

ТУНЕЛЬНА ВНУТРІШНЯ ТРІЩИНА В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ АНІЗОТРОПНОМУ ПРОСТОРИ

Задача про внутрішню тунельну тріщину в кусково-однорідному анізотропному середовищі зведена до системи трьох сингулярних інтегральних рівнянь. Запропоновано ефективний чисельно-аналітичний метод розв'язання отриманої системи. Встановлено закономірності поведінки коефіцієнтів інтенсивності напружень при наближенні тріщини до площини з'єднання різних анізотропних півпросторів.

Задачі про міжфазні дефекти в кусково-однорідних анізотропних середовищах розглядалися багатьма авторами. При цьому дослідження, в основному, обмежувалися плоскими випадками [4–6, 9, 10, 17]. У більш загальних (тривимірних анізотропних) випадках використовували чисельно-аналітичні методи (див., наприклад, [16]). У роботах [3, 7, 8] за допомогою побудованих інтегральних сингулярних співвідношень досліджено міжфазні тунельні дефекти в кусково-однорідному анізотропному середовищі, яке знаходиться у двовимірному стані (узагальнена плоска деформація [11]).

У пропонованій праці метод, викладений у [3, 7, 8], узагальнено на випадок внутрішніх тунельних дефектів. Зокрема, побудовано розривний розв'язок для кусково-однорідного анізотропного простору за наявності внутрішніх дефектів і записано інтегральні співвідношення, що пов'язують стрибки та суми переміщень і напружень на вказаних дефектах у просторі узагальнених функцій повільного зростання. У результаті задачу про тунельну тріщину, яка розташована під довільним кутом до площини з'єднання двох різних анізотропних півпросторів, зведено до системи трьох сингулярних інтегральних рівнянь (СІР). Запропоновано та обґрунтовано збіжність ефективного чисельно-аналітичного методу розв'язання отриманої системи СІР у випадку наближення тріщини до площини з'єднання матеріалів. Отримано залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) у вершинах тріщини від комбінацій анізотропних матеріалів і від відстані до вказаної площини.

1. Побудова розривного розв'язку для кусково-однорідного анізотропного середовища. Нехай простір, складений із двох різних анізотропних півпросторів, з'єднаних у площині $x = 0$, перебуває у двовимірному стані без наявності площин пружної симетрії, тобто в умовах узагальненої плоскої деформації [11]. У просторі розміщені довільні кусково-неперервні циліндричні поверхні, напрямні яких паралельні до осі OZ . В результаті перетину циліндричних поверхонь площиною XOY утворюється кусково-неперервний контур ℓ . На вказаних поверхнях розташовані наскрізні дефекти загальної природи (типу тріщин, відшарованих і невідшарованих включень). Виходячи із рівняння рівноваги та узагальненого закону Гука відносно компонент тензора напружень і вектора переміщень:

$$\boldsymbol{\eta} = \{\eta_k(x, y)\}_{k=1}^8 = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, u, v, w\}, \quad (1)$$

отримаємо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\mathbf{D}[x, \partial_1, \partial_2]\boldsymbol{\eta} = \mathbf{f}, \quad x \neq 0, \quad (x, y) \notin \ell, \quad (2)$$

де

$$\mathbf{D}[x, \partial_1, \partial_2] = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_* & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ -\mathbf{B}(x) & \mathbf{D}_*^\top \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(x) = \{\beta_{kj}(x)\}_{j,k=1}^5, \quad \beta_{kj}(x) = \begin{cases} \beta_{kj}^+, & x > 0, \\ \beta_{kj}^-, & x < 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{D}_* = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & \partial_2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1 & \partial_2 \end{pmatrix}, \quad \partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\mathbf{f} = \{-X_0, -Y_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$$

β_{kj}^\pm – коефіцієнти узагальненого закону Гука відповідно для верхнього та нижнього півпросторів; X_0, Y_0 – проекції об'ємних сил на відповідні осі. Нормальні напруження σ_z при цьому визначаємо за формулою

$$\sigma_z = -\beta_{66}^{-1} \sum_{j=1}^5 \beta_{6j} v_j. \text{ Приймаємо, що в площині } x=0 \text{ виконуються умови}$$

неперервності:

$$\boldsymbol{\chi}^- = 0, \quad (3)$$

де $\boldsymbol{\chi}^- = \{\chi_k^-(y)\}^6 = \{\langle \eta_1 \rangle^-, \langle \eta_3 \rangle^-, \langle \eta_4 \rangle^-, \langle \eta_6 \rangle^-, \langle \eta_7 \rangle^-, \langle \eta_8 \rangle^-\}$; $\langle \eta_k \rangle^-$ – стрибки функцій η_k при переході через площину $x=0$. Для запису умов на лінії ℓ , де можливі розриви всіх компонент вектора $\boldsymbol{\eta}$, введемо в кожній точці лінії ℓ локальну систему координат (N, S, Z) . Напрямок осі S співпадає з напрямом дотичного вектора \mathbf{s} до лінії ℓ у вибраній точці, напрям осі N співпадає з напрямом нормального вектора \mathbf{n} , який вибираємо зліва від дотичного вектора, вісь Z залишається незмінною. Кут між осями X і N позначимо через $\varphi = \varphi(x, y)$, де $(x, y) \in \ell$. У новій системі координат компоненти тензора напружень і вектора переміщень позначимо так:

$$\boldsymbol{\eta}_\ell = \{\tilde{\eta}_k(x, y)\}_{k=1}^8 = \{\sigma_N, \sigma_S, \tau_{NS}, \tau_{NZ}, \tau_{SZ}, u_N, v_S, w_Z\}. \quad (4)$$

Залежно від виду контактної взаємодії дефектів із простором на лінії ℓ будуть відомі шість із наступних величин: $\tilde{\boldsymbol{\chi}}^\pm = \{\tilde{\chi}_k^\pm\}_{k=1}^6$, де $\tilde{\chi}_k^\pm = \langle \tilde{\chi}_k(x, y) \rangle_\ell^\pm$ – відповідно стрибки та суми із функцій (4). Для визначеності будемо вважати відомими на лінії ℓ стрибки

$$\langle \tilde{\eta}_k \rangle_\ell^- = \tilde{\chi}_k^-(x, y), \quad k = 1, \dots, 8, \quad k \neq 2, 5, \quad (x, y) \in \ell. \quad (5)$$

Розв'язки крайової задачі (2), (3), (5) при виконанні умов $X_0, Y_0 \in C_{0,\ell}^1(\mathbb{R}^2) \cap L_1(\mathbb{R}^2)$, $\tilde{\chi}_k^\pm(x, y) \in C_*(\ell) \cap L_1(\ell)$, $\chi_{k0}^\pm(y) \in C_*(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ слід розшукувати в класі $C_{0,\ell}^1(\mathbb{R}^2) \cap L_1(\mathbb{R}^2)$, де $C_{0,\ell}^m$ – простір функцій, неперервних разом з усіма похідними до m -го порядку в \mathbb{R}^2 , за винятком прямої $x=0$ і лінії ℓ ; $L_1(\mathbb{R}^2)$ – простір функцій, інтегровних в \mathbb{R}^2 ; $C_*(\ell)$, $L_1(\ell)$ – простори відповідно кусково-неперервних та інтегровних на ℓ функцій.

Продовжимо систему (2) на весь простір. Для цього перейдемо до простору $\mathcal{Z}'(\mathbb{R}^2)$ узагальнених функцій повільного зростання і врахуємо зв'язок між узагальненими і звичайними похідними

$$\partial_k \eta_j = \tilde{\partial}_k \eta_j - \chi_j^-(x, y) (-1)^{k+1} \mathbf{x}_k \delta(\ell),$$

де $\delta(\ell)$ – функція Дірака, зосереджена на контурі ℓ , χ_j^- – стрибки функцій η_j на контурі ℓ , а також врахуємо формули зв'язку між компонентами векторів $\boldsymbol{\eta}$ і $\boldsymbol{\eta}_\ell$ [12]. В результаті відносно вектора $\boldsymbol{\eta}$ у просторі $\mathcal{Z}'(\mathbb{R}^2)$ отримаємо крайову задачу

$$(\mathbf{D}[x, \tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2]\boldsymbol{\eta}, q) = (\mathbf{f}_*, q), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad q \in \mathfrak{Z}(\mathbb{R}^2), \quad (6)$$

$$\eta_k^+ = \eta_k^-, \quad k = 1, 3, 4, 6, 7, 8, \quad (7)$$

де

$$\eta_k^\pm \in \mathfrak{Z}'(\mathbb{R}^2), \quad \mathbf{f}_* = \{f_{j*}\}^8, \quad f_{1*} = (\tilde{\chi}_1^- \mathbf{x}_1 + \tilde{\chi}_2^- \mathbf{x}_2)\delta(\ell) - X_0,$$

$$f_{2*} = (-\tilde{\chi}_1^- \mathbf{x}_2 + \tilde{\chi}_2^- \mathbf{x}_1)\delta(\ell) - Y_0, \quad f_{3*} = \tilde{\chi}_3^- \delta(\ell),$$

$$f_{4*} = (\tilde{\chi}_4^- \mathbf{x}_1 + \tilde{\chi}_5^- \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_1\delta(\ell), \quad f_{5*} = (\tilde{\chi}_4^- \mathbf{x}_2 - \tilde{\chi}_5^- \mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2\delta(\ell),$$

$$f_{6*} = (\tilde{\chi}_5^- (\mathbf{x}_1^2 - \mathbf{x}_2^2) - 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\tilde{\chi}_4^-)\delta(\ell), \quad f_{7*} = \tilde{\chi}_6^- \mathbf{x}_1\delta(\ell),$$

$$f_{8*} = -\tilde{\chi}_6^- \mathbf{x}_2\delta(\ell), \quad \mathbf{x}_1 = \cos \varphi, \quad \mathbf{x}_2 = \sin \varphi,$$

$$\mathfrak{Z}'_\pm(\mathbb{R}^2) = \{f^\pm \in \mathfrak{Z}'(\mathbb{R}^2) \mid \text{supp } f^\pm = \mathbb{R}_\pm \times \mathbb{R}\}.$$

Розв'язки крайової задачі (6), (7), дотримуючись термінології [7, 8, 13], будемо називати *розривним розв'язком для кусково-однорідного анізотропного середовища* у просторі $\mathfrak{Z}'(\mathbb{R}^2)$. Цей розв'язок отримаємо на основі фундаментального розривного розв'язку для кусково-однорідного анізотропного простору, тобто системи векторів

$$\mathbf{w}_j = \{w_{kj}(x, y, x_0, y_0)\}_{k=1, \dots, 8}, \quad w_{kj} \in \mathfrak{Z}'(\mathbb{R}^2), \quad j = 1, \dots, 8,$$

яка задовольняє таку систему крайових задач:

$$\mathbf{D}[x, \tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2]\mathbf{w}_j = \mathbf{f}_{0j}, \quad j = 1, \dots, 8, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (8)$$

$$w_{kj}^+ = w_{kj}^-, \quad k = 1, \dots, 8, \quad k \neq 2, 5, \quad (9)$$

де

$$w_{kj}^\pm \in \mathfrak{Z}'_\pm(\mathbb{R}^2), \quad \mathbf{f}_{0j} = \{f_{kj}^0\}^8 = \{\delta_{kj}\}^8 \delta(x - x_0, y - y_0), \quad x_0 \neq 0, \quad y_0 \neq 0,$$

δ_{nj} – символ Кронекера.

Компоненти векторів \mathbf{w}_j належать [5] до підпростору $\mathfrak{Z}'_0(\mathbb{R}^2)$. Застосувавши до (8) двовимірне перетворення Фур'є і скориставшись результатами робіт [3, 7], відносно функцій $W_{kj}^\pm(\alpha_1, \alpha_2) = F_2[w_{kj}^\pm] \in \Omega'_{\pm, -1}(\mathbb{R}^2)$ отримаємо у просторі $\mathfrak{Z}'(\mathbb{R}^2)$ матричну крайову задачу Рімана за змінною α_1 :

$$\mathbf{M}_+(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\mathbf{W}_j^+ = \mathbf{M}_-(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\mathbf{W}_j^+ + \mathbf{f}_{*j}, \quad j = 1, \dots, 8, \quad (10)$$

де

$$\mathbf{M}_\pm = \pm \mathbf{D}[\pm 0, -i\alpha_1, -i\alpha_2], \quad \mathbf{W}_j^\pm = \{W_{kj}^\pm\}^8,$$

$$\mathbf{f}_{*j} = \{\delta_{kj} e_0^*\}^8, \quad e_0^* = e^{i\alpha_1 x_0 + i\alpha_2 y_0}.$$

Враховуючи поліноміальний вигляд коефіцієнтів задачі (10), застосуємо до її розв'язування метод, наведений в [3, 7, 8], внаслідок чого отримаємо

$$W_{kj} = W_{kj}^+ + W_{kj}^-, \quad k, j = 1, \dots, 8, \quad (11)$$

де

$$W_{kj}^\pm = (-i\alpha_2)W_{kj}^\pm, \quad k = 6, 7, 8,$$

$$W_{kj}^\pm(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{P_6^\pm(\alpha_1, \alpha_2)} \sum_{p=1}^8 i^{\theta_1} r_{kp}^\pm t_{pj}^\pm,$$

$$\begin{aligned}
P_6^\pm(\alpha_1, \alpha_2) &= P_4^\pm P_2^\pm - (P_3^\pm)^2, & P_2^\pm &= \beta_{44}^\pm \alpha_2^2 - 2\beta_{45}^\pm \alpha_1 \alpha_2 + \beta_{55}^\pm \alpha_1^2, \\
P_3^\pm &= \beta_{14}^\pm \alpha_2^3 - (\beta_{15}^\pm + \beta_{34}^\pm) \alpha_1 \alpha_2^2 + (\beta_{24}^\pm + \beta_{35}^\pm) \alpha_1^2 \alpha_2 - \beta_{25}^\pm \alpha_1^3, \\
P_4^\pm &= \beta_{11}^\pm \alpha_2^4 - 2\beta_{13}^\pm \alpha_1 \alpha_2^3 + (\beta_{33}^\pm + 2\beta_{12}^\pm) \alpha_1^2 \alpha_2^2 - 2\beta_{23}^\pm \alpha_1^3 \alpha_2 + \beta_{22}^\pm \alpha_1^4, \\
r_{kp}^\pm &= h_k^\pm \lambda_{pl}^\pm, & k &= 1, \dots, 5, & p &= 1, \dots, 8, \\
l &= \begin{cases} 1, & k = 1, 2, 3, \\ 2, & k = 4, 5, \end{cases} & \theta_1 &= \begin{cases} 1, & p = 1, 2, 3, \\ 0, & p = 4, \dots, 8, \end{cases} \\
\lambda_{1l}^\pm &= \alpha_1^{-1} (g_j^\pm P_{l+2}^\pm - \ell_j^\pm P_{l+1}^\pm), & \lambda_{jl}^\pm &= \alpha_2^{-1} (g_5^\pm P_{l+2}^\pm - \ell_5^\pm P_{l+1}^\pm), & j &= 1, 3, \\
\lambda_{4l}^\pm &= \alpha_2^2 P_{l+1}^\pm, & \lambda_{5l}^\pm &= -\alpha_2^2 P_{l+1}^\pm, & \lambda_{6l}^\pm &= -\alpha_1 \alpha_2 P_{l+1}^\pm, \\
\lambda_{7l}^\pm &= \alpha_2 P_{l+2}^\pm, & \lambda_{8l}^\pm &= -\alpha_1 P_{l+2}^\pm, & l &= 1, 2, \\
r_{6j}^\pm &= \alpha_1^{-1} \alpha_2 (\lambda_{j1}^\pm \ell_1^\pm - \lambda_{j2}^\pm g_1^\pm), & r_{7j}^\pm &= \lambda_{j1}^\pm \ell_2^\pm - \lambda_{j2}^\pm g_2^\pm, & r_{8j}^\pm &= \lambda_{j1}^\pm \ell_5^\pm - \lambda_{j2}^\pm g_5^\pm, \\
h_1^\pm &= \alpha_2^2, & h_2^\pm &= \alpha_1^2, & h_3^\pm &= -\alpha_1 \alpha_2, & h_4^\pm &= -\alpha_2, & h_5^\pm &= \alpha_1, \\
\ell_k^\pm &= \beta_{1k}^\pm \alpha_2^2 - \beta_{3k}^\pm \alpha_1 \alpha_2 + \beta_{2k}^\pm \alpha_1^2, \\
g_k^\pm &= \beta_{4k}^\pm \alpha_2 - \beta_{5k}^\pm \alpha_1, & k &= 1, \dots, 5, \\
\{t_{kj}^\pm\}_{k=1, \dots, 8} &= \theta(\pm x_0) e_0^* \{\delta_{kj}\}_{k=1, \dots, 8} \mp \frac{1}{2} \mathbf{f}_0^*, & j &= 1, \dots, 8, & \theta(x) &= \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \\
\mathbf{f}_0^* &= \{\chi_{10}(\alpha_2), \chi_{30}(\alpha_2), \chi_{40}(\alpha_2), \chi_{60}(\alpha_2), 0, \chi_{70}(\alpha_2), \chi_{80}(\alpha_2), 0\}.
\end{aligned}$$

Для визначення невідомих функцій $\chi_{k0}(\alpha_2)$ використовуємо умови (9).

Після обернення (11) вирази компонент фундаментальних розривних розв'язків для кусково-однорідного анізотропного простору подамо так:

$$w_{kj}(x, y, x_0, y_0) = \theta(x) w_{kj}^+ + \theta(-x) w_{kj}^-, \quad k = 1, \dots, 8, \quad j = 1, \dots, 8, \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned}
w_{kj}^+ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^3 \left\{ \theta(x_0) \bar{R}_{kjn}^+ \mathcal{K}_{kj}[\bar{\xi}_n^+ - \bar{\xi}_{n0}^+] + \sum_{m=1}^3 [\theta(x_0) \beta_{kijnm}^{++} \mathcal{K}_{kj}[\bar{\xi}_n^+ - \xi_{m0}^+] + \right. \\
&\quad \left. + \theta(-x_0) \beta_{kijnm}^{+-} \mathcal{K}_{kj}[\bar{\xi}_n^+ - \bar{\xi}_{m0}^+]] \right\}, \\
w_{kj}^- &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^3 \left\{ \theta(-x_0) \bar{R}_{kjn}^- \mathcal{K}_{kj}[\bar{\xi}_n^- - \bar{\xi}_{n0}^-] + \sum_{m=1}^3 [\theta(x_0) \beta_{kijnm}^{-+} \mathcal{K}_{kj}[\xi_n^- - \xi_{m0}^+] + \right. \\
&\quad \left. + \theta(-x_0) \beta_{kijnm}^{--} \mathcal{K}_{kj}[\xi_n^- - \bar{\xi}_{m0}^-]] \right\}, \\
\mathcal{K}_{kj}[f] &= f^{-1}, \quad (k = 1, \dots, 5, j = 1, 2, 3) \cup (k = 6, 7, 8, j = 4, \dots, 8), \\
\mathcal{K}_{kj}[f] &= -f^{-2}, \quad k = 1, \dots, 5, \quad j = 4, \dots, 8, \\
\mathcal{K}_{kj}[f] &= \ln f, \quad k = 6, 7, 8, \quad j = 1, 2, 3,
\end{aligned}$$

$$\beta_{kjm}^{\pm\pm} = \sum_{p=1}^6 \alpha_{pjm}^{\pm} \bar{N}_{kpn}^{\pm}, \quad \beta_{kjm}^{\pm\pm} = \sum_{p=1}^6 \alpha_{pjm}^{\pm} N_{kpn}^{\pm},$$

$$\alpha_{pjm}^{\pm} = \sum_{k=1}^6 a_{kpm}^* R_{kjm}^{0,\pm}, \quad \alpha_{pjm}^{\pm} = \sum_{k=1}^6 a_{kpm}^* \bar{R}_{kjm}^{0,\pm},$$

$$\xi_m^{\pm} = z_m^{\pm} x + y, \quad \xi_{m0}^{\pm} = z_m^{\pm} x_0 + y_0,$$

$$\{R_{kjm}^{0,\pm}\}_{k=1,\dots,6} = \{R_{kjm}^{\pm}\}_{k=1,3,4,6,7,8},$$

$$R_{kp}^{\pm} = \sum_{n=1}^3 R_{kpn}^{\pm}, \quad R_{kpn}^{\pm} = \frac{r_{kp}^{\pm}(z_n^{\pm}, 1)}{\beta_0^{\pm} q_n^{\pm}(z_n^{\pm}) \bar{q}_n^{\pm}(z_n^{\pm})},$$

$$q_n^{\pm}(z_n^{\pm}) = \prod_{\ell=1, \ell \neq n}^3 (z_n^{\pm} - z_{\ell}^{\pm}), \quad \bar{q}_n^{\pm}(z_n^{\pm}) = \prod_{\ell=1}^3 (z_n^{\pm} - \bar{z}_{\ell}^{\pm}),$$

$$P_6^{\pm}(z_n^{\pm}, 1) \equiv 0, \quad \beta_0^{\pm} = \beta_{22}^{\pm} \beta_{55}^{\pm} - (\beta_{25}^{\pm})^2,$$

$$\mathbf{N}^{\pm} = \left\{ \sum_{n=1}^3 N_{kpn}^{\pm} \right\}^6 = \left\{ \sum_{n=1}^3 R_{kpn}^{\pm} \right\}_{k=1,3,4,6,7,8}^{p=1,2,3,4,6,7}.$$

Вирази (12) дають змогу з використанням теореми про згортку отримати розривний розв'язок для кусково-однорідного анізотропного середовища:

$$\eta_k = \sum_{j=1}^8 w_{kj} * f_{j*} = \sum_{j=1}^8 \iint_{\mathbb{R}^2} w_{kj}(x, y, x_0, y_0) f_{j*}(x_0, y_0) dx_0 dy_0. \quad (13)$$

Подання (13) містить шість стрибків $\tilde{\chi}_k^{\pm}$, $k = 1, \dots, 6$, компонент тензора напружень і вектора переміщень, зосереджених на контурі ℓ . Частина із них залежно від типу дефекту виявляються невідомими функціями. Для їх визначення, скориставшись формулами Сохоцького, отримаємо інтегральні співвідношення, що зв'язують стрибки та суми $\tilde{\chi}^{\pm} = \{\tilde{\chi}_k^{\pm}\}_{k=1}^6$ на контурі ℓ . Зокрема, якщо контур ℓ є об'єднанням відрізків, розміщених уздовж прямої, яка проходить через початок координат під кутом φ до осі OX :

$$\ell = \bigcup_{j=1}^r (a_j, b_j), \text{ тобто } x = t \cos \varphi, \quad x_0 = \tau \cos \varphi, \quad y = t \sin \varphi, \quad y_0 = \tau \sin \varphi,$$

$$\tilde{\chi}_k^{\pm}(x, y) = \tilde{\chi}_k^{\pm}(t), \quad k = 1, \dots, 6, \quad \tilde{\chi}_k^{\pm}(t) = (\tilde{\chi}_k^{\pm}(t))', \quad k = 4, 5, 6,$$

інтегральні співвідношення подамо так:

$$\tilde{\chi}_k^{\pm}(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^6 \int_{\ell} \tilde{\chi}_j^{\mp}(\tau) \left[\frac{Y_{kj}(t)}{t - \tau} + \text{Im} \sum_{n,m=1}^3 \frac{B_{kijnm}}{te_{mn} - \tau} \right] d\tau, \quad t \in \ell, \quad k = 1, \dots, 6, \quad (14)$$

де

$$Y_{kj}^{\pm} = \sum_{\pm} \theta(\pm t) Y_{kj}^{\pm}, \quad Y_{kj}^{\pm} = 4 \text{Im} \sum_{n=1}^3 \frac{H_{jkn}^{\pm}}{(\beta_n^{\pm})^{\delta_*}}, \quad \beta_n^{\pm} = z_n^{\pm} \cos \varphi + \sin \varphi,$$

$$B_{kijnm} = \sum_{\pm(\pm)} \theta(\pm t) \theta(\pm \tau) B_{kijnm}^{\pm(\pm)},$$

$$B_{kijnm}^{\pm\pm} = \frac{b_{kijnm}^{\pm\pm}}{(\beta_n^{\pm})^{\delta_*}}, \quad B_{kijnm}^{\pm\mp} = \frac{b_{kijnm}^{\pm\mp}}{(\beta_n^{\pm})^{\delta_*}}, \quad \delta_* = \begin{cases} 1, & j = 1, 2, 3, \\ 2, & j = 4, 5, 6, \end{cases}$$

$$e_{nm} = \sum_{\pm(\pm)} \theta(\pm t)\theta(\pm\tau)e_{nm}^{\pm(\pm)},$$

$$\{e_{nm}^{++}, e_{nm}^{+-}, e_{nm}^{-+}, e_{nm}^{--}\} = \left\{ \frac{\bar{\beta}_n^+}{\beta_m^+}, \frac{\bar{\beta}_n^-}{\beta_m^-}, \frac{\beta_n^+}{\beta_m^+}, \frac{\beta_n^-}{\beta_m^-} \right\}.$$

Співвідношення (14) узагальнюють співвідношення для кусково-однорідної анізотропної площини [4] і дозволяють зводити задачі про внутрішні тунельні дефекти в кусково-однорідному анізотропному середовищі безпосередньо до систем СІР.

2. Постановка і зведення задачі про внутрішню тунельну тріщину до системи СІР. Нехай тунельна тріщина займає відрізок $\ell_1 = (a_1, b_1)$, $0 < a_1 < b_1$, на лінії ℓ . До берегів тріщини прикладено довільні навантаження $\{\tilde{\chi}_k^\pm(t)\}^3 = \{p_j^\pm(t)\}^3$. Відносно віддалення тріщини до площини з'єднання півпросторів позначимо так:

$$\alpha_1 = \frac{k_1^-}{k_1^+}, \quad \alpha_1 \in (0, 1], \quad k_1^\pm = \frac{b_1 \pm a_1}{2}. \quad (15)$$

При наближенні тріщини до площини з'єднання $\alpha_1 \rightarrow 1$, при віддаленні $\alpha_1 \rightarrow 0$. Skorиставшись першими трьома рівностями зі співвідношень (14), отримаємо систему трьох СІР відносно невідомих похідних стрибків переміщень $\mathbf{h} = \{\tilde{\chi}_{j+3}^-(t)\}^3 = \{h_j\}^3$:

$$\frac{1}{\pi} \mathbf{M}_S^+ \int_{\ell_1} \frac{\mathbf{h}(\tau)}{t - \tau} d\tau + \frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_{n,m=1}^3 \mathbf{B}_{nm}^{++} \int_{\ell_1} \frac{\mathbf{h}(\tau) d\tau}{e_{nm}^{++} t - \tau} = \mathbf{q}, \quad t \in \ell_1, \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_S &= \{\Upsilon_{k,j+3}(t)\}^3, & \mathbf{M}_{nm} &= \{B_{k,j+3,nm}\}^3, \\ \mathbf{M}_S^* &= \{\Upsilon_{kj}(t)\}^3, & \mathbf{q}^\pm(t) &= \{\tilde{\chi}_j^\pm\}_{j=1,2,3}, \\ \mathbf{q}(t) &= \mathbf{q}^+(t) - \frac{\mathbf{M}_S^*}{\pi} \int_{\ell} \frac{\mathbf{q}^-(\tau)}{t - \tau} d\tau - \text{Im} \sum_{n,m=1}^3 \frac{1}{\pi} \int_{\ell} \frac{\mathbf{M}_{nm}^*(t, \tau) \mathbf{q}^-(\tau)}{te_{nm}(t, \tau) - \tau} d\tau, \\ \mathbf{M}_{nm}^* &= \{B_{k,jnm}\}^3. \end{aligned}$$

Додатковими до системи будуть умови замкнутості тріщин:

$$\int_{\ell_1} h_k(\tau) d\tau = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Ввівши нові змінні $t = k_1^- \rho + k_1^+$, $\zeta = k_1^- \tau + k_1^+$, $t, \tau \in \ell_1$, відобразимо систему (16) на проміжок $I = (-1, 1)$ і зведемо характеристичну частину до діагонального вигляду:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\mathbf{h}_*(\zeta) d\zeta}{\zeta - \rho} + \frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_{n,m=1}^3 \mathbf{A}_{nm} \mathfrak{R}_{nm}[\mathbf{h}_*] = \mathbf{q}_*(\rho), \quad \rho \in I, \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_*(\rho) &= \{h_k\}^3 = \mathbf{h}(k_1^- \rho + k_1^+), & \mathbf{q}_*(\rho) &= \{q_p^*\}^3 = \mathbf{q}(k_1^- \rho + k_1^+), \\ \mathfrak{R}_{nm}[\mathbf{h}_*] &= \int_{-1}^1 \frac{\mathbf{h}_*(\zeta) d\zeta}{g_{nm}(\rho, \zeta)}, & g_{nm} &= k_1^+ (e_{nm}^{++} (\alpha_1 \rho + 1) - (\alpha_1 \zeta + 1)), \\ \mathbf{A}_{nm} &= \{a_{pq}^{nm}\}^3, & \mathbf{A}_{nm} &= (\alpha_1^{-1} \mathbf{M}_S^+)^{-1} \mathbf{B}_{nm}^{++}. \end{aligned}$$

3. Розв'язання системи СІР узагальненим методом граничних елементів. У випадку наближення дефектів до площини з'єднання матеріалів до розв'язання системи (17) застосуємо метод граничних елементів [2], який узагальнимо таким чином. Розшукувані функції інтерполюємо N -сплайнами, які на $2r$ кінцевих сегментах підсилені функціями, що враховують наступні (після головного) r доданків в асимптотичному поданні розв'язків на кінцях інтервалів, тобто функціями вигляду

$$h_k^N(\rho) = \sum_{j=0}^N s_{kj}^N v_j^k(\rho), \quad (18)$$

де

$$v_0^k = (1 - \rho^2)^{-1/2},$$

$$v_j^k = \begin{cases} (\rho + 1)^{j-1/2} \sum_{q=1}^r \theta(I_q), & j = 1, \dots, r, \\ (\rho + 1)^{1-1/2} \theta(I_j), & j = r + 1, \dots, \frac{N}{2}, \\ (1 - \rho)^{1-1/2} \theta(I_j), & j = \frac{N}{2} + 1, \dots, N - r, \\ (1 - \rho)^{j-1/2} \sum_{q=1}^r \theta(I_{N-q}), & j = N - r + 1, \dots, N, \end{cases}$$

$$I_j = (\rho_{j-1}, \rho_j), \quad \rho_j = \frac{2j}{n} - 1, \quad \theta(I_j) = \theta(\rho_j) - \theta(\rho_{j-1}), \quad j = 1, \dots, N,$$

$$-1 \leq \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_N \leq 1.$$

Підставивши (18) в систему (17) і розглядаючи отриману систему в точках ρ_j^0 , $j = 1, \dots, N$, які є серединами відрізків розбиття I_j , для визначення s_{kj}^N запишемо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^N T_{qj}^k s_{kj}^N = B_q^k, \quad k = 1, 2, 3, \quad q = 1, \dots, N, \quad (19)$$

де

$$T_{qj}^k = (1 - \delta_{0j}) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_j^k d\zeta}{\zeta - \rho_q^0} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{p=1}^r \sum_{n,m=1}^3 a_{pq}^{nm} \Re_{nm}[v_j^p](\rho_q^0),$$

$$B_q^k = q_k^*(\rho_q^0).$$

При виборі інтерполянти у вигляді $\Pi_{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g} = \max_{1 \leq j \leq N} |I_j|$, $h_k^N = \Pi_{\mathfrak{g}} h_k$, згідно з [1], r -та похідна від різниці $\omega_k^{\mathfrak{g}}(\rho) = h_k - \Pi_{\mathfrak{g}} h_k$ належить до класу $H_{\mu}(I)$ гельдерових функцій. Тоді, згідно з [14], справджується оцінка

$$|h_k - \Pi_{\mathfrak{g}} h_k| = o(\mathfrak{g}^{r+\mu}). \quad (20)$$

Отже, доведено таке твердження.

Теорема. Розв'язок системи (19) збігається до розв'язку системи (17):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_k - \Pi_{\mathfrak{g}}^{-1} h_k^N\|_{L^2} = 0,$$

швидкість збіжності визначається оцінкою (20).

Таким чином, при запропонованому поданні (18) за рахунок збільшення гладкості лишків $\omega_k^g(\rho)$ швидкість збіжності розв'язків системи (19) до розв'язків системи (17) збільшено на r порядків порівняно зі звичайним методом граничних елементів. Причому вказане покращення збіжності відбувається не за рахунок збільшення розбиття. Це і свідчить про більшу ефективність запропонованого методу порівняно з іншими методами, збіжність яких суттєво залежить від гладкості регулярних ядер і правих частин системи.

4. Числові результати та їх аналіз. Для визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах тріщин:

$$K_k^\pm = \lim_{t \rightarrow \pm 1 \pm 0} \theta(t) \sqrt{|t-1|} h_k = \lim_{t \rightarrow \pm 1 \pm 0} \frac{\theta(t)}{2} \sqrt{|t-1|} \tilde{\chi}_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (21)$$

використовуючи перші три рівності із сингулярних інтегральних співвідношень (14), а також подання (18), отримуємо

$$K_k^\pm = \mp \sum_{p=1}^3 s_{k0}^N \Upsilon_{kp}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Для числових розрахунків вибрали такі матеріали: **m1** – склопластик однонаправлений, **m2** – склопластик ортогонально-армований (2:1), **m3** – склопластик СТЕТ, **m4** – склопластик АСТТ(6) [11]. Тріщина розташована у верхньому півпросторі перпендикулярно до площини $\varphi = 0$ з'єднання півпросторів. На рис. 1 і рис. 2 наведено графіки залежностей поведінки відносних КІН K_1 у вершинах однієї тунельної тріщини від відносної відстані $\lambda = a_1^{-1}$ при симетричному нормальному навантаженні. Суцільні криві на обох рисунках відповідають КІН у вершинах, ближніх до площини з'єднання, пунктирні – в дальніх.

На рис. 1 криві 1 відповідають комбінації матеріалів **m1** – **m3**, криві 2 – комбінації матеріалів **m2** – **m3**, криві 3 – комбінації матеріалів **m4** – **m3**. Для порівняння пружних властивостей півпросторів введено параметр $\beta_* = \beta_{22}^+ (\beta_{22}^-)^{-1} = E_{yy}^- (E_{yy}^+)^{-1}$, де E_{yy}^\pm – модулі Юнга [11] при розтягу-стиску в напрямку осі y . Для усіх комбінацій виконується умова $\beta_* > 1$, тобто півпростір, де розташована тріщина, є менше жорстким. Із графіків видно, що у цьому випадку КІН в обох вершинах при наближенні до площини з'єднання півпросторів ($\lambda \rightarrow 1$) спадають. У вершинах, ближніх до площини з'єднання (суцільні лінії), K_1 спадає швидше. Крім того, спадання є тим більшим, чим більшим є β_* , тобто, чим більш жорстким виявляється нижній півпростір. На рис. 2 криві 1 відповідають комбінації матеріалів **m1** – **m4**, криві 2 – комбінації матеріалів **m2** – **m1**, криві 3 – комбінації матеріалів **m3** – **m4**.

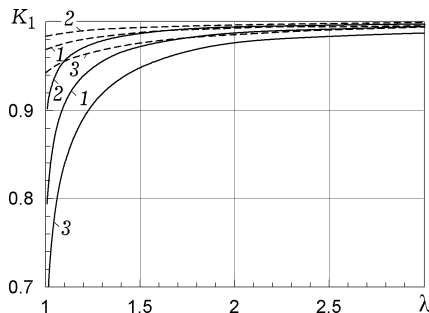


Рис. 1

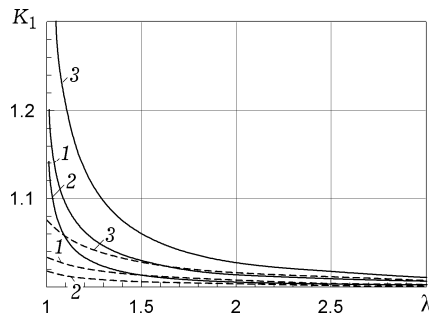


Рис. 2

Для усіх комбінацій виконується умова $\beta_* < 1$, тобто півпростір, де розміщена тріщина, є більш жорстким. Із графіків видно, що в цьому випадку КІН в обох вершинах при наближенні до площини з'єднання півпросторів ($\lambda \rightarrow 1$) зростають. У вершинах, ближніх до площини з'єднання (суцільні лінії), K_1 зростає швидше. Крім того, зростання є тим більшим, чим меншим є β_* , тобто, чим менш жорстким виявляється нижній півпростір. В обох випадках при значному віддаленні тріщини від площини з'єднання матеріалів ($\lambda > 3$) вплив іншого півпростору практично відсутній, а при $\lambda > 10$ всі КІН дорівнюють одиниці. Описані закономірності повністю узгоджуються із результатами, наведеними в роботі [15] для тріщини, яка наближається до лінії з'єднання двох різних ізотропних півплощин.

Висновок. Отже, за допомогою запропонованого чисельно-аналітичного методу досліджено вплив пружних властивостей матеріалів на поведінку КІН у вершинах тунельної тріщини, що наближається до площини з'єднання двох різних анізотропних півпросторів.

Аналогічно можна розглянути задачі про наближення тунельних дефектів інших типів (відшарованих чи невідшарованих включень) до площини з'єднання різних анізотропних півпросторів.

1. *Кравчук М. П.* Вибрані математичні праці / Упорядник Н. Вірченко. – Київ – Нью-Йорк: Укр. вільна акад. у США – Нац. акад. наук України, 2002. – 792 с.
2. *Крауч С., Старфілд А.* Методы граничных элементов в механике твердого тела. – Москва: Мир, 1987. – 328 с.
Te same: *Crouch S. L., Starfield A. M.* Boundary element methods in solid mechanics. – London ets., 1983.
3. *Кривий О. Ф.* Тунельні включення в кусково-однорідному анізотропному просторі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2007. – **50**, № 2. – С. 55–65.
4. *Кривой А. Ф.* Произвольно ориентированные дефекты в составной анизотропной плоскости // *Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки.* – 2001. – **6**, Вип. 3. – С. 108–115.
5. *Кривой А. Ф.* Фундаментальное решение для четырехсоставной анизотропной плоскости // *Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки.* – 2003. – **8**, Вип. 2. – С. 140–149.
6. *Кривой А. Ф., Архипенко К. Н.* Произвольно ориентированные трещины в неоднородной анизотропной плоскости // *Теорет. и прикл. механика.* – 2003. – Вып. 38. – С. 29–35.
7. *Кривой А. Ф., Попов Г. Я.* Межфазные туннельные трещины в составном анизотропном пространстве // *Прикл. математика и механика.* – 2008. – **72**, № 4. – С. 689–700.
Te same: *Krivoi A. F., Popov G. Ya.* Interface tunnel cracks in a composite anisotropic space // *J. Appl. Math. Mech.* – 2008. – **72**, No. 4. – P. 499–507.
8. *Кривой А. Ф., Попов Г. Я.* Особенности поля напряжений возле туннельных включений в неоднородном анизотропном пространстве // *Прикл. механика.* – 2008. – **44**, № 6. – С. 36–45.
Te same: *Krivoi A. F., Popov G. Ya.* Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, № 6. – P. 626–634.
9. *Кривой А. Ф., Попов Г. Я., Радиолло М. В.* Некоторые задачи о произвольно ориентированном стрингере в составной анизотропной плоскости // *Прикл. математика и механика.* – 1986. – **50**, № 4. – С. 622–632.
Te same: *Krivoi A. F., Popov G. Ya., Radiollo M. V.* Certain problems of an arbitrarily oriented stringer in a composite anisotropic plane // *J. Appl. Math. Mech.* – 1986. – **50**, No. 4. – P. 475–483.
10. *Кривой А. Ф., Радиолло М. В.* Особенности поля напряжений возле включений в составной анизотропной плоскости // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* – 1984. – № 3. – С. 84–92.
11. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 415 с.
12. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.

13. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 342 с.
14. Прёздорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. – Москва: Мир, 1979. – 493 с.
Te same: *Prößdorf S.* Einige Klassen singulärer Gleichungen. – Berlin: Akademie-Verlag, 1974. – XII + 352 S.
15. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с. – (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка. – Т. 2).
16. Barber J. R., Ting T. C. T. Three-dimensional solutions for general anisotropy // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2007. – **55**. – P. 1993–2006.
17. Herrmann K. P., Loboda V. V. On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial // *Arch. Appl. Mech.* – 1999. – **69**. – P. 317–335.

ТУННЕЛЬНАЯ ВНУТРЕННЯЯ ТРЕЩИНА В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ АНИЗОТРОПНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Задача о внутренней туннельной трещине в кусочно-однородной анизотропной среде сведена к системе трёх сингулярных интегральных уравнений. Предложен эффективный численно-аналитический метод решения указанной системы. Установлены закономерности поведения коэффициентов интенсивности напряжений при приближении трещины к плоскости соединения различных анизотропных полупространств.

TUNNEL INNER CRACK IN THE PIECEWISE HOMOGENEOUS ANISOTROPIC SPACE

The problem on the inner tunnel crack in the piecewise homogeneous anisotropic space is reduced to a system of three singular integral equations. The effective numeric-analytical method to solve those system is offered. The mechanism of stress intensity factors behavior for the case, when crack is approaching to the jointed plane of the different anisotropic half-spaces is determined.

Одеська нац. морська акад., Одеса

Одержано
13.11.12