

ПЛАСТИЧНЕ ВІДШАРОВУВАННЯ ЖОРСТКОГО ПРЯМОКУТНОГО ВКЛЮЧЕННЯ ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ СИЛИ

Розв'язано антиплоску задачу про пластичне відшарування жорсткого прямокутного включення в ідеальному пружно-пластичному середовищі під дією спрямованої вздовж осі включення сили. Прийнято, що пластичні деформації сконцентровані на межі включення в шарах нульової товщини, які розвиваються з вершини включення. Визначено залежності довжин пластичних смуг від діючого навантаження. Встановлено умови злиття пластичних шарів, які розвиваються уздовж менших граней включення, і повного відшарування включення. Запропоновано критерій застосовності теорії тонких включень і лінійної моделі пластичної зони. Показано, що застосування цього критерію до включень, ширина яких не перевищує 5% їх довжини, дає похибку теорії тонких включень не більше 5%.

Дослідження пластичних ефектів в околі концентраторів напружень важливі для механіки руйнування і механіки композиційних матеріалів [15]. Відомі роботи стосуються насамперед тріщин [11, 13] і тонких включень [12, 14], коли можливим є моделювання дефекту лінійю розриву зміщення. Значно слабше представлено у літературі вирізи і включення невеликої товщини [7]. У теорії ідеально пружно-пластичних тіл можна приймати, що в околі концентратора напружень пластичні деформації займають певну просторову область (є континуально розподіленими) або зосереджені в окремих смугах (є локалізовано розподіленими) [5, 6]. Обидві структури пластичних зон мають експериментальне підтвердження [10]. Існує декілька механізмів тонкосмугової локалізації пластичних деформацій, що спричиняють різні обставини [2, 9]. Наприклад, на межі включення – середовище вона може бути зумовлена недосконалістю механічного контакту та призводити до повного або часткового міжфазного відшарування. Задачі пластичного відшарування включень поки що перебувають на початковому етапі розвитку і потребують повнішого дослідження.

У цій роботі дослідимо пластичне відшарування жорсткого нескінченно довгого включення прямокутного перерізу під дією зосередженої сили вздовж осі включення. Подібна задача відшарування прямокутного включення під впливом прикладеного на нескінченності навантаження розв'язана в роботі [8].

Нехай безмежне ідеально пружно-пластичне середовище циліндричної форми містить співвісне циліндричне жорстке включення, яке у площині Oxy займає прямокутну область $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ (рис. 1, потовщені відрізки – смуги міжфазного відшарування). Деформування матриці зумовлене дією уздовж осі включення квазістатичною зростаючою силою Q .

В околі ребер включення у матриці виникатимуть пластичні деформації, які вважаємо зосередженими на поверхні включення в горизонтальних і вертикальних шарах. Задача полягає у визначенні залежності довжин d_1 і d_2 смуг від величини прикладеної сили та дослідженні злиття шарів аж до моменту повного відшарування включення.

За вказаних умов матриця перебуватиме в антиплоскому напруженому стані, який внаслідок симетрії достатньо визначити в області D – першому квадранті площини Oxy поза прямокутником $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

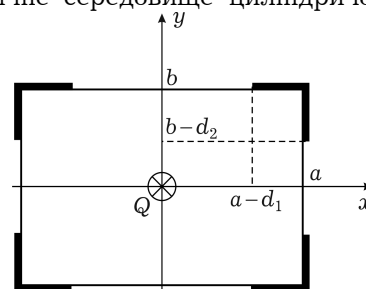


Рис. 1

У тій частині площини Oxy , де напружено-деформований стан є пружним, $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$ є аналітичною функцією від комплексної змінної $\zeta = x + iy$ [1]. Для її визначення одержуємо в області \mathcal{D} таку крайову задачу:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0, & \zeta &= iy, & y &> b, \\ \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0, & \zeta &= x + ib, & 0 < x < a - d_1, \\ |\tau(\zeta)| &= k, & \zeta &= x + ib, & a - d_1 \leq x \leq a, \\ |\tau(\zeta)| &= k, & \zeta &= a + iy, & b - d_2 \leq y \leq b, \\ \operatorname{Re} \tau(\zeta) &= 0, & \zeta &= a + iy, & 0 < y < b - d_1, \\ \operatorname{Re} \tau(\zeta) &= 0, & \zeta &= x, & x > a. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут d_1, d_2 – довжини горизонтального і вертикального пластичних шарів; k – зсувна границя текучості матеріалу середовища.

Крім того, зв'язавши величину сили, прикладеної до включення, з компонентами напружень на межі включення, отримуємо

$$\int_0^a \tau_{yz}(x, b) dx + \int_0^b \tau_{xz}(a, y) dy = \frac{Q}{4}. \quad (2)$$

Перша і шоста умови (1) є наслідками парності поля переміщення $w(x, y)$ відносно координатних осей. Друга і п'ята умови виражають відсутність зміщень у точках границі включення, які перебувають у ідеальному механічному контакті з середовищем. Третя і четверта – умови пластичності. Крім того, всюди поза пластичними смугами повинна виконуватися нерівність $|\tau(\zeta)| < k$, оскільки умова пластичності досягається лише на смугах міжфазного відшаровування.

Зауважимо, що міжфазне відшарування призводить до появи на пластичних смугах тангенціального розриву переміщення між матрицею і включенням. Але оскільки кінцеві точки пластичних смуг до їх злиття залишаються в контакті з включенням, то до моменту злиття відносно переміщення кінцевих точок смуг повинно дорівнювати нулеві. Тобто, якщо $d_1 < a$ і $d_2 < b$, то повинно виконуватися співвідношення

$$w(a - d_1, b) = w(a, b - d_2), \quad (3)$$

яке в загальному випадку не гарантується розв'язком задачі (1) у напруженнях.

Дослідження і розв'язок задачі. Функція $\tau(\zeta)$ є аналітичною в області \mathcal{D} і конформно та однолисто відображає її на певну область \mathcal{G} комплексної площини τ . Можна переконатися, що з огляду на умови (1) конформним образом області \mathcal{D} є чверть круга $\mathcal{G} = \{(\tau_{yz}, \tau_{xz}) \mid \tau_{yz} > 0, \tau_{xz} > 0, \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 < k^2\}$ (рис. 2).

Оскільки на межах областей \mathcal{D} і \mathcal{G} лише одна точка A має априорі відомі координати, то, за теоремою Рімана про існування і єдиність конформного відображення [3], існує двопараметрична множина функцій, які реалізують подане на рис. 2 відображення. Крайова задача (1), таким чином, має двопараметричну множину розв'язків.

Потрібне відображення зручно шукати в параметричній формі:

$$\tau = \tau(t), \quad \zeta = \zeta(t), \quad t \in \mathcal{H}, \quad (4)$$

де допоміжна комплексна площина t вибрана так, щоб прообразом облас-

тей \mathcal{D} і \mathcal{G} була область $\mathcal{H} = \{\text{Im } t > 0\}$ (рис. 3) і щоб у відповідних точках на межах областей \mathcal{D} і \mathcal{G} була спільна точка-прообраз на межі області \mathcal{H} .

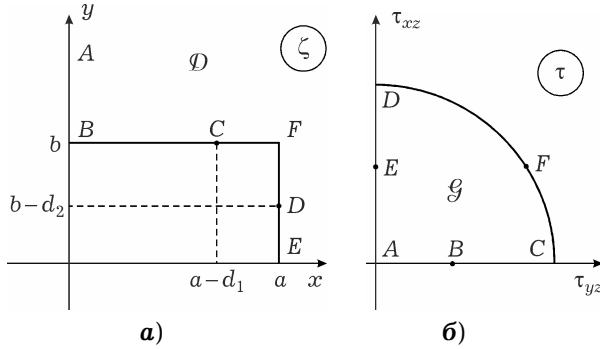


Рис. 2

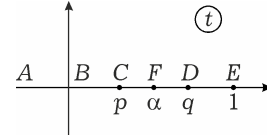


Рис. 3

Позначимо через p, α, q ($p < \alpha < q < 1$) координати точок C, F, D на дійсній осі площини t , а координату точки E у цій площині покладемо рівною одиниці. Оскільки тепер на межах областей \mathcal{H} і \mathcal{D} є три пари точок A, B, E , координати яких відомі, то конформне відображення \mathcal{H} на \mathcal{D} існує і є єдиним. Відповідну функцію $\zeta = \zeta(t)$ знаходимо за допомогою перетворення Крістофеля – Шварца:

$$\zeta(t) = ib + \frac{a}{M} \int_0^t \frac{\sqrt{\eta - \alpha}}{\sqrt{\eta(\eta - 1)}} d\eta, \quad (5)$$

де $M = \int_0^\alpha f(t) dt$, $f(t) = \sqrt{\frac{|\alpha - t|}{t(1-t)}}$, при цьому $\alpha \in (0, 1)$. Тут і далі під $\sqrt{\eta - c}$ (де c – дійсне число) розуміємо гілку аналітичної функції з розрізом уздовж променя дійсної осі $(c, +\infty)$, яка на верхньому березі розрізу приймає дійсні додатні значення.

Функція (5) забезпечує потрібне відношення довжин сторін прямокутника \mathcal{D} , якщо α задовольняє рівняння

$$a \int_\alpha^1 f(t) dt = b \int_0^\alpha f(t) dt. \quad (6)$$

Розв'язок рівняння (6) знайдемо методом послідовних наближень за допомогою такого алгоритму:

$$\alpha^{(j+1)} = \alpha^{(j)} + \lambda \frac{(R_{BF})^{(j)} - (a/b)(R_{FE})^{(j)}}{(R_{BF})^{(j)} + (a/b)(R_{FE})^{(j)}}, \quad (7)$$

$$\text{де } (R_{BF})^{(j)} = \int_0^{\alpha^{(j)}} \frac{\sqrt{\alpha^{(j)} - \eta}}{\sqrt{\eta(\eta - 1)}} d\eta, \quad (R_{FE})^{(j)} = \int_{\alpha^{(j)}}^1 \frac{\sqrt{\eta - \alpha^{(j)}}}{\sqrt{\eta(\eta - 1)}} d\eta.$$

Можна переконатися, що для достатньо малих $\lambda > 0$ і $\alpha^{(0)} = 0.5$ алгоритм (7) збігається як геометрична прогресія.

Відображення $\tau = \tau(t)$ з (4) знайдемо як композицію елементарних функцій:

$$\tau(t) = k \frac{\sqrt{t - q} - \sqrt{t - p}}{\sqrt{q - p}}. \quad (8)$$

Таким чином, функції (5) і (8) визначають розв'язок крайової задачі (1) та містять два параметри $p \in (0, \alpha)$ і $q \in (\alpha, 1)$.

Для визначення параметрів p , q слід врахувати умови (2) і (3). Прирівнюючи головний вектор сили на межі включення і силу Q , з умови (2) отримуємо

$$Q = 4(Q_{BF} + Q_{FE}),$$

де

$$Q_{BF} = \frac{ak}{M\sqrt{q-p}} \left(\int_0^p (\sqrt{q-\eta} - \sqrt{p-\eta}) F(\eta) d\eta + \int_p^a \sqrt{q-\eta} F(\eta) d\eta \right),$$

$$Q_{FE} = \frac{ak}{M\sqrt{q-p}} \left(\int_\alpha^q \sqrt{\eta-p} F(\eta) d\eta + \int_p^\alpha (\sqrt{\eta-p} - \sqrt{\eta-q}) F(\eta) d\eta \right).$$

Можна переконатися, що

$$Q = \frac{2\pi ak}{M} \sqrt{q-p}. \quad (9)$$

Означимо розриви тангенціальних складових g_1 і g_2 переміщень у вершинах включення для горизонтального і вертикального пластичних шарів як відносні переміщення кінцевих і початкових точок пластичних смуг:

$$g_1 = \frac{1}{\mu} \int_{a-d_1}^a \tau_{xz}(x, b) dx, \quad g_2 = \frac{1}{\mu} \int_{a-d_1}^a \tau_{yz}(a, y) dy,$$

де μ – модуль зсуву матеріалу матриці. Використаємо формули (5), (8) у цих інтегральних поданнях. Тоді умова (3) неперервності g_1 , g_2 на межі матриця-включення набуде такого вигляду:

$$\int_p^\alpha \sqrt{\frac{(\eta-p)(\alpha-\eta)}{\eta(1-\eta)}} d\eta = \int_\alpha^q \sqrt{\frac{(q-\eta)(\eta-\alpha)}{\eta(1-\eta)}} d\eta. \quad (10)$$

Визначивши із рівності (9) p як функцію q і підставивши її у (10), отримуємо рівняння для параметра q . Розв'язавши його, знайдемо q як функцію Q . Після цього з рівняння (9) знайдемо також p як функцію Q .

Маючи залежності p і q як функції величини навантаження Q та беручи до уваги, що p і q є координатами кінців пластичних шарів у площині комплексного параметра t , із формули (5) визначаємо довжини пластичних смуг до моменту їх злиття:

$$d_1 = \frac{a}{M} \int_p^\alpha \sqrt{\frac{\alpha-\eta}{\eta(1-\eta)}} d\eta, \quad d_2 = \int_\alpha^q \sqrt{\frac{\eta-\alpha}{\eta(1-\eta)}} d\eta. \quad (11)$$

Очевидно, що, коли $a > b$, то за певного навантаження відбудеться злиття вертикальних пластичних смуг. Найменше відповідне навантаження $Q = Q_1$ називатимемо першим критичним. Зрозуміло також, що $d_2 = b$, $q = 1$ для $Q = Q_1$. Покладемо $q = 1$ у рівності (10). Тоді розв'язавши рівняння

$$\int_p^\alpha \sqrt{\frac{(\eta-p)(\alpha-\eta)}{\eta(1-\eta)}} d\eta = \sqrt{1-\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln \frac{(\sqrt{1-\alpha} + 1)^2}{\alpha}, \quad (12)$$

отримуємо значення параметра $p = p_1$, яке відповідає першому критичному навантаженню, а поклавши у співвідношення (9) $p = p_1$ і $q = 1$, отримуємо величину Q_1 при $a > b$ (рис. 4).

Коли навантаження є більші, ніж Q_1 , відбувається подальше відшарування уздовж горизонтальних граней включення і довжина горизонтальних пластичних шарів продовжує зростати за законом

$$Q = \frac{2\pi ka}{M} \sqrt{1-p}, \quad d_1 = \frac{a}{M} \int_p^\alpha \sqrt{\frac{\alpha-\eta}{\eta(1-\eta)}} d\eta, \quad p \in (0, p_1). \quad (13)$$

Коли навантаження досягне рівня другого критичного $Q = Q_2$, зіллються горизонтальні пластичні шари і наступить повне пластичне відшарування включення: матриця перестане чинити опір рухові включення. Величину Q_2 знайдемо, поклавши $p = 0$ у співвідношенні (13):

$$Q_2 = \frac{2\pi ak}{M}. \quad (14)$$

Залежність $\frac{Q_2}{4k(a+b)}$ для $a > b$ зображено на рис. 5.

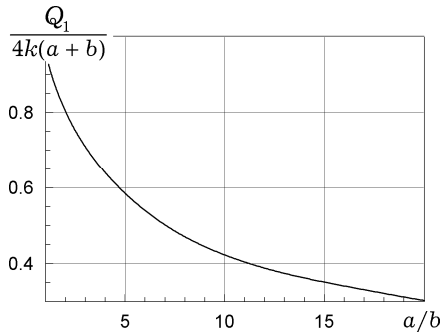


Рис. 4

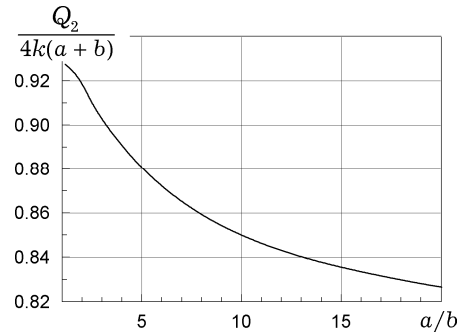


Рис. 5

Безмежно тонке включення ($b = 0$). Якщо $b \rightarrow 0$, то $\alpha \rightarrow 1$ і $q \rightarrow 1$. Із формули (5) випливає, що тоді $\zeta = a\sqrt{t}$, а функція $\tau(t)$ задається рівністю (8), як для загального випадку. Функцію $\tau(\zeta)$ у цьому випадку можемо записати у явному вигляді:

$$\tau(\zeta) = k \frac{\sqrt{a^2 - \zeta^2} - \sqrt{pa^2 - \zeta^2}}{a\sqrt{1-p}}, \quad p \in (0, 1). \quad (15)$$

Вертикальні смуги відсутні, а для довжин горизонтальних смуг і навантаження отримуємо залежності:

$$Q = 4 \int_0^a \tau_{yz}(x, 0) dx, \quad d_1 = a(1 - \sqrt{p}).$$

Оскільки

$$\tau_{yz}(x, 0) = \begin{cases} \frac{k}{a\sqrt{1-p}} \left(\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{pa^2 - x^2} \right), & x \in [0, a\sqrt{p}], \\ \frac{k}{a\sqrt{1-p}} \sqrt{a^2 - x^2}, & x \in [a\sqrt{p}, a], \end{cases}$$

то $Q = \pi ak\sqrt{1-p}$, $p = 1 - \frac{Q}{(\pi ak)^2}$, а для довжини пластичних смуг отримуємо таку залежність від навантаження:

$$d_1 = a - \frac{1}{\pi k} \sqrt{\pi^2 a^2 k^2 - Q^2}.$$

Повне відшарування включення настає, коли $Q = Q_2 = \pi ak$, тобто коли середнє зсувне нормальне напруження на поверхні включення $\frac{Q_2}{4ak} = \pi/4$.

Розв'язок пружної задачі можна отримати шляхом граничного переходу $k \rightarrow \infty$. У цьому випадку $p \rightarrow 1$, тоді з формули (15) маємо, що

$$\tau(\zeta) = \frac{k}{\sqrt{a^2 - \zeta^2}}.$$

Поле пружних напружень безмежно тонкого включення сингулярне у вершині включення з показником $1/2$.

На рис. 6 наведено залежності довжин смуг міжфазного пластичного відшаровування d_1, d_2 для випадків $a = b$ (квадратне включення), $a = 2b$, $a = 4b$ та $b = 0$ (включення нульової товщини) від навантаження. Верхні криві для включень $a = 2b$ і $a = 4b$ (рис. 6а і рис. 6б відповідно) відображають залежності від навантаження довжин вертикальних смуг d_2 , нижні – горизонтальних d_1 . Для квадратного включення (коли $a = b$) маємо $d_2 = d_1$, а для включення нульової товщини (коли $b = 0$) $d_2 = 0$. Пластичні смуги на вужчих гранях включення зазнають сильнішого взаємовпливу концентрації напружень у відповідних вершинах включення і тому їх розвиток прискорюється порівняно зі зростанням смуг уздовж ширших граней ($d_2 \geq d_1$ для $a = 2b$ і $a = 4b$). Цей ефект стає помітнішим для більшого навантаження.

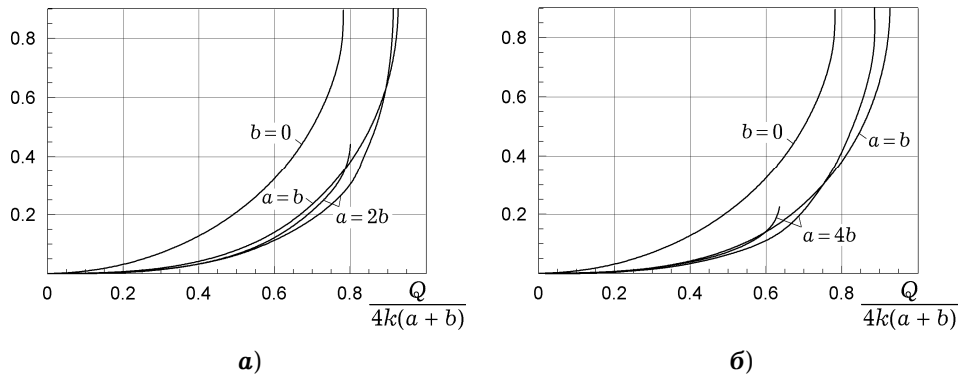


Рис. 6

На початковій стадії розвитку, поки довжини смуг є малими порівняно з віддалю між вершинами включення, різниця у рості смуг вздовж граней включення малопомітна. Це свідчить про їх автономний розвиток і дає підстави для застосування лінійної моделі пластичної зони (ЛМПЗ) [4] для дослідження початкової стадії пластичного відшаровування. Судячи за побудованими на рис. 6 графіками залежностей довжин смуг від навантаження, можна сподіватися, що ЛМПЗ даватиме досить точні результати у широкому діапазоні навантаження (наприклад, для $a = 2b$, коли середнє зсувне напруження на поверхні включення дорівнює половині границі текучості). Як відомо, ЛМПЗ потребує пружного розв'язку задачі та розв'язків двох допоміжних задач: пружної і пружно-пластичної, які не містять параметра з розмірністю довжини.

Пружна задача. Розв'язок цієї задачі можемо отримати із розв'язку (5), (9), спрямувавши границю текучості $k \rightarrow \infty$. Оскільки за безмежно великої границі текучості довжини пластичних смуг стають безмежно малими, то $p \rightarrow \alpha$ і $q \rightarrow 1$, коли $k \rightarrow \infty$. В результаті граничного переходу в формулі (8), отримуємо

$$\tau(t) \rightarrow \tau^{(e)}(t) = \frac{C}{\sqrt{\alpha - t}}, \quad C = \text{const.} \quad (16)$$

Пара функцій (5) і (16) дають розв'язок задачі у пружній постановці для довільної сили Q , величина якої визначається константою C . Зв'язок C і Q дає співвідношення

$$\oint_L \tau_{nz}^{(e)}(x, y) dl = Q,$$

де L – контур включення.

Скориставшись формулами (5) і (16), отримуємо, що $C = \frac{QM}{4\pi a}$ і, отже,

$$\tau^{(e)}(t) = \frac{QM}{4\pi a \sqrt{\alpha - t}}. \quad (17)$$

Дослідимо тепер асимптотику напружень у вершинах включення. Із формули (5) випливає, що при $t \rightarrow \alpha$

$$\zeta - a - ib = \frac{2a}{3M\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}(\alpha - t)^{3/2} + o((\alpha - t)^{3/2}).$$

Звідси та з формули (17) для $\zeta \rightarrow a + ib$ отримуємо

$$\tau^{(e)}(\zeta) = \frac{QM}{4\pi a} \left(\frac{2}{3M\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \frac{a}{\zeta - a - ib} \right)^{1/3} + o\left(\frac{a}{\zeta - a - ib} \right)^{1/3}. \quad (18)$$

Цікаво, що поле пружних напружень біля включення скінченної ширини сингулярне з показником $1/3$ і, таким чином, є принципово відмінним від поля безмежно тонкого включення, для якого показник сингулярності у вершині дорівнює $1/2$.

Лінійна модель. У розглядуваному випадку відповідними допоміжними задачами без параметра з розмірністю довжини будуть антиплоскі задачі для необмеженого середовища із включенням, яке у площині Oxy займає один квадрант і перебуває під впливом зосередженої сили. Звичайно, потрібні тепер розв'язки не можуть сприйматися як часткові випадки отриманих вище розв'язків, оскільки саме допоміжні задачі повинні слугувати для побудови наближених розв'язків вихідної задачі.

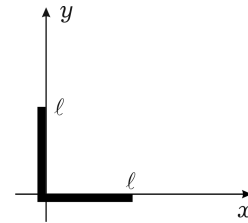


Рис. 7

Розглянемо включення, яке у площині Oxy займає перший квадрант (рис. 7). Функцію τ від ζ для пружно-пластичної допоміжної задачі позначимо через $\tilde{\tau}(\zeta)$ і запишемо для неї крайову задачу в напруженнях:

$$\begin{aligned} \text{Im } \tilde{\tau}(\zeta) &= 0, & \zeta &= iy, & y &> l, \\ |\tilde{\tau}(\zeta)| &= k, & \zeta &= iy, & y &\in [0, l], \\ |\tilde{\tau}(\zeta)| &= k, & \zeta &= x, & x &\in [0, l], \\ \text{Re } \tilde{\tau}(\zeta) &= 0, & \zeta &= x, & x &> l. \end{aligned} \quad (19)$$

Із першої та останньої умов (19) випливає, що у нескінченно віддаленій точці обидві компоненти напружень дорівнюють нулеві, тому $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tilde{\tau}(\zeta) = 0$. В

цілому ці умови означають, що функція $\tilde{\tau}(\zeta)$ конформно відображає область $\mathcal{D}_1 = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ площини $\zeta = x + iy$ на область $\mathcal{G}_1 = \{(\tau_{yz}, \tau_{xz}) \mid \tau_{yz} > 0, \tau_{xz} > 0, \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 < k\}$ площини τ (рис. 8). Відображення $\tilde{\tau}(\zeta)$ можна отримати в явному вигляді як композицію елементарних функцій:

$$\tilde{\tau}(\zeta) = \frac{k}{\sqrt{2} \sqrt[3]{\ell}} \left(\sqrt{\zeta^{2/3} + \ell^{2/3}} - \sqrt{\zeta^{2/3} - \ell^{2/3}} \right). \quad (20)$$

На нескінченності $\tilde{\tau}(\zeta)$ має таку асимптотику:

$$\tilde{\tau}(\zeta) = \frac{k}{\sqrt{2}} \left(\frac{\ell}{\zeta} \right)^{1/3} + o\left(\frac{\ell}{\zeta} \right)^{1/3}. \quad (21)$$

Знехтувавши другим доданком у формулі (21), отримуємо пружний розв'язок допоміжної задачі

$$\tilde{\tau}^{(e)}(\zeta) = \frac{k}{\sqrt{2}} \left(\frac{\ell}{\zeta} \right)^{1/3}, \quad (22)$$

асимптотично еквівалентний на нескінченності розв'язку допоміжної пружно-пластичної задачі.

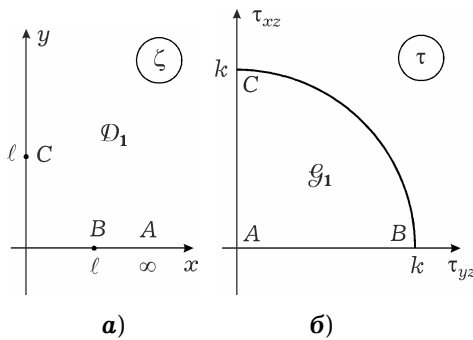


Рис. 8

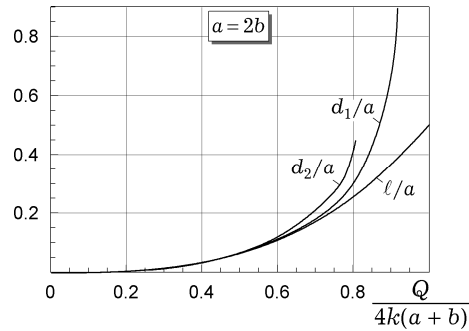


Рис. 9

Тепер залишилося узгодити пружні розв'язки основної та допоміжної задач, прирівнюючи їх асимптотики у вершині концентратора. З формул (18) і (22) випливає, що для цього досить забезпечити рівність

$$\frac{k}{\sqrt{2}} \sqrt[3]{\ell} = \frac{QM}{4\pi a} \left(\frac{2a}{3M\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} \right)^{1/3}.$$

Таким чином, для прямокутного включення залежність довжини міжфазних пластичних смуг від навантаження на початковій стадії їх розвитку описується залежністю

$$\ell = \frac{8M^2(a+b)^3}{3\sqrt{2} \pi^3 a^3} \left(\frac{Q}{4k(a+b)} \right)^3. \quad (23)$$

Безпосереднє дослідження асимптотики залежності $d(Q)$ за формулами (9), (11) підтверджує правильність отриманого результату. Порівняння довжин міжфазних пластичних смуг, визначених за точними залежностями (9), (11) і наближеною (23), наведено на рис. 9. Аналогічне порівняння для інших співвідношень між шириною і довжиною включень показало, що діапазон застосовності ЛМПЗ звужується зі зменшенням величини b/a .

Існування точного розв'язку для включення скінченної товщини дає також змогу відповісти на важливе для теорії тонких включень питання про співвідношення між товщиною та довжиною включення, за якого його можна вважати тонким. Запропонуємо такий критерій: включення вважаємо тонким, коли воно відшаровується приблизно так само, як включення нульової товщини. За даними, відображеними на рис. 5, приходимо до висновку, що закон відшаровування включення нульової товщини з точністю, не нижчою ніж 5%, описує відшаровування включень, товщина яких не перевищує 5% їх довжини.

Висновки. Отримано аналітичний розв'язок задачі про пластичне відшарування жорсткого прямокутного включення під впливом сили, що діє уздовж осі включення. Визначено довжини пластичних шарів на гранях включення як функції величини сили. Зокрема, знайдено навантаження, за якого відбувається відшарування коротших граней включення, та навантаження повного відшарування включення. Виконано аналіз початкової стадії відшарування включення і, зокрема, виявлено, що для включень, розміри яких відрізняються менш, ніж удвічі, лінійна модель пластичної зони дає достатньо добрі результати навіть для навантажень, за яких половина поверхні включення облямована пластичними деформаціями. Запропоновано критерій застосовності теорій тонких включень і, зокрема, з'ясовано, що стосовно включень, розміри яких відрізняються не менше, ніж у двадцять разів, похибка моделі включення нульової товщини не перевищує 5 %.

1. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упруго-пластическая задача. – Новосибирск: Наука, 1983. – 239 с.
2. Бакач Г. П., Дударев Е. Ф., Колобов Ю. Р., Грабовецкая Г. П., Кашин О. А., Валиев Р.З. Локализация пластической деформации на макромасштабном уровне в субмикроструктурных металлах и сплавах // Физ. мезомеханика. – 2004. – 7, № S1-1. – С. 135–137.
3. Иванов В. И., Попов В. Ю. Конформные отображения и их приложения. – Москва: Едиториал УРСС, 2002. – 324 с.
4. Кривень В. А. Лінійна модель пластичної зони біля гострокінцевого концентратора напружень за поздовжнього зсуву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – 40, № 4. – С. 41–46.
Te same: Kryven' V. A. Linear model of a plastic zone in the vicinity of a sharp notch under the conditions of longitudinal shear // Mater. Sci. – 2004. – 44, No. 4. – P. 475–483.
5. Кривень В. А. Непрерывное и разрывные решения упругопластической задачи об антиплоской деформации тела с трещиной // Физ.-хим. механика материалов. – 1985. – 21, № 6. – С. 10–16.
Te same: Kryven' V. A. Continuous and discontinuous solutions of the elastoplastic problem of antiplanar deformation of a crack-containing body // Mater. Sci. – 1986. – 21, No. 6. – P. 514–520.
6. Кривень В. А. Узагальнення представлень зони пластичності при антиплоскій деформації пружнопластичного тіла із гострокінцевим концентратором напружень // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1983. – № 2. – С. 31–34.
7. Кривень В. А., Валяшек В. Б. Початкова стадія пластичного відшарування прямокутного включення за умови одностороннього контакту з середовищем // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 4. – С. 107–116.
Te same: Kryven' V. A., Valyashok V. B. Initial stage of plastic exfoliation of a rectangular inclusion under conditions of one-sided contact with a medium // J. Math. Sci. – 2012. – 181, No. 4. – P. 425–437.
8. Кривень В. А., Гнатюк О. Б., Гром'як Р. С. Антиплоска деформація ідеально пружно-пластичного тіла з жорстким прямокутним включенням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – 36, № 6. – С. 19–23.
9. Кристал М. М. Неустойчивость и мезоскопическая неоднородность пластической деформации (аналитический обзор). Часть I. Феноменология зуба текучести и прерывистой текучести // Физ. мезомеханика. – 2004. – 7, № 5. – С. 5–29.
10. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1954. – 647 с.
11. Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 416 с.
12. Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. – Киев: Наук. думка, 1986. – 216 с.
13. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
14. Суллім Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформованих твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-видавн. центр НТШ, 2007. – 716 с.
15. Wayne Chen W., Kun Zhou, Leon M. Keer, Jane Wang Q. Modeling elasto-plastic indentation on layered materials using the equivalent inclusion method // Int. J. Solids Struct. – 2010. – 47, No. 20. – P. 2841–2854.

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ОТСЛАИВАНИЕ ЖЕСТКОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ

Решена антиплоская задача о пластическом отслоении жесткого включения прямоугольного сечения в идеальной упруго-пластической среде под действием направленной вдоль оси включения силы. Принято, что пластические деформации сосредоточены на границе включения в слоях нулевой толщины, развивающихся от вершин включения. Определены зависимости длин пластических полос от действующей нагрузки. Установлены условия слияния пластических слоев, развивающихся вдоль меньших граней включения, и полного отслаивания включения. Предложен критерий применимости теории тонких включений и линейной модели пластической зоны. Показано, что применение этого критерия к включениям, ширина которых не превышает 5% их длины, дает погрешность теории тонких включений, не превышающую 5%.

PLASTIC EXFOLIATION OF RIGID RECTANGULAR INCLUSION UNDER THE ACTION OF THE CONCENTRATED FORCE

The antiplane problem of plastic exfoliation of the rigid rectangular inclusion in the ideal elasto-plastic environment under the action of the force along the axis of inclusion is solved. It is assumed that the plastic strains are concentrated at the boundary of the inclusion in the layers of zero thickness, developing from the tips of the inclusion. The dependences of plastic bands lengths on loading are determined. The conditions of confluence of plastic layers developing along smaller face of the inclusion and total exfoliation of the inclusion are found. The criterion of applicability of the theory of slim inclusions and linear model of the plastic zone is proposed. It is shown that, with respect to the inclusions of a width not exceeding 5% of their length, the error of the theory of thin inclusions does not exceed 5%.

Тернопільськ. нац. техн. ун-т
ім. Івана Пулюя, Тернопіль

Одержано
19.08.12