=1}^{N} S_p} X_k U_2^{k(0)} \, dS_0 = 0 \, ; \tag{6}$$

– *для області* p *-го включення*:

$$\int\limits_{S_p} \left(\frac{s_{22}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{s_{66}^0} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{s_{66}^0} - \frac{s_{12}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) U_1^{k(p)} \, dS_0 -$$

$$- \int\limits_{S_p} X_k U_1^{k(p)} \, dS_0 = 0 \, , \tag{7}$$

$$\int\limits_{S_p} \left(\frac{1}{s_{66}^0} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{s_{11}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{s_{66}^0} - \frac{s_{12}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) U_2^{k(p)} \, dS_0 -$$

$$- \int\limits_{S_p} X_k U_2^{k(p)} \, dS_0 = 0 \, . \tag{8}$$

Фундаментальні переміщення $U_i^{k(0)}$ та $U_i^{k(p)}$ визначаються [5] співвідношеннями:

$$U_1^{1(p)}(\xi,x) = K_\alpha^p\left(\sqrt{\alpha_1^p}\,(A_2^p)^2\ln\overline{r}_1 - \sqrt{\alpha_2^p}\,(A_1^p)^2\ln\overline{r}_2\right),$$

$$U_1^{2(p)}(\xi,x) = U_2^{1(p)}(\xi,x) = -K_\alpha^p A_1^p A_2^p(\theta_1-\theta_2),$$

$$U_2^{2(p)}(\xi,x) = -K_\alpha^p\left(\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1^p}}\right)(A_1^p)^2\ln\overline{r}_1 - \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_2^p}}\right)(A_2^p)^2\ln\overline{r}_2\right),$$

де

$$K_\alpha^p = \frac{1}{2\pi(\alpha_1^p-\alpha_2^p)s_{22}^p},\qquad \alpha_1^p+\alpha_2^p = \left(\frac{1}{s_{22}^p}\right)(2s_{12}^p+s_{66}^p),$$

$$\alpha_1^p\alpha_2^p = s_{11}^p s_{22}^p,\qquad A_i^p = s_{12}^p - \alpha_i^p s_{22}^p,$$

$$\overline{r}_i = \sqrt{x_1^2+\frac{x_2^2}{\alpha_i}},\qquad \theta_i = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x_2}{x_1\sqrt{\alpha_i}}\right).$$

Інтегруючи (5)–(8) частинами, використовуючи формули Остроградського – Ґаусса, одержимо співвідношення Сомільяни

– *для матриці*:

$$\chi(S)u_k^{(0)}(\xi) = \int\limits_{S_0\setminus\cup\sum\limits_{p=1}^{N}S_p} X_i U_i^{k(0)}\,dS_0 + \int\limits_{\Gamma_0}\sigma_{ij}^{(0)}n_j^{(0)}U_i^{k(0)}\,d\Gamma_0 -$$

$$-\int\limits_{\Gamma_0} g_i^{k(0)}u_i\,d\Gamma_0 - \sum_{p=1}^{N}\left(\int\limits_{\Gamma_p}\sigma_{ij}^{(0)}n_j^{(p)}U_i^{k(0)}\,d\Gamma_p - \int\limits_{\Gamma_p} g_i^{k(0)}u_i\,d\Gamma_p\right),$$

$$\chi = \begin{cases} 1, & \xi\in S_0\setminus\cup\sum\limits_{p=1}^{N}S_p,\\ 0, & \xi\notin S_0\setminus\cup\sum\limits_{p=1}^{N}S_p;\end{cases}\tag{9}$$

– *для кожного включення*:

$$\chi(S)u_k^{(p)}(\xi) = \int\limits_{\Gamma_p}\sigma_{ij}n_jU_i^{k(p)}\,d\Gamma_p - \int\limits_{\Gamma_p} g_i^{k(p)}u_i\,d\Gamma_p + \int\limits_{S_p}X_iU_i^{k(p)}\,dS_p,$$

$$\chi = \begin{cases}1, & \xi\in S_p,\\ 0, & \xi\notin S_p.\end{cases}\tag{10}$$

Тут $g_i^{k(0)}(\xi,x)$ та $g_i^{k(p)}(\xi,x)$ – фундаментальні зусилля для матриці та кожного із включень, $p=1,\ldots,N$, які визначаються співвідношеннями

$$g_1^{1(p)}(\xi,x) = K_\alpha^p\left(\frac{A_1^p}{\sqrt{\alpha_2}\,\overline{r}_2^2} - \frac{A_2^p}{\sqrt{\alpha_1}\,\overline{r}_1^2}\right)x_kn_k,$$

$$g_2^{2(p)}(\xi,x) = K_\alpha^p\left(\frac{A_1^p}{\sqrt{\alpha_1^p}\,\overline{r}_1^2} - \frac{A_2^p}{\sqrt{\alpha_2^p}\,\overline{r}_2^2}\right)x_kn_k,$$

$$g_2^{1(p)}(\xi,x) = K_\alpha^p\left(M_1^p\frac{A_2^p}{\overline{r}_1^2} - M_2^p\frac{A_1^p}{\overline{r}_2^2}\right),$$

$$g_1^{2(p)}(\xi,x) = K_\alpha^p\left(M_1^p\frac{A_1^p}{\alpha_1^p\overline{r}_1^2} - M_2^p\frac{A_2^p}{\alpha_2^p\overline{r}_2^2}\right),$$

де $M_i^p = \sqrt{\alpha_i^p}\, x_1 n_2 - \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_i^p}}\right) x_2 n_1$.

Здійснимо дискретизацію контурів матриці та включень, вибираючи елементами дискретизації відрізки ламаних, на які заміняємо межі матриці та кожного із включень (рис. 1). Введемо на цих відрізках локальні системи координат. Тоді, використовуючи граничні властивості потенціалів простого та подвійного шарів, одержимо систему інтегральних рівнянь для визначення поля переміщень в кусково-однорідному тілі. Здійснюючи граничний перехід в (9), (10), одержимо систему граничних інтегральних рівнянь (у випадку гладкого контуру)

– *для матриці*:

$$\frac{1}{2}\delta_{kj}u_j^{(0)}(\xi) = \int\limits_{S_0 \setminus \cup \sum\limits_{p=1}^{N} S_p} X_i U_i^{k(0)}\, dS_0 + \int\limits_{\Gamma_0} \sigma_{ij}^{(0)} n_j^{(0)} U_i^{k(0)}\, d\Gamma_0 - \int\limits_{\Gamma_0} g_i^{k(0)} u_i\, d\Gamma_0 -$$

$$- \sum_{p=1}^{N} \left(\int\limits_{\Gamma_p} \sigma_{ij}^{(0)} n_j^{(p)} U_i^{k(0)}\, d\Gamma_p - \int\limits_{\Gamma_p} g_i^{k(0)} u_i\, d\Gamma_p \right); \tag{11}$$

– *для кожного включення* $(x \in S_p)$:

$$\frac{1}{2}\delta_{kj}u_j^{(p)}(x) = \int\limits_{S_p} X_i U_i^{k(p)}\, dS_0 +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_p} U_i^{k(p)}\, \sigma_{ij}^{(p)} n_j^{(p)}\, d\Gamma_p - \int\limits_{\Gamma_p} u_i^{(p)} g_i^{k(p)}\, d\Gamma_p\,. \tag{12}$$

Далі, невідомі щільності потенціалів подвійного шару на контурах включень подамо на кожному відрізку дискретизації як функції двох змінних. На відміну від стандартного методу граничних інтегральних рівнянь, таке подання дозволяє після розв'язання системи граничних інтегральних рівнянь визначити всі компоненти переміщень і напружень на всіх межах контакту.

У випадку лінійної апроксимації компоненти переміщень на кожному відрізку дискретизації можемо записати так:

$$u_1'^{i(p)}(x') = a_{1i}^p x_1' + a_{2i}^p x_2' + a_{3i}^p\,,$$

$$u_2'^{i(p)}(x') = a_{4i}^p x_1' + a_{5i}^p x_2' + a_{6i}^p, \qquad p = 1,\ldots,N, \qquad i = 1,\ldots,M_p\,. \tag{13}$$

Використовуючи співвідношення Коші та закон Гука для ізотропного пружного тіла, одержимо відповідні вирази для напружень на кожному відрізку дискретизації:

$$\sigma_{11}^{i(p)}(x') = \left(\frac{s_{22}^p}{s_{11}^p s_{22}^p - (s_{12}^p)^2}\right) a_{1i}^p - \left(\frac{s_{12}^p}{s_{11}^p s_{22}^p - (s_{12}^p)^2}\right) a_{5i}^p\,,$$

$$\sigma_{22}^{i(p)}(x') = -\left(\frac{s_{12}^p}{s_{11}^p s_{22}^p - (s_{12}^p)^2}\right) a_{1i}^p + \left(\frac{s_{22}^p}{s_{11}^p s_{22}^p - (s_{12}^p)^2}\right) a_{5i}^p\,,$$

$$\sigma_{12}^{i(p)}(x') = \frac{1}{s_{66}^p}(a_{2i}^p + a_{4i}^p), \qquad p = 0,\ldots,N\,, \qquad i = 1,\ldots,M_p\,. \tag{14}$$

Зауважимо, що у випадку лінійної апроксимації компоненти тензора напружень (14) будуть постійними на кожному відрізку інтегрування. Оскільки згідно з постановкою задачі розглядаємо багатозв'язну область, до цих умов необхідно додати умови контактної взаємодії на межі кожної із підобластей.

У випадку реалізації на межі контактуючих областей ідеального механічного контакту ці умови з урахуванням апроксимації (13) запишемо в такому вигляді:

$$a_{1i}^0 = a_{1i}^p, \qquad a_{3i}^0 = a_{3i}^p, \qquad a_{4i}^0 = a_{4i}^p, \qquad a_{6i}^0 = a_{6i}^p,$$

$$\frac{1}{s_{66}^0}(a_{2i}^0 + a_{4i}^0) = \frac{1}{s_{66}^p}(a_{2i}^p + a_{4i}^p),$$

$$-\left(\frac{s_{12}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2}\right) a_{1i}^0 + \left(\frac{s_{22}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2}\right) a_{5i}^0 =$$

$$= -\left(\frac{s_{12}^p}{s_{11}^p s_{22}^p - (s_{12}^p)^2}\right) a_{1i}^p + \left(\frac{s_{22}^p}{s_{11}^p s_{22}^p - (s_{12}^p)^2}\right) a_{5i}^p. \qquad (15)$$

У випадку неідеального контакту залежно від виду контактної взаємодії, замість умов (2)–(4), необхідно записувати умови

– *для гладкого проковзування*:

$$a_{4i}^0 = a_{4i}^p, \qquad a_{6i}^0 = a_{6i}^p, \qquad \frac{1}{s_{66}^0}(a_{2i}^0 + a_{4i}^0) = \frac{1}{s_{66}^p}(a_{2i}^p + a_{4i}^p) = 0,$$

$$-\left(\frac{s_{12}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2}\right) a_{1i}^0 + \left(\frac{s_{22}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2}\right) a_{5i}^0 =$$

$$= -\left(\frac{s_{12}^p}{s_{11}^p s_{22}^p - (s_{12}^p)^2}\right) a_{1i}^p + \left(\frac{s_{22}^p}{s_{11}^p s_{22}^p - (s_{12}^p)^2}\right) a_{5i}^p; \qquad (16)$$

– *для гладкого проковзування з натягом*:

$$a_{4i}^0 = a_{4i}^p, \qquad a_{6i}^0 - a_{6i}^p = \varepsilon, \qquad \frac{1}{s_{66}^0}(a_{2i}^0 + a_{4i}^0) = \frac{1}{s_{66}^p}(a_{2i}^p + a_{4i}^p) = 0,$$

$$-\left(\frac{s_{12}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2}\right) a_{1i}^0 + \left(\frac{s_{22}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2}\right) a_{5i}^0 =$$

$$= -\left(\frac{s_{12}^p}{s_{11}^p s_{22}^p - (s_{12}^p)^2}\right) a_{1i}^p + \left(\frac{s_{22}^p}{s_{11}^p s_{22}^p - (s_{12}^p)^2}\right) a_{5i}^p; \qquad (17)$$

– *для ідеального контакту з натягом:*

$$a_{1i}^0 = a_{1i}^p, \qquad a_{3i}^0 = a_{3i}^p, \qquad a_{4i}^0 = a_{4i}^p, \qquad a_{6i}^0 - a_{6i}^p = \varepsilon,$$

$$\frac{1}{s_{66}^0}(a_{2i}^0 + a_{4i}^0) = \frac{1}{s_{66}^p}(a_{2i}^p + a_{4i}^p),$$

$$-\left(\frac{s_{12}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2}\right) a_{1i}^0 + \left(\frac{s_{22}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2}\right) a_{5i}^0 =$$

$$= -\left(\frac{s_{12}^p}{s_{11}^p s_{22}^p - (s_{12}^p)^2}\right) a_{1i}^p + \left(\frac{s_{22}^p}{s_{11}^p s_{22}^p - (s_{12}^p)^2}\right) a_{5i}^p. \qquad (18)$$

Таким чином, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, для замикання якої необхідно додати умови неперервності переміщень на кінцях кожного з відрізків:

$$(0.5a_{1i}^p d_i^p + a_{3i}^p)\cos\alpha_i^p - (0.5a_{4i}^p d_i^p + a_{6i}^p)\sin\alpha_i^p =$$

$$= (-0.5a_{1i+1}^p d_{i+1}^p + a_{3i+1}^p)\cos\alpha_{i+1}^p -$$

$$- (-0.5a_{4i+1}^p d_{i+1}^p + a_{6i+1}^p)\sin\alpha_{i+1}^p ,$$

$$(0.5a_{1i}^p d_i^p + a_{3i}^p)\sin\alpha_i^p + (0.5a_{4i}^p d_i^p + a_{6i}^p)\cos\alpha_i^p =$$

$$= (-0.5a_{1i+1}^p d_{i+1}^p + a_{3i+1}^p)\sin\alpha_{i+1}^p +$$

$$+ (-0.5a_{4i+1}^p d_{i+1}^p + a_{6i+1}^p)\cos\alpha_{i+1}^p , \tag{19}$$

де d_i^p – довжина i-го відрізка (рис. 1) апроксимації p-го включення, а d_i^0 – відповідна довжина i-го відрізка апроксимації матриці.

Далі, розв'язавши систему лінійних алгебраїчних рівнянь (11), (12), (15)–(19), на основі співвідношень Сомільяно визначаємо складові вектора переміщень у внутрішніх точках розглядуваного тіла. Після диференціювання співвідношень Сомільяно одержуємо відповідні інтегральні подання для всіх компонент тензора напружень у внутрішніх точках:

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int\limits_{\Gamma_0} \mathcal{E}_{ik}^j(\xi,x)p_k(x)\,d\Gamma_0(x) - \int\limits_{\Gamma_0} \Sigma_{ik}^j(\xi,x)u_k(x)\,d\Gamma_0 +$$

$$+ \int\limits_{S_0} \mathcal{E}_{ik}^j(\xi,x)X_k(x)\,dS_0 . \tag{20}$$

Тут $\mathcal{E}_{ik}^j(\xi,x)$ та $\Sigma_{ik}^j(\xi,x)$ – відповідно деформації і напруження у довільній точці x, зумовлені одиничною зосередженою силою, прикладеною у точці ξ і направленою уздовж k-ї осі.

Вирази у правій частині (20) не містять невідомих величин і, отже, щоб одержати вирази для переміщень і напружень, необхідно лише обчислити праві частини вищенаведених виразів.

Таким чином, підхід, запропонований в [1] і продовжений у роботах [2, 3], можна поширити на задачі плоскої теорії пружності анізотропних кусково-однорідних тіл за умови, що відомі відповідні фундаментальні розв'язки цих задач.

1. *Лавренюк В. І.* Про визначення напружено-деформованого стану матриці з включенням методом граничних елементів // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 1993. – № 2. – С. 27–35.
2. *Лавренюк В. І., Лавренюк М. В.* Про застосування методу граничних елементів в задачах термопружності кусково-однорідних тіл // Крайові задачі термомеханіки: Тези доп. Міжнар. наук. конф., присвяченої пам'яті проф. Ю. М. Коляна. – Львів, 1996. – С. 176–180.
3. *Лавренюк М. В.* Дослідження впливу умов контакту на напружено-деформований стан нескінченної пружної платівки з двома еліптичними включеннями // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 1998. – № 2. – С. 63–69.
4. *Pan E., Amadei B., Kim Y. I.* 2-D BEM analysis of anisotropic half-plane problems – Application to rock mechanics // Int. J. Rock Mech. & Min. Sci. – 1998. – **35**, No. 1. – P. 69–74.
5. *Rizzo F. J. , Shippy D. J.* A method for stress determination in plane anisotropic elastic bodies // J. Compos. Mater. – 1970. – **4**, No. 1. – P. 36–61.
6. *Schclar N. A.* Anisotropic analysis using boundary elements. – WIT Press, 1994. – Topics in Engineering Ser. – Vol. 20. – 168 p.
7. *Sladek J., Sladek V., Atluri S. N.* Meshless local Petrov–Galerkin method in anisotropic elasticity // Comput. Model. in Eng. & Sci. (CMES). – 2004. – **6**, No. 5. – P. 477–489.
8. *Wang J. J., Bhattacharyya S., Li Q., Heo T. W., Ma X. Q., Long-Qing Chen.* Elastic solutions with arbitrary elastic inhomogeneity and anisotropy // Phil. Mag. Lett. – 2012. – **92**, No. 7. – P. 327–335.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К ЗАДАЧАМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния тонкой упругой ортотропной пластинки с ортотропными включениями произвольной формы под действием приложенных к краям пластинки усилий. Для решения задачи предложена модификация прямого метода граничных элементов, позволяющая одновременно определять все искомые величины на поверхностях контакта каждого из включений с матрицей с помощью двумерной аппроксимации составляющих вектора перемещений и тензора напряжений на каждом элементе дискретизации. Получены исходные определяющие соотношения для всех компонент вектора перемещений и тензора напряжений как на границе, так и во внутренних точках рассматриваемой структуры.

APPLICATION OF MODIFIED BOUNDARY ELEMENT METHOD TO ELASTICITY PROBLEMS OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS ANISOTROPIC MEDIA

The problem of determining of stress-strain state in thin elastic orthotropic plate with orthotropic inclusions of an arbitrary shape under loads applied to the edges of plate is considered. For solving the problem the modified direct boundary element method, that allows simultaneous determination of all the components of stress-strain state on the boundary of bodies under consideration by using two-dimensional approximation of components of displacement vector and stress tensor on every element of discretization, is proposed. The governing relations for determining all the components of displacement vector and stress tensor on the boundary as well as in internal points of the body under consideration, are obtained.

Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ

Одержано
21.04.13