УДК 517.524

Д. І. Боднар[1], О. Г. Возняк[1], Р. І. Михальчук[2]

ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ З ДОДАТНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Доведено одну нерівність для середніх гармонічних, яку використано для встановлення достатньої ознаки збіжності та оцінки швидкості збіжності гіллястого ланцюгового дробу з додатними компонентами.

Питання збіжності неперервних дробів з додатними елементами повністю вирішує критерій Зейделя [2, 6−8].

Критерій Зейделя. Неперервний дріб

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k},$$

де $b_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, збігається тоді і тільки тоді, коли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ є розбіжним.

Серед розмаїття багатовимірних узагальнень неперервних дробів важливе місце посідають гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД), означені В. Я. Скоробогатьком [4]. Гіллястий ланцюговий дріб − аналог неперервних дробів для функцій багатьох змінних.

Для ГЛД

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1}{b_{i(k)}}, \tag{1}$$

де $b_{i(k)} > 0$, $i_k = 1, \ldots, N$, $k = 1, 2, \ldots$, встановлено необхідні, достатні, а також необхідні й достатні ознаки збіжності [1, 5].

Зокрема, було встановлено, що дріб (1) розбігається, якщо ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k$ збігається, де $\beta_k = \max(b_{i(k)},\, i_p = 1, \ldots, N,\, p = 1, \ldots, k)$ − максимальний елемент на k-му поверсі. Якщо ж позначити $\alpha_k = \min(b_{i(k)},\, i_p = 1, \ldots, N$, $p = 1, \ldots, k)$, то питання збіжності ГЛД (1) при умові, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ є розбіжним, залишається до цього часу (вже понад 40 років) відкритим.

При доведенні збіжності ГЛД з додатними елементами використовуються спеціальні нерівності для середніх гармонічних, для яких у роботах Р. І. Михальчука встановлено континуальні аналоги і застосовано до дослідження збіжності інтегральних ланцюгових дробів [3].

Нерівність [1]

$$\sum_{j=1}^{n} \left(1 + \delta \sum_{i=1}^{n} \frac{x_j}{x_i} + \gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{y_j}{y_i} + \mu \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_j}{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_j}{y_i}\right)\right)^{-1} \le \left(\frac{1}{n} + \delta + \gamma + \mu\right)^{-1}, \tag{2}$$

де $\delta \ge 0$, $\gamma \ge 0$, $\mu \ge 0$, $x_i > 0$, $y_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, $n > 1$, яка використовувалася при дослідженні збіжності ГЛД, потребує уточнення.

Якщо, наприклад, $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ і $y_1 \ge y_2 \ge \ldots \ge y_n$ чи навпаки, то праву частину в (2) можна замінити на $\left(\frac{1}{n} + \delta + \gamma + n\mu\right)^{-1}$. Якщо ж послідовності $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ одночасно монотонно зростають або спадають, то нерівність (2) слід замінити на протилежну.

Посилення нерівності (2) у загальному випадку є можливим за рахунок більш точної оцінки зверху для функції

$$f(z) = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n}{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(y_1 + y_2 + \ldots y_n)}, \qquad z = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n).$$

Лема 1. *Для довільних невід'ємних дійсних чисел* δ, γ, μ *і додатних* x, X $(x < X)$, y, Y $(y < Y)$ *при умові, що* $z = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in D$, $n > 1$, *де*

$$D = \{0 < x \le x_i \le X,\ 0 < y \le y_i \le Y,\ i = 1, \ldots, n\},$$

справджується нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} \left(1 + \delta \sum_{i=1}^{n} \frac{x_j}{x_i} + \gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{y_j}{y_i} + \mu \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_j}{x_i} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_j}{y_i} \right) \right)^{-1} \le \left(\frac{1}{n} + \delta + \gamma + n_D \mu \right)^{-1}. \quad (3)$$

Тут

$$n_D = \frac{\big((n - n_\varepsilon)X + n_\varepsilon x\big)\big((n - n_\varepsilon)Y + n_\varepsilon y\big)}{(n - n_\varepsilon)XY + n_\varepsilon xy},$$

n_ε *– найменше ціле число, що задовольняє нерівність*

$$n_\varepsilon \ge \frac{n}{1 - \varepsilon} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4n^2 \varepsilon}{1 - \varepsilon^2}}, \qquad \varepsilon = \frac{xy}{XY}.$$

Д о в е д е н н я. Знайдемо найбільше значення функції $f(z)$ в D у припущенні, що $n > 1$. Точки $z \in D$ такі, що $x_i = u$, $y_i = v$, $i = 1, \ldots, n$, причому $x < u < X$, $y < v < Y$, є екстремальними. Оскільки квадратична форма, складена з похідних другого порядку в цих точках:

$$F(\xi, \eta) = \frac{n - 1}{n^3 uv} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i - \frac{1}{n^3 uv} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \ne j}}^{N} \xi_i \eta_j,$$

не є знакосталою, то всередині області D функція f екстремуму не має.

Для вивчення поведінки функції f на межі D розглянемо множини індексів:

$$I_x = \{i \in \mathbb{N} \mid x_i = x_i^*, \quad \text{де} \quad x_i^* = x \quad \text{або} \quad x_i^* = X\},$$

$$I_y = \{i \in \mathbb{N} \mid y_i = y_i^*, \quad \text{де} \quad y_i^* = y \quad \text{або} \quad y_i^* = Y\},$$

$$I = \{1, 2, \ldots, N\}, \qquad I_1 = I_x \cap I_y, \qquad I_2 = I_x \setminus (I_x \cap I_y),$$

$$I_3 = I_y \setminus (I_x \cap I_y), \qquad I_4 = I \setminus (I_x \cup I_y).$$

Кожна точка $z \in \partial D$ належить одній із граней

$$\Gamma_1 = \{z \in \partial D \mid I_2 = I_3 = \varnothing, I_4 \ne \varnothing\},$$

$$\Gamma_2 = \{z \in \partial D \mid I_4 \ne \varnothing, I_2 \ne \varnothing \quad \text{або} \quad I_3 \ne \varnothing\},$$

$$\Gamma_3 = \{z \in \partial D \mid I_4 = \varnothing, I_3 \ne \varnothing \quad \text{і} \quad I_2 \ne \varnothing\},$$

$$\Gamma_4 = \{z \in \partial D \mid I_4 = \varnothing, I_2 \cup I_3 \ne \varnothing, I_2 = \varnothing \quad \text{або} \quad I_3 = \varnothing\},$$

$$\Gamma_5 = \{z \in \partial D \mid I_2 = I_3 = I_4 = \varnothing\}.$$

Якщо $z \in \Gamma_1$, то

$$f(z) = \frac{\sum_{i \in I_1} x_i^* y_i^* + \sum_{i \in I_4} x_i y_i}{\left(\sum_{i \in I_1} x_i^* + \sum_{i \in I_4} x_i\right)\left(\sum_{i \in I_1} y_i^* + \sum_{i \in I_4} y_i\right)}.$$

Із системи рівнянь $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y_j} = 0$, $j \in I_4$, знаходимо критичні точки. Аналогічно, як і всередині D, квадратична форма, складена з других похідних у критичних точках, не є знакосталою. Отже, на грані Γ_1 функція f екстремуму не має.

У випадку, коли $z \in \Gamma_2$ або $z \in \Gamma_3$, критичні точки лежать на межах цих областей, тобто на грані Γ_2 або Γ_3 функція f екстремуму також не має.

Якщо $z \in \Gamma_4$ і для визначеності $I_2 \neq \varnothing$, тоді з рівнянь $\frac{\partial f}{\partial y_j} = 0$, $j \in I_2$, випливає, що $x_j^* = x$, $j \in I_2$, або $x_j^* = X$, $j \in I_2$. Нехай для визначеності $x_j^* = x$, $j \in I_2$. Тоді з рівнянь $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ одержуємо $\sum_{i \in I_1} (x - x_i^*) y_i^* = 0$. Але оскільки $x_i^* \geq x$, то необхідно, щоб $x_j^* = x$, $j \in I$. У цьому випадку $f(z) = \frac{1}{n}$.

Покажемо, що на грані Γ_5 функція f набуває не меншого значення.

У випадку, коли $z \in \Gamma_5$, f є функцією дискретного аргументу $z^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*, y_1^*, \ldots, y_n^*)$ де $x_i^* = x$ або $x_i^* = X$, $y_i^* = y$ або $y_i^* = Y$. Нехай u штук x_i^* дорівнює x, v штук y_i^* дорівнює y, w − кількість індексів i таких, що одночасно $x_i^* = x$ і $y_i^* = y$. Тоді

$$f(z^*) = \frac{w(X-x)(Y-y) - uY(X-x) - vX(Y-y) + nXY}{uv(X-x)(Y-y) - nuY(X-x) - nvX(Y-y) + n^2 XY}.$$

Максимальне значення за w досягається тоді, коли $w = \min(u, v)$. Позначимо через $h(u, v)$ функцію $f(z^*)$, де замість w вибрано $\min(u, v)$. Легко показати, що $h(u, u) \geq h(u, v)$. Функція $h(u, u)$ як функція дискретного аргументу u, $0 \leq u \leq n$, $u \in \mathbb{Z}$, досягає свого найбільшого значення у точці $u = n_\varepsilon$.

Використовуючи нерівність [1]

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{-1} \right)^{-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} x_{ij} \right)^{-1} \right)^{-1},$$

у якій x_{ij} − довільні дійсні додатні числа, у припущенні, що $k = n$, $n = 4$, і

$$x_{1j} = 1, \quad x_{2j} = \delta^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_j}{x_i} \right)^{-1}, \quad x_{3j} = \gamma^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_j}{y_i} \right)^{-1},$$

$$x_{4j} = \mu^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_j}{x_i} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_j}{y_i} \right)^{-1}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

з урахуванням оцінки зверху для функції f одержуємо нерівність (3).

Теорема. *Гіллястий ланцюговий дріб* (1), *де* $b_{i(k)} > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_p = 1, \ldots, N$, $p = 1, \ldots, k$, *збігається, якщо* $a_1(m) \to \infty$ *при* $m \to \infty$ *і*

$$|f - f_k| \le N \sum_{i_1=1}^{N} \frac{1}{b_{i_1}} \cdot \frac{1}{a_1\left(\left[\frac{k}{2}\right]\right)}, \qquad k \ge 2, \tag{4}$$

де f_k − k*-й підхідний дріб ГЛД* (1), f − *значення дробу* (1), $a_1(m)$ − *перша компонента вектора*

$$\begin{pmatrix} a_1(m) \\ b_1(m) \\ c_1(m) \\ d_1(m) \end{pmatrix} = \prod_{i=2}^{2m} \begin{pmatrix} N^{-1}\alpha_{i-1}\alpha_i + 1 & 0 & \alpha_{i-1}N^{-1} & 0 \\ N^{-1}\alpha_i & 0 & N^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha_{i-1}\alpha_i + N_i & 0 & \alpha_{i-1} \\ 0 & \alpha_i & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{2m}\alpha_{2m+1} \\ \alpha_{2m+1} \\ N\alpha_{2m} \\ N \end{pmatrix},$$

α_k − *мінімальний*, β_k − *максимальний елементи* $b_{i(k)}$ *на* k*-му поверсі дробу* (1),

$$N_i = \frac{\left[(N - n_i)\beta_i^{(2m)} + n_i\alpha_i^{(2m)}\right]\left[(N - n_i)\beta_i^{(2m+1)} + n_i\alpha_i^{(2m+1)}\right]}{(N - n_i)\beta_i^{(2m)}\beta_i^{(2m+1)} + n_i\alpha_i^{(2m)}\alpha_i^{(2m+1)}},$$

n_i − *найменше ціле число, яке задовольняє нерівність*

$$n_i \ge \frac{N}{1 - \varepsilon_i} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4N^2\varepsilon_i}{(1 - \varepsilon_i)^2}}, \qquad \varepsilon_i = \frac{\alpha_i^{(2m)}\alpha_i^{(2m+1)}}{\beta_i^{(2m)}\beta_i^{(2m+1)}},$$

і

$$\alpha_i^{(s)} = \alpha_i + \cfrac{N}{\beta_{i+1} + \cfrac{N}{\alpha_{i+2} + \cfrac{N}{\beta_{i+3} + \ddots + \cfrac{N}{\gamma_s}}}},$$

$$\beta_i^{(s)} = \beta_i + \cfrac{N}{\alpha_{i+1} + \cfrac{N}{\beta_{i+2} + \cfrac{N}{\alpha_{i+3} + \ddots + \cfrac{N}{\gamma_s^*}}}}, \qquad s = 2m, 2m+1,$$

$\gamma_s = \alpha_s$, *якщо* $(s - i)$ − *парне, і* $\gamma_s = \beta_s$ − *у протилежному випадку*, $\gamma_s^* = \frac{\alpha_s\beta_s}{\gamma_s}$, $i = 2, \ldots, 2m$.

Д о в е д е н н я. Використаємо формулу різниці двох підхідних дробів (1) [1]

$$f_{2m+1} - f_{2m} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{2m+1}=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{2m+1} Q_{i(k)}^{(2m+1)} \prod_{k=1}^{2m} Q_{i(k)}^{(2m)} \right)^{-1}.$$

Припускаючи, що всюди надалі i_1, i_2, …, i_{2m+1} − довільний фіксований набір індексів $1 \le i_k \le N$, $k = 1, \ldots, 2m+1$, введемо скорочені позначення

$$Q_{i(k)}^{(2m+1)} = Q_{i_k}, \qquad Q_{i(k)}^{(2m)} = Q'_{i_k}, \qquad b_{i(k)} = b_{i_k},$$

$$\sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(2m+1)}}{Q_{i(k-1)\tau}^{(2m+1)}} = \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q_{i_k}}{Q_\tau} = \xi_{i_k},$$

$$\sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q_{i(k)}^{(2m)}}{Q_{i(k-1)\tau}^{(2m)}} = \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q'_{i_k}}{Q'_\tau} = \xi'_{i_k}.$$

Застосовуючи метод математичної індукції, можемо довести [1], що добутки $\prod_{k=1}^{2s+1} Q_{i_k}$, $1 \le s \le m$, є поліномами від змінних ξ_{i_k}, $k = 1,\dots,2m+1$, і параметра $Q_{i_{2s+1}}$ вигляду

$$\prod_{k=1}^{2s+1} Q_{i_k} = L_{i_{2s}} Q_{i_{2s+1}} + L_{i_{2s+1}}, \qquad s = 1,\dots,m,$$

де $L_{i_{2s}} = L_{i_{2s}}(\xi_{i_2}, \xi_{i_3}, \dots, \xi_{i_{2s}})$, $L_{i_{2s+1}} = L_{i_{2s+1}}(\xi_{i_3}, \xi_{i_4}, \dots, \xi_{i_{2s+1}})$ – поліноми від відповідних змінних, які задовольняють рекурентні співвідношення

$$L_{i_{2s}} = (b_{i_{2s-1}} b_{i_{2s}} + \xi_{i_{2s}}) L_{i_{2s-2}} + b_{i_{2s}} L_{i_{2s-1}},$$
$$L_{i_{2s+1}} = \xi_{i_{2s+1}} (b_{i_{2s-1}} L_{i_{2s-2}} + L_{i_{2s-1}}), \qquad s = 1,\dots,m, \tag{5}$$

при початкових умовах

$$L_{i_1} = 0, \qquad L_{i_0} = 1.$$

Аналогічно отримуємо, що

$$\prod_{k=2}^{2s+2} Q'_{i_k} = L'_{i_{2s+1}} Q'_{i_{2s+2}} + L'_{i_{2s+2}}, \qquad s = 1,\dots,m-1,$$

де $L'_{i_{2s+1}} = L'_{i_{2s+1}}(\xi'_{i_3}, \xi'_{i_4}, \dots, \xi'_{i_{2s+1}})$, $L'_{i_{2s+2}} = L'_{i_{2s+2}}(\xi'_{i_4}, \xi'_{i_5}, \dots, \xi'_{i_{2s+2}})$ – поліноми від відповідних змінних, які задовольняють рекурентні співвідношення

$$L'_{i_{2s+1}} = (b_{i_{2s+1}} b_{i_{2s}} + \xi'_{i_{2s+1}}) L'_{i_{2s-1}} + b_{i_{2s+1}} L'_{i_{2s}},$$
$$L'_{i_{2s+2}} = \xi'_{i_{2s+2}} (b_{i_{2s}} L'_{i_{2s-1}} + L'_{i_{2s}}), \qquad s = 1,\dots,m-1, \tag{6}$$

при початкових умовах

$$L'_{i_1} = 1, \qquad L_{i_2} = 0.$$

Нехай ℓ_{i_k} і ℓ'_{i_k} – це ті ж L_{i_k} і L'_{i_k} відповідно, для яких у рекурентних співвідношеннях (5) і (6) кожне b_{i_s} замінено на α_s, $s = 1,\dots,2m+1$. Маємо

$$\ell_{i_{2s}} = (\alpha_{2s-1}\alpha_{2s} + \xi_{i_{2s}}) \ell_{i_{2s-2}} + \alpha_{2s} \ell_{i_{2s-1}},$$
$$\ell_{i_{2s+1}} = \xi_{i_{2s+1}} (\alpha_{2s-1} \ell_{i_{2s-2}} + \ell_{i_{2s-1}}), \quad s = 1,\dots,m, \quad \ell_{i_1} = 0, \quad \ell_{i_0} = 1, \tag{7}$$

і

$$\ell'_{i_{2s+1}} = (\alpha_{2s+1}\alpha_{2s} + \xi'_{i_{2s+1}}) \ell'_{i_{2s-1}} + \alpha_{2s+1} \ell'_{i_{2s}},$$
$$\ell'_{i_{2s+2}} = \xi'_{i_{2s+2}} (\alpha_{2s} \ell'_{i_{2s-1}} + \ell'_{i_{2s}}), \quad s = 1,\dots,m-1, \quad \ell'_{i_1} = 1, \quad \ell'_{i_2} = 0. \tag{8}$$

Тоді

$$\prod_{k=1}^{2m+1} Q_{i_k} \ge \ell_{i_{2m}} \alpha_{2m+1} + \ell_{i_{2m+1}}, \qquad \prod_{k=1}^{2m} Q'_{i_k} \ge \ell'_{i_{2m-1}} \alpha_{2m} + \ell'_{i_{2m}},$$

звідки

$$f_{2m+1} - f_{2m} \le \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{2m+1} = 1}^{N} (Q'_{i_1})^{-1} (\ell_{i_{2m}} \alpha_{2m+1} + \ell_{i_{2m+1}})^{-1} \times$$
$$\times (\ell'_{i_{2m-1}} \alpha_{2m} + \ell'_{i_{2m}})^{-1} =$$
$$= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{2m} = 1}^{N} (Q'_{i_1})^{-1} (\ell'_{i_{2m-1}} \alpha_{2m} + \ell'_{i_{2m}})^{-1} \times$$
$$\times \sum_{i_{2m+1}=1}^{N} \left[\ell_{i_{2m}} \alpha_{2m+1} + \xi_{i_{2m+1}} (\alpha_{2m-1} \ell_{i_{2m-2}} + \ell_{i_{2m-1}}) \right]^{-1}.$$

Розписавши $\xi_{i_{2m+1}}$ і застосувавши до останньої суми нерівність [1]

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\delta+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_j}{x_i}\right)^{-1}\le\frac{n}{n+\delta}\,, \tag{9}$$

одержимо

$$f_{2m+1}-f_{2m}\le N\sum_{i_1,i_2,\dots,i_{2m}=1}^{N}(Q'_{i_1})^{-1}(\ell'_{i_{2m-1}}\alpha_{2m}+\ell'_{i_{2m}})^{-1}\times$$

$$\times\left[\ell_{i_{2m}}\alpha_{2m+1}+N(\alpha_{2m-1}\ell_{i_{2m-2}}+\ell_{i_{2m-1}})\right]^{-1}. \tag{10}$$

Введемо позначення

$$P_{i_{2k}}=\ell_{i_{2k}}\ell'_{i_{2k-1}},\quad P_{i_{2k-1}}=\ell'_{i_{2k-1}}\ell_{i_{2k-2}},\quad R_{i_p}=\ell_{i_p}\ell'_{i_p},$$

$$S_{i_{2k}}=\ell_{i_{2k-1}}\ell'_{i_{2k}},\qquad S_{i_{2k-1}}=\ell_{i_{2k-1}}\ell'_{i_{2k-2}},$$

$$T_{i_{2k}}=\ell_{i_{2k-2}}\ell'_{i_{2k}},\qquad T_{i_{2k-1}}=\ell'_{i_{2k-1}}\ell_{i_{2k+1}},$$

$$\Omega_{i_p}=a_pP_{i_p}+b_pR_{i_p}+c_p(R_{i_{p-1}}+\alpha_{p-1}P_{i_{p-1}})+d_p(S_{i_p}+\alpha_{p-1}T_{i_p}),$$

де $k=1,\dots,m$, $p=2,\dots,2m$, a_p, b_p, c_p, d_p − скорочений запис відповідних координат вектора

$$\bar g_p=\begin{pmatrix}a_p(m)\\ b_p(m)\\ c_p(m)\\ d_p(m)\end{pmatrix}=\prod_{j=p+1}^{2m}G_j\bar g_{2m},\qquad p=1,\dots,2m-1\,, \tag{11}$$

і

$$G_j=\begin{pmatrix}N^{-1}\alpha_{j-1}\alpha_j+1 & 0 & \alpha_{j-1}N^{-1} & 0\\ N^{-1}\alpha_j & 0 & N^{-1} & 0\\ 0 & \alpha_{j-1}\alpha_j+N_j & 0 & \alpha_{j-1}\\ 0 & & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \bar g_{2m}=\begin{pmatrix}\alpha_{2m}\alpha_{2m+1}\\ \alpha_{2m+1}\\ N\alpha_{2m}\\ N\end{pmatrix}.$$

Таким чином, оцінка (10) після елементарних перетворень набуде вигляду

$$f_{2m+1}-f_{2m}\le N\sum_{i_1,i_2,\dots,i_{2m}=1}^{N}(Q'_{i_1})^{-1}\Omega_{i_{2m}}^{-1}\,.$$

Для оцінки зверху виразу $\sum_{i_{2m}=1}^{N}\Omega_{i_{2m}}^{-1}$ застосуємо нерівність (3). Попередньо запишемо значення $\ell_{i_{2m}}$ і $\ell'_{i_{2m}}$ на підставі формул (7) і (8), а також $\xi_{i_{2m}}$ і $\xi'_{i_{2m}}$ згідно з раніше введеними позначеннями. Змінними x_j, y_j, що містяться у нерівності (3), у цьому випадку є $x_j=Q^{(2m+1)}_{i(2m-1)j}$, $y_j=Q^{(2m)}_{i(2m-1)j}$, $j=1,\dots,N$. Тому параметри x, y, X, Y, які визначають область D, мають вигляд

$$x=\alpha_{2m}+\frac{N}{\beta_{2m+1}}\le Q^{(2m+1)}_{i(2m-1)j}\le\beta_{2m}+\frac{N}{\alpha_{2m+1}}=X\,,$$

$$y=\alpha_{2m}\le Q^{(2m)}_{i(2m-1)j}\le\beta_{2m}=Y\,.$$

З метою уникнення громіздких записів прослідкуємо, у що перетвориться кожен доданок в $\Omega_{i_{2m}}$ після застосування нерівності (3). Вираз

$$P_{i_{2m}} = \ell_{i_{2m}} \ell'_{i_{2m-1}} = \left[\left(\alpha_{2m-1}\alpha_{2m} + \sum_{j=1}^{N} \frac{x_{i_{2m}}}{x_j}\right)\ell_{i_{2m-2}} + \alpha_{2m}\ell_{i_{2m-1}}\right]\ell'_{i_{2m-1}}$$

після застосування (3) до суми $\sum\limits_{i_{2m}=1}^{N} \Omega_{i_{2m}}^{-1}$ перетвориться до вигляду

$$(N^{-1}\alpha_{2m-1}\alpha_{2m} + 1)P_{i_{2m-1}} + N^{-1}\alpha_{2m}R_{i_{2m-1}}.$$

Аналогічно

$$R_{i_{2m}} \to (\alpha_{2m-1}\alpha_{2m} + N_{2m})\left(\alpha_{2m-2}P_{i_{2m-2}} + R_{i_{2m-2}}\right) +$$

$$+ \alpha_{2m}\left(S_{i_{2m-1}} + \alpha_{2m-2}T_{i_{2m-1}}\right),$$

$$S_{i_{2m}} \to S_{i_{2m-1}} + \alpha_{2m-2}T_{i_{2m-1}}, \qquad T_{i_{2m}} \to \alpha_{2m-2}P_{i_{2m-2}} + R_{i_{2m-2}}.$$

Нехай

$$a_{2m-1} = (N^{-1}\alpha_{2m-1}\alpha_{2m} + 1)a_{2m} + \alpha_{2m-1}N^{-1}c_{2m},$$

$$b_{2m-1} = N^{-1}\alpha_{2m-1}a_{2m} + N^{-1}c_{2m},$$

$$c_{2m-1} = (\alpha_{2m-1}\alpha_{2m} + N_{2m})b_{2m} + \alpha_{2m-1}d_{2m},$$

$$d_{2m-1} = \alpha_{2m}b_{2m} + d_{2m}$$

або з урахуванням позначень (11) $\overline{g}_{2m-1} = G_{2m}\overline{g}_{2m}$. Перегрупувавши доданки у знаменнику дробу, який утворюється після застосування нерівності (3) до суми $\sum\limits_{i_{2m}=1}^{N} \Omega_{i_{2m}}^{-1}$, на першому кроці одержимо оцінку

$$\sum_{i_{2m}=1}^{N} \Omega_{i_{2m}}^{-1} \le \Omega_{i_{2m-1}}^{-1}.$$

Нехай

$$x_j = Q_{i(2m-2)j}^{(2m+1)}, \quad y_j = Q_{i(2m-2)j}^{(2m)}, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$x = \alpha_{2m-1} + \frac{N}{\beta_{2m} + \dfrac{N}{\alpha_{2m+1}}}, \qquad X = \beta_{2m-1} + \frac{N}{\alpha_{2m} + \dfrac{N}{\beta_{2m+1}}},$$

$$y = \alpha_{2m-1} + \frac{N}{\beta_{2m}}, \qquad Y = \beta_{2m-1} + \frac{N}{\alpha_{2m}}.$$

Повторно застосовуючи (3) до суми $\sum\limits_{i_{2m-1}=1}^{N} \Omega_{i_{2m-1}}^{-1}$, на другому кроці одержимо нерівність

$$\sum_{i_{2m-1}=1}^{N} \Omega_{i_{2m-1}}^{-1} \le \Omega_{i_{2m-2}}^{-1},$$

де $\overline{g}_{2m-2} = G_{2m-1}\overline{g}_{2m-1} = G_{2m-1}G_{2m}\overline{g}_{2m}$, і т. д.

Методом математичної індукції легко довести, що, послідовно застосовуючи нерівність (3), одержимо оцінку

$$f_{2m+1} - f_{2m} \le \sum_{i_1, i_2 = 1}^{N} N (Q'_{i_1})^{-1} \Omega_{i_2}^{-1} .$$

З урахуванням початкових значень $\ell_{i(k)}$ і $\ell'_{i(k)}$ маємо

$$\Omega_{i_2} = a_2(m) \ell_{i_2} \ell'_{i_1} + b_2(m) \ell_{i_2} \ell'_{i_2} + c_2(m) (\ell_{i_1} \ell'_{i_1} + \alpha_1 \ell'_{i_1} \ell_{i_0}) +$$
$$+ d_2(m) (\ell_{i_1} \ell'_{i_2} + \alpha_1 \ell'_{i_2} \ell_{i_0}) = a_2(m) (\alpha_1 \alpha_2 + \xi_{i_2}) + \alpha_1 c_2(m) .$$

Застосувавши нерівність (9) для оцінки зверху виразу $\sum_{i_2=1}^{N} \Omega_{i_2}^{-1}$, одержимо

$$\sum_{i_2=1}^{N} \Omega_{i_2}^{-1} \le \frac{N}{a_2(m)(\alpha_1 \alpha_2 + N) + c_2(m) \alpha_1} = \frac{1}{a_1(m)} .$$

Отже, $f_{2m+1} - f_{2m} \le \sum_{i_1=1}^{N} \frac{1}{Q_{i_1}^{(2m)}} \cdot \frac{N}{a_1(m)}$, звідки випливає оцінка (4). ♦

1. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
2. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
   Те саме: *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. – Reading, MA: Addison-Wesley Publ. Co., 1980. – 428 p. – Encyclopedia Math. Appl. – Vol. 11.
3. *Михальчук Р. И.* Континуальный аналог цепных дробей: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 – Донецк: Ин-т математики и механики АН УССР, 1986. – 16 с.
4. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – Москва: Наука, 1983. – 312 с.
5. *Bodnar D.* Sur la convergence des fractions continues branchées avec des termes positives // Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab. – Skrifter 1. – 1994. – P. 1–21.
6. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions. – Vol. 1: Convergence theory. – Amsterdam – Paris: Atlantis Press/Word Scientific, 2008. – 308 p.
7. *Perron O.* Die Lehre von der Kettenbrüchen. – Band II: Analytisch-funktionentheoretische Kettenbrüche. – Stuttgart: B. G. Teubner, 1957. – vi+316 S.
8. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. – New York: Van Nostrand, 1948. – 433 p.

ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩЕЙСЯ ЦЕПНОЙ ДРОБИ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Доказано одно неравенство для средних гармонических, которое использовано для установления достаточного признака сходимости и оценки скорости сходимости ветвящейся цепной дроби с положительными компонентами.

CONVERGENCE CRITERIA OF BRANCHED CONTINUED FRACTION WITH POSITIVE ELEMENTS

An inequality for harmonic average was proven and used to establish a sufficient criteria of convergence and to estimate the rate of convergence of branched continued fractions with positive components.

[1] Тернопіль. нац. економ. ун-т, Тернопіль,
[2] Луцьк. нац. техн. ун-т, Луцьк

Одержано 10.09.14