

КВАЗИСТАТИЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ІЗ ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА І ТЕПЛОВІДДАЧЕЮ

Побудовано розв'язок квазістатичної задачі термопружності для довгої циліндричної оболонки з осесиметричним розподілом джерел тепла в кільцевій області і тепловіддачею з бічної поверхні за законом Ньютона. Результати узагальнено на випадки довільної кількості кілець нагріву. Досліджено термопружний стан оболонки при одно- та двокільцевому нагріванні в асимптотичному режимі.

Одним із елементів теплоенергетичних систем, які в реальних умовах монтажу та експлуатації часто зазнають впливу значних температурних градієнтів, є циліндрична оболонка. Задача визначення у ній температурних напружень постає не тільки як необхідна умова забезпечення надійної роботи системи, а й як основа для оптимального підбору параметрів тонкостінних виробів циліндричної форми з метою зменшення маси конструкції без суттєвої втрати її міцності та стійкості.

У роботі розглядається осесиметрична квазістатична задача термопружності для довгої ізотропної циліндричної оболонки із зосередженими в обмежених областях джерелами тепла і тепловіддачею поверхні у середовищі зі сталою температурою T_0 за законом Ньютона. Досліджено вплив окремих розподілів джерел, що описуються часовою функцією Гевісайда в області одного та двох кілець оболонки. Аналогічна статична задача зі змінними вздовж твірної оболонки умовами тепловіддачі розглядалася у роботі [4].

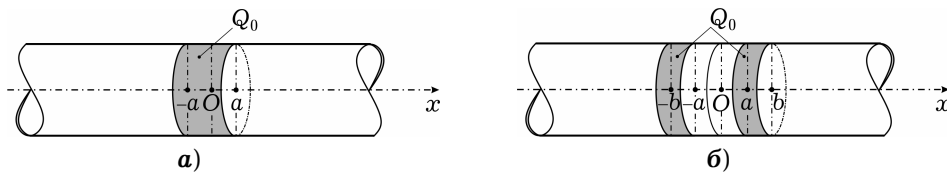


Рис. 1

Для вказаних на рис. 1а, рис. 1б розподілів джерел тепла Q_0 побудуємо функцію температури та зумовлені нею прогини оболонки, кільцеві зусилля і осьові моменти, величини яких асимптотично прямують до нуля з віддаленням точки від зони нагрівання.

Усереднений по товщині стінки осесиметричний розподіл функції $T(x)$, яка є різницею температури оболонки і середовища, знайдемо з рівняння теплопровідності [1]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial \tau} - \beta^2 T(x, \tau) = -\frac{R^2}{\alpha_t} Q(x, \tau) \quad (1)$$

за крайових і початкової умов:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T(x, \tau) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad T(x, \tau) \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (2)$$

Тут $Q(x, \tau)$ – густина розподілу джерел тепла в оболонці радіуса R з товщиною стінки $2h$; ξ – осьова координата; $x = \xi/R$; $\tau = t/(\alpha R^2)$; t – час; $\alpha = C_v \rho / \alpha_t$; C_v – теплоємність одиниці маси; ρ – питома густина матеріалу; $\beta^2 = \alpha R^2 / (\alpha_t h)$; α_t – коефіцієнт теплопровідності; α – коефіцієнт тепловіддачі з бічної поверхні оболонки.

Після побудови функції температури зникаючі на нескінченності разом зі своїми похідними прогини серединної поверхні оболонки $W(x, \tau)$ для квазістатичної задачі термопружності визначаються з рівняння [5]

$$W^{(4)} + 4k^4 W(x, \tau) = 4k^4 R \beta_t T(x, \tau) \quad (3)$$

за умов

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W(x, \tau) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial^n W}{\partial x^n} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \quad (4)$$

де $W^{(4)}(x, \tau)$ – похідна четвертого порядку від функції прогину за координатою x ; $4k^4 = 3(1 - \nu^2)(R/h)^2$, ν – коефіцієнт Пуассона; β_t – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу оболонки.

Кільцеві зусилля $N(x, \tau)$ та осьові моменти $M(x, \tau)$ на серединній поверхні з урахуванням осьових переміщень

$$u(x, \tau) = \int (\alpha_t (1 + \nu) T(x, \tau) - \nu W(x, \tau) / R) dx$$

за відомим прогином $W(x, \tau)$ подаються формулами

$$N(x, \tau) = 2Eh \left(\frac{W(x, \tau)}{R} - \beta_t T(x, \tau) \right), \quad M(x, \tau) = - \left(\frac{D}{R^2} \right) W''(x, \tau), \quad (5)$$

де $W''(x, \tau)$ – похідна другого порядку за x ; E – модуль Юнга, а $D = 2Eh^3 / 3(1 - \nu^2)$ – згинна жорсткість оболонки.

Розглянемо важливий для практичних застосувань випадок рівномірного розподілу джерел тепла постійної густини Q_0 на проміжку $x \in [-a, a]$ (див. рис. 1а):

$$Q(x, \tau) = Q_0 \Theta(x, a) \theta(\tau), \quad (6)$$

де $\Theta(x, a) = \theta(x + a) - \theta(x - a)$, $\theta(y) = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$

Застосуємо до рівняння (1) з урахуванням (6) косинус-перетворення Фур'є за координатою x :

$$\tilde{T}(s, \tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty T(x, \tau) \cos sx dx \quad (7)$$

і перетворення Лапласа за часом τ :

$$\tilde{\tilde{T}}(s, p) = \int_0^\infty \tilde{T}(s, \tau) e^{-p\tau} d\tau,$$

задовольнивши при цьому крайові та початкову умови (2). Виконавши обернення отриманої трансформанти температури $\tilde{\tilde{T}}(s, p)$, приходимо до оригіналу – температурного поля у формі інтеграла

$$T(x, \tau) = \frac{2}{\pi} \beta^2 q_0 \int_0^\infty [1 - \exp(- (s^2 + \beta^2) \tau)] \frac{\sin as \cos xs}{s(s^2 + \beta^2)} ds, \quad (8)$$

де $q_0 = Q_0 R^2 \frac{1}{\alpha_t \beta^2}$. Розклавши підінтегральний дріб на прості дроби та з урахуванням відповідних невластних інтегралів, із формули (8) отримаємо вираз для температури

$$T(x, \tau) = \frac{q_0}{4} \left[4(1 - e^{-\beta^2 \tau}) \Theta(x, a) + 2e^{-\beta^2 \tau} (\operatorname{erfc}(x_1) \pm \operatorname{erfc}(x_2)) - e^{\beta(x+a)} \operatorname{erfc}(x_1^*) - e^{-\beta(x+a)} \operatorname{erfc}(x_2^*) \pm e^{\beta|x-a|} \operatorname{erfc}(x_3^*) \pm e^{-\beta|x-a|} \operatorname{erfc}(x_4^*) \right]. \quad (9)$$

Тут $\operatorname{erfc}(y) = 1 - \Phi(y)$, $\Phi(y)$ – інтегральна функція Лапласа, а її аргументи $x_1 = (x + a)/(2\sqrt{\tau})$, $x_2 = |x - a|/(2\sqrt{\tau})$, $x_{1,2}^* = x_1 \pm \beta\sqrt{\tau}$, $x_{3,4}^* = x_2 \pm \beta\sqrt{\tau}$. Верхній знак у формулі (9) слід брати для $x \in [0, a]$, а нижній – для $x \in [a, \infty]$.

Подібним чином, застосувавши перетворення Фур'є (7) до рівняння прогину (3) за умов (4), отримуємо

$$W(x, \tau) = \frac{8k^4 q_0 R\beta_t}{\pi} \int_0^\infty [1 - \exp(-(s^2 + \beta^2)\tau)] \frac{\sin as \cos xs ds}{s(s^2 + \beta^2)(s^4 + 4k^4)}. \quad (10)$$

Після розкладу підінтегрального дробу на прості дроби функцію прогину подамо як лінійну комбінацію невластних інтегралів

$$W(x, \tau) = \frac{2}{\pi} q_0 \sum_{n=1}^4 C_n (I_n(x) - I_n^*(x, \tau)) \quad (11)$$

з коефіцієнтами $C_1 = R\beta_t$, $C_2 = -R\beta_t \gamma_0^2 / (1 + \gamma_0^2)$, $C_3 = C_2 \beta^2$, $C_4 = C_2 / \gamma_0^2$, де $\gamma_0 = 2k^2 / \beta^2$.

При цьому зазначені інтеграли мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_0^\infty \sin as \cos xs \frac{ds}{s}, & I_2(x) &= \int_0^\infty \sin as \cos xs \frac{s ds}{s^2 + \beta^2}, \\ I_3(x) &= \int_0^\infty \sin as \cos xs \frac{s ds}{s^4 + 4k^4}, & I_4(x) &= \int_0^\infty \sin as \cos xs \frac{s^3 ds}{s^4 + 4k^4}, \\ I_1^*(x, \tau) &= \int_0^\infty \sin as \cos xs \exp(-(s^2 + \beta^2)\tau) \frac{ds}{s}, \\ I_2^*(x, \tau) &= \int_0^\infty \sin as \cos xs \exp(-(s^2 + \beta^2)\tau) \frac{s ds}{s^2 + \beta^2}, \\ I_3^*(x, \tau) &= \int_0^\infty \sin as \cos xs \exp(-(s^2 + \beta^2)\tau) \frac{s ds}{s^4 + 4k^4}, \\ I_4^*(x, \tau) &= \int_0^\infty \sin as \cos xs \exp(-(s^2 + \beta^2)\tau) \frac{s^3 ds}{s^4 + 4k^4}, \\ I_4(x) &= -\frac{\partial^2 I_3}{\partial a^2}, & I_4^*(x, \tau) &= -\frac{\partial^2 I_3^*}{\partial a^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Вирази цих інтегралів, крім $I_3^*(x, \tau)$ та $I_4^*(x, \tau)$, відомі [2]:

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \frac{\pi}{4} (\operatorname{sgn}(x + a) - \operatorname{sgn}(x - a)), & I_2(x) &= \frac{\pi}{4} (e^{-\beta(x+a)} - e^{-\beta|x-a|}), \\ I_3(x) &= \frac{\pi}{8k^2} (e^{-k(x+a)} \operatorname{sinc}(x + a) - e^{-k|x-a|} \operatorname{sinc}|x - a|), \\ I_4(x) &= \frac{\pi}{4} (e^{-k(x+a)} \cos k(x + a) - e^{-k|x-a|} \cos k(x - a)), \\ I_1^*(x, \tau) &= \frac{\pi}{4} e^{-2\beta^2\tau} (\operatorname{erfc}(x_2) - \operatorname{erfc}(x_1)), \\ I_2^*(x, \tau) &= \frac{\pi}{8} e^{-2\beta^2\tau} [2(\operatorname{sh} \beta(x + a) - \operatorname{sh} \beta|x - a|) + \operatorname{erfc}(x_1^*) + \\ &\quad + \operatorname{erfc}(x_2^*) - \operatorname{erfc}(x_3^*) - \operatorname{erfc}(x_4^*)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Стосовно інтегралів $I_3^*(x, \tau)$ та $I_4^*(x, \tau)$, то вони зводяться до інтегралів ймовірностей від комплексного аргументу [7].

Після подання $I_3^*(x, \tau)$ через вказані інтеграли та ряду перетворень з урахуванням останньої з рівностей (12) отримуємо

$$I_3^*(x, \tau) = \frac{\pi}{8k^2} \left[\varphi_3(x) e^{-2ik^2\tau} + i \sum_{j=1}^4 (-1)^j (\operatorname{erfc}(z_{2j}) e^{2ik^2\tau} - \operatorname{erfc}(z_{2j-1}) e^{-2ik^2\tau}) \right] e^{-\beta^2\tau}, \quad (14)$$

$$I_4^*(x, \tau) = \frac{\pi}{4} \left[\varphi_4(x) e^{-2ik^2\tau} + \frac{1}{4k^2\tau} \sum_{j=1}^4 (-1)^j (z_{2j} e^{-z_{2j}^2 + 2ik^2\tau} - z_{2j-1} e^{-z_{2j-1}^2 - 2ik^2\tau}) \right] e^{-\beta^2\tau}, \quad (15)$$

де комплексні величини z_{2j-1} , z_{2j} , $j = 1, 2, 3, 4$, визначаються рівностями

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= x_1 + k\sqrt{\tau}(1 \pm i), & z_{3,4} &= x_1 - k\sqrt{\tau}(1 \pm i), \\ z_{5,6} &= x_2 + k\sqrt{\tau}(1 \pm i), & z_{7,8} &= x_2 - k\sqrt{\tau}(1 \pm i), \quad i = \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) &= e^{-k(x+a)} \sin k(x+a) - e^{-k|x-a|} \sin k|x-a|, \\ \varphi_4(x) &= e^{-k(x+a)} \cos k(x+a) - e^{-k|x-a|} \cos k(x-a). \end{aligned}$$

Функцію прогину (11) з урахуванням інтегралів (13)–(15) зручно тепер подати у вигляді

$$W(x, \tau) = \frac{q_0 R \beta_t}{(1 + \gamma_0^2) \sum_{n=1}^3 W_n(x, \tau)}, \quad (16)$$

де $W_1(x, \tau)$ та $W_2(x, \tau)$ – функції дійсних аргументів x і τ , а $W_3(x, \tau)$ – дійсна частина певної комбінації інтегралів ймовірностей від комплексних змінних z_j .

Здійснивши ряд простих перетворень рівності (11) з урахуванням (13)–(15), запишемо вирази для складових $W_n(x, \tau)$, $n = 1, 2, 3$, з (16):

$$\begin{aligned} W_1(x, \tau) &= \left[\left\{ \frac{1 + \gamma_0^2(1 - e^{-\beta a} \operatorname{ch} \beta x)}{\gamma_0^2 \operatorname{sh} \beta a e^{-\beta x}} \right\} - \gamma_0 \left\{ \frac{f_1(x)}{f_3(x)} \right\} + \left\{ \frac{-f_2(x)}{f_4(x)} \right\} + \right. \\ &\quad + \gamma_0^2 \sum_{j=1}^4 (-1)^j \operatorname{erfc}(x_j^*) + \frac{1}{4} \gamma_0^2 e^{-\beta^2\tau} (\varphi_1(x)(\gamma_0 \cos \beta^2 \gamma_0 \tau + \\ &\quad + \sin \beta^2 \gamma_0 \tau) - \varphi_2(x)(\gamma_0 \cos \beta^2 \gamma_0 \tau - \sin \beta^2 \gamma_0 \tau) + \\ &\quad \left. + 2(\Phi(x_1) + \Phi(x_2))) \right], \\ W_2(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \left[\left(\omega_1(x, \tau) - \frac{x_1}{k} \omega_2(x, \tau) \right) e^{-x_1^2} + \left(\omega_3(x, \tau) - \frac{x_2}{k} \omega_4(x, \tau) \right) e^{-x_2^2} \right], \\ W_3(x, \tau) &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi\tau}} \sum_{j=1}^4 (-1)^{j-1} \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} + \beta^2 \gamma_0 \tau \right) \operatorname{Re} \operatorname{erfc}(z_j) + \right. \\ &\quad \left. + \sin \left(\frac{\pi}{4} - \beta^2 \gamma_0 \tau \right) \operatorname{Im} \operatorname{erfc}(z_j) \right), \quad (17) \end{aligned}$$

(верхній рядок для $W_1(x, \tau)$ слід брати для $x \in [0, a]$, а нижній – для $x \in [a, \infty]$). Тут позначено

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= (\sin ak \cos kx \operatorname{ch} kx - \cos ak \sin kx \operatorname{sh} kx)e^{-ak}, \\
 f_2(x) &= (\cos ak \cos kx \operatorname{ch} kx + \sin ak \sin kx \operatorname{sh} kx)e^{-ak}, \\
 f_3(x) &= (\sin ak \operatorname{ch} ak \cos kx - \cos ak \operatorname{sh} ak \sin kx)e^{-kx}, \\
 f_4(x) &= (\cos ak \operatorname{sh} ak \cos kx + \sin ak \operatorname{ch} ak \sin kx)e^{-kx}, \\
 \varphi_1(x) &= \sin k(x+a) \operatorname{ch} k(x+a) + \sin k|x-a| \operatorname{ch} k(x-a), \\
 \varphi_2(x) &= \cos k(x+a) \operatorname{sh} k(x+a) + \cos k(x-a) \operatorname{sh} k|x-a|, \\
 \omega_1(x, \tau) &= \cos k(x+a) \operatorname{sh} k(x+a) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta^2 \gamma_0 \tau\right) + \\
 &\quad + \sin k(x+a) \operatorname{ch} k(x+a) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta^2 \gamma_0 \tau\right), \\
 \omega_2(x, \tau) &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin k(x+a) \operatorname{sh} k(x+a) \cos \beta^2 \gamma_0 \tau - \\
 &\quad - \cos k(x+a) \operatorname{ch} k(x+a) \sin \beta^2 \gamma_0 \tau), \\
 \omega_3(x, \tau) &= \cos k(x-a) \operatorname{sh} k|x-a| \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta^2 \gamma_0 \tau\right) + \\
 &\quad + \sin k|x-a| \operatorname{ch} k(x-a) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta^2 \gamma_0 \tau\right), \\
 \omega_4(x, \tau) &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin k|x-a| \operatorname{sh} k|x-a| \cos \beta^2 \gamma_0 \tau - \\
 &\quad - \cos k(x-a) \operatorname{ch} k(x-a) \sin \beta^2 \gamma_0 \tau). \tag{18}
 \end{aligned}$$

Температурне поле (9), функція прогинів (16) і відповідні їм формули для зусиль і моментів (5) для випадку однокільцевого розподілу джерел за допомогою суперпозиції легко переносяться на випадки n -кільцевого нагрівання оболонки джерелами:

$$Q_n(x, \tau) = Q_0 \theta(\tau) \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} [\theta(x+aj) - \theta(x-aj)]. \tag{19}$$

При цьому температурне поле визначається за формулою

$$T(x, \tau) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} T_j(x, \tau), \tag{20}$$

де $T_j(x, \tau)$ – вираз (9), у якому параметр « a » слід замінити на « aj ». Формули для прогинів, кільцевих зусиль та осьових моментів подаються аналогічними сумами.

Зауважимо, що накладанням розв'язків (9), і відповідно (16), можна отримати результати для будь-яких кільцевих розподілів джерел тепла сталої (у т. ч. й різної в окремих інтервалах) інтенсивності, зокрема, серед яких можуть бути і джерела з від'ємною густиною. Такі задачі виникають, наприклад, при виборі режимів нагрівання оболонки способом локальної термічної обробки [6] з метою зниження рівнів залишкових напружень в області кільцевого зварного шва, при налагодженні оптимальних технологічних процесів виготовлення тонкостінних елементів приладів і конструкцій, коли однією з умов є обмеження рівня температури на певній відстані від області нагрівання [3, 9], а також при розгляді ряду інших науково-технічних проблем [8].

З інтегрального виразу (10) для функції прогину видно, що для довільного моменту часу похідна $\partial W/\partial \tau > 0$. Це означає, що функція прогинів $W(x, \tau)$ монотонно зростає у часі і досягає свого найбільшого значення в асимптотичному режимі нагрівання оболонки при $\tau \rightarrow \infty$. Очевидно, що найвищі рівні зусиль і моментів також досягаються при $\tau \rightarrow \infty$.

У цьому випадку вирази температури, прогину та відповідних їм зусиль і моментів значно спрощуються і визначаються рівностями:

$$T(x) = q_0 \begin{cases} -e^{-\beta a} \operatorname{ch} \beta x, & x \in [0, a], \\ \operatorname{sh} \beta a e^{-\beta x}, & x \in [a, \infty], \end{cases} \quad (21)$$

$$W(x) = \frac{q_0 R \beta_t}{1 + \gamma_0^2} \begin{cases} 1 + \gamma_0^2 (1 - e^{-\beta a} \operatorname{ch} \beta x) - \gamma_0 f_1(x) - f_2(x), & x \in [0, a], \\ \gamma_0^2 \operatorname{sh} \beta a e^{-\beta x} - \gamma_0 f_3(x) + f_4(x), & x \in [a, \infty], \end{cases} \quad (22)$$

$$N(x) = \frac{2Eh q_0 \beta_t}{1 + \gamma_0^2} \begin{cases} e^{-\beta a} \operatorname{ch} \beta x - \gamma_0 f_1(x) - f_2(x), & x \in [0, a], \\ -\operatorname{sh} \beta a e^{-\beta x} - \gamma_0 f_3(x) + f_4(x), & x \in [a, \infty], \end{cases} \quad (23)$$

$$M(x) = \frac{2Eh^3 q_0 \beta_t \beta^2 \gamma_0^2}{3R(1 + \gamma_0^2)(1 - \nu^2)} \begin{cases} e^{-\beta a} \operatorname{ch} \beta x + \gamma_0^{-1} f_1(x) - f_2(x), & x \in [0, a], \\ -\operatorname{sh} \beta a e^{-\beta x} + \gamma_0^{-1} f_3(x) + f_4(x), & x \in [a, \infty]. \end{cases} \quad (24)$$

Розглянемо варіант двокільцевого нагрівання оболонки джерелами тепла сталої і однакової у кожному кільці густини, що діють на проміжках $[-b, -a]$ та $[a, b]$ (рис. 16). За формулами (20) і (21) запишемо вираз для температури в асимптотичному режимі:

$$T(x) = q_0 \begin{cases} (e^{-\beta a} - e^{-\beta b}) \operatorname{ch} \beta x, & x \in [0, a], \\ 1 - e^{-\beta b} \operatorname{ch} \beta x - \operatorname{sh} \beta a e^{-\beta x}, & x \in [a, b], \\ (\operatorname{sh} \beta b - \operatorname{sh} \beta a) e^{-\beta x}, & x \in [b, \infty]. \end{cases} \quad (25)$$

Зумовлені цим полем кільцеві зусилля та осьові моменти внаслідок суперпозицій типу (20) виразів (23) і (24) визначаються такими рівностями:

$$N(x) = \frac{2Eh q_0 \beta_t}{1 + \gamma_0^2} \{ (e^{-\beta b} - e^{-\beta a}) \operatorname{ch} \beta x - \gamma_0 (f_{1b}(x) - f_1(x)) - f_{2b}(x) + f_2(x) \},$$

$$x \in [0, a],$$

$$N(x) = \frac{2Eh q_0 \beta_t}{1 + \gamma_0^2} \{ e^{-\beta b} \operatorname{ch} \beta x + \operatorname{sh} \beta a e^{-\beta x} - \gamma_0 (f_{1b}(x) - f_3(x)) - f_{2b}(x) - f_4(x) \},$$

$$x \in [a, b],$$

$$N(x) = \frac{2Eh q_0 \beta_t}{1 + \gamma_0^2} \{ (\operatorname{sh} \beta a - \operatorname{sh} \beta b) e^{-\beta x} - \gamma_0 (f_{3b}(x) - f_3(x)) + f_{4b}(x) - f_4(x) \},$$

$$x \in [b, \infty), \quad (26)$$

$$M(x) = \frac{2Eh^3 q_0 \beta_t \beta^2 \gamma_0^2}{3R(1 + \gamma_0^2)(1 - \nu^2)} \{ (e^{-\beta b} - e^{-\beta a}) \operatorname{ch} \beta x + \gamma_0^{-1} (f_{1b}(x) - f_1(x)) - f_{2b}(x) + f_2(x) \},$$

$$x \in [0, a],$$

$$M(x) = \frac{2Eh^3 q_0 \beta_t \beta^2 \gamma_0^2}{3R(1 + \gamma_0^2)(1 - \nu^2)} \{ e^{-\beta b} \operatorname{ch} \beta x + \operatorname{sh} \beta a e^{-\beta x} + \gamma_0^{-1} (f_{1b}(x) - f_3(x)) - f_{2b}(x) - f_4(x) \},$$

$$x \in [a, b],$$

$$M(x) = \frac{2Eh^3 q_0 \beta_t \beta^2 \gamma_0^2}{3R(1 + \gamma_0^2)(1 - \nu^2)} \{(\text{sh } \beta a - \text{sh } \beta b)e^{-\beta x} + \gamma_0^{-1}(f_{3b}(x) - f_3(x)) + f_{4b}(x) - f_4(x)\}, \quad x \in [b, \infty), \quad (27)$$

де $f_{jb}(x)$, $j = 1, 2, 3, 4$, – функції $f_j(x)$, означені формулами (18), у яких символ « a » слід замінити на « b ».

Поклавши в (26) і (27) $b = 2a$, отримаємо розрахункові формули кільцевих зусиль і згинних моментів для випадку $n = 2$ симетричного відносно перерізу $x = 0$ розподілу джерел однакової густини (19) в області двох кілець ширини a , що розміщені на відстані $2a$ одне від одного.

Особливості термопружного стану оболонки відображені на зведених графіках функцій $T^*(x) = T(x)/q_0$, $N^*(x) = 10N(x)/q_0^*$ і $M^*(x) = 10^3 M(x)/q_0^*$, де $q_0^* = 2Eh q_0 \beta_t (1 + \gamma_0^2)^{-1}$, для двох варіантів розміщення джерел (19): $n = 1$ (рис. 2а) та $n = 2$ (рис. 2б) при геометричних характеристиках оболонки $R = 0.1$ м, $h = 0.005$ м, $a = 0.2$ і значеннях термомеханічних характеристик матеріалу $\beta = 1.523$, $\nu = 0.3$.

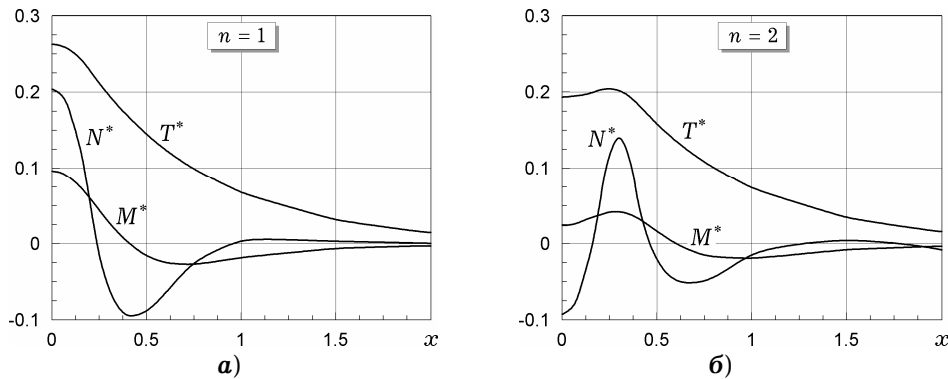


Рис. 2

З графіків видно, що вже на відстані двох радіусів від перерізу $x = 0$ рівень температури знижується на порядок в обох випадках нагрівання, а кільцеві зусилля та осеві моменти на цих відстанях практично відсутні. Максимум температури, зумовленої розподілом джерел (19) при $n = 2$, становить 78% від максимального рівня температури при $n = 1$ і зміщений від середини зон нагрівання до початку відліку на $0.25a$. Найвищі рівні зусиль (стиску) та моментів в обох випадках досягаються посередині цих проміжків і для $n = 2$ становлять 70% та 43% від відповідних їм значень при однокільцевому нагріванні ($n = 1$). Зміщення максимуму температури від центрів зон нагрівання до початку відліку $x = 0$ при двокільцевому нагріванні зумовлене інтенсивнішим відтоком тепла на нескінченність порівняно із відтоком у напрямку до перерізу $x = 0$, у той час, як зниження її максимального рівня викликане саме цим відтоком. Проте при «розсуванні» кілець точки максимумів розрахункових величин неухильно рухаються до середини зон нагріву, а максимальні числові значення температури, зусиль і моментів наближаються до значень, що відповідають однокільцевому розподілу джерел тепла. В міру зближення джерел при $n = 2$ рівень зусиль розтягу поблизу перерізу $x = 0$ поступово знижується і стан розтягу переходить у стан стиску, так що у граничному випадку отримуємо величини зусиль і моментів, що відповідають злиттю джерел в одне кільце. Аналіз розв'язку вказує на те, що на відстані двох радіусів від зон нагрівання термопружної стани оболонки, зумовлені окремими джерелами у випадку $n = 2$, практично не пов'язані між собою. Це означає, зокрема, що джерела

(19) у випадку $n = 3$ і відповідне їм температурне поле (20) при належному виборі параметрів зумовлюють термопружний стан короткої оболонки з теплоізолюваними і практично вільними від зусиль і моментів торцями $x = \pm 2$. Зауважимо, накінець, що внаслідок незалежності функції температури (9) (отже, і (20)) від радіуса оболонки побудовані температурні поля описують також термічні стани нескінченної пластинки-смуги з теплоізолюваними краями.

1. Болотин В. В. Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла // Прикл. математика и механика. – 1960. – 24, № 2. – С. 361–363.
Te same: Bolotin V. V. Equations for the non-stationary temperature fields in thin shells in the presence of sources of heat // J. Appl. Math. Mech. – 1960. – 24, No. 2. – P. 515–519.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1108 с.
3. Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С. Постановка и решение некоторых вариационных задач термоупругости тонких оболочек применительно к выбору оптимальных режимов местной термообработки // Прикл. механика и техн. физика. – 1968. – № 4. – С. 47–54.
Te same: Grigolyuk É. I., Burak Ya. I., Podstrigach Ya. S. Solution of certain variational problems of thermal resilience for thin shells considering the selection of optimum conditions for localized heat treatment // J. Appl. Mech. Techn. Phys. – 1968. – 9, No. 4. – P. 389–396.
4. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
5. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 343 с.
6. Сагалевич В. М. Методы устранения сварочных деформаций и напряжений. – Москва: Машиностроение, 1974. – 248 с.
7. Фаддеева В. Н., Терентьев Н. М. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1954. – 268 с.
8. Pietraszkiewicz W. Refined resultant thermomechanics of shells // Int. J. Eng. Sci. 2011. – 49, No. 10. – P. 1112–1124.
9. Zozuljak Ju.; Ostapski W. Optimization of the stress-state in thermoelastic shells based on generalized energy criteria // J. Therm. Stresses. – 2000. – 23, No. 1. – P. 59–70.

КВАЗИСТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА И ТЕПЛОТДАЧЕЙ

Построено решение квазистатической задачи термоупругости для длинной цилиндрической оболочки с осесимметричным распределением источников тепла в кольцевой области и теплоотдачей с боковой поверхности по закону Ньютона. Результаты обобщены на случаи произвольного числа колец нагрева. Исследовано термоупругое состояние оболочки при одно- и двухкольцевом нагревании в асимптотическом режиме.

QUASI-STATIC THERMOELASTICITY PROBLEM FOR CYLINDRICAL SHELL WITH HEAT SOURCES AND HEAT EXCHANGE

The solution of the quasi-static thermoelasticity problem for a long cylindrical shell with an axisymmetric distribution of heat sources in the annular area and heat exchange at the side surface due to Newton's law is constructed. The results are extended to the case of any number of heating rings. The thermoelastic state of the shell in conditions of single- and double-ring heating is studied in the asymptotic regime.

¹ Львів. держ. фінансова акад., Львів,

² Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів