УДК 512.643

В. М. Прокіп

ПРО НОРМАЛЬНУ ФОРМУ ВІДНОСНО НАПІВСКАЛЯРНОЇ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ НАД ПОЛЕМ

Для матричної в'язки $A_0x - A_1$, де A_0 та A_1 – $(n \times n)$-матриці над довільним полем F і A_0 – неособлива матриця, встановлено нормальну форму відносно напівскалярної еквівалентності. Описано структуру неособливих многочленних матриць над полем F, які перетвореннями напівскалярної еквівалентності зводяться до встановленої форми.

Нехай $M_{n,n}(F)$ та $M_{n,n}(F[x])$ – кільця $(n \times n)$-матриць над полем F і кільцем многочленів $F[x]$ відповідно. Надалі через I_n позначатимемо одиничну матрицю вимірності n, а через $0_{n,k}$ – нульову $(n \times k)$-матрицю.

Унітальному многочлену $a(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \in$ $\in F[x]$, $n \geq 1$, поставимо у відповідність матриці

$$\Psi_a = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{Vmatrix} \in M_{n,n}(F)$$

і

$$H_a(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ x & x^2 & \cdots & x^{n-1} & a(x) \end{Vmatrix} \in M_{n,n}(F[x]).$$

Нагадаємо, що многочленні $(n \times n)$-матриці $A(x), B(x) \in M_{n,n}(F[x])$ називають напівскалярно еквівалентними (див. [3, 4, 9]), якщо існують неособлива матриця $P \in M_{n,n}(F)$ та оборотна матриця $Q(x) \in GL(n, F[x])$ такі, що

$$B(x) = PA(x)Q(x).$$

Якщо ж F – нескінченне поле, то неособлива матриця $A(x) \in M_{n,n}(F[x])$ перетвореннями напівскалярної еквівалентності зводиться до нижньої трикутної матриці

$$T_A(x) = PA(x)Q(x) = \begin{Vmatrix} a_1(x) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t_{21}(x) & a_2(x) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1}(x) & t_{n2}(x) & t_{n3}(x) & \cdots & a_n(x) \end{Vmatrix},$$

де $P \in GL(n, F)$; $Q(x) \in GL(n, F[x])$; $a_j(x)$ – інваріантні многочлени матриці $A(x)$; $a_j(x) \mid t_{ij}(x)$ для всіх $i > j$ і $\deg t_{ij}(x) < \deg a_i(x)$ для всіх $1 < i \leq n$ та $i > j > n$. При цьому матриця $T_A(x)$ визначена неоднозначно.

Незважаючи на значну кількість статей, у яких досліджувалась задача про напівскалярну еквівалентність, (див. [1–4, 7–9] та цитовані там роботи), канонічної форми для многочленних матриць відносно перетворень напівскалярної еквівалентності в загальному випадку не встановлено. У роботі [6] вказано канонічну форму матричної в'язки $A_0x - A_1 \in M_{n,n}(F[x])$ над довільним полем F з неособливою матрицею A_0 відносно перетворень напівскалярної еквівалентності в термінах матриць $H_a(x)$, які побудовано за елементарними дільниками матричної в'язки $A(x) = A_0x - A_1$.

У цій статті встановимо нормальну форму матричної в'язки $A_0x - A_1 \in M_{n,n}(F[x])$ над довільним полем F з неособливою матрицею A_0 відносно перетворень напівскалярної еквівалентності. Крім цього, опишемо структуру неособливих матриць із кільця $M_{n,n}(F[x])$, які такими перетвореннями зводяться до встановленої нормальної форми.

Надалі F − довільне поле. Основним результатом роботи є така

Теорема 1. *Нехай унітальні многочлени* $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_k(x) \in F[x]$, $\deg a_i(x) = m_i \geq 1$, *− інваріантні многочлени матричної в'язки* $A_0x - A_1 \in M_{n,n}(F[x])$. *Якщо* A_0 *− неособлива матриця, то матрична в'язка* $A(x) = A_0x - A_1$ *напівскалярно еквівалентна кліткову-діагональній* $(n \times n)$*-матриці*

$$H_A(x) = \bigoplus_{i=1}^{k} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ x & x^2 & \cdots & x^{m_i} & a_i(x) \end{Vmatrix} = \bigoplus_{i=1}^{k} H_{a_i}(x),$$

тобто $H_A(x) = P(A_0x - A_1)Q(x)$, *де* $P \in GL(n, F)$ *і* $Q(x) \in GL(n, F[x])$. *При цьому матриця* $H_A(x)$ *визначена однозначно з точністю до перестановки блоків* $H_{a_i}(x)$.

Д о в е д е н н я. Оскільки A_0 − неособлива матриця, то матричну в'язку запишемо у вигляді

$$A_0x - A_1 = (I_nx - A)A_0, \tag{1}$$

де $A = A_1A_0^{-1}$. Очевидно, що унітальні многочлени $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_k(x) \in F[x]$ є інваріантними множниками матричної в'язки $I_nx - A$. Отже, для матричної в'язки $I_nx - A$ існує неособлива матриця $T \in M_{n,n}(F)$ така, що (див. [5, с. 138])

$$T(I_nx - A)T^{-1} = \begin{Vmatrix} I_{m_1}x - \Psi_{a_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & I_{m_2}x - \Psi_{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_{m_k}x - \Psi_{a_k} \end{Vmatrix} \tag{2}$$

− кліткова-діагональна матриця, де Ψ_{a_i} − клітки Фробеніуса, побудовані за інваріантними многочленами $a_i(x)$. На підставі рівностей (1) і (2) отримуємо, що матрична в'язка $A_0x - A_1$ скалярно еквівалентна кліткова-діагональній матриці з клітками $\Psi_{a_i}(x) = I_{m_i}x - \Psi_{a_i}$ на головній діагоналі, тобто (див. також лему 2 із [6])

$$U(A_0x - A_1)V = \left\| \begin{matrix} I_{m_1}x - \Psi_{a_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & I_{m_2}x - \Psi_{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & I_{m_k}x - \Psi_{a_k} \end{matrix} \right\|,$$

де $U, V \in M_{n,n}(F)$ − неособливі матриці.

Згідно з лемою 3 із [6] матриці $\Psi_{a_i}(x) = I_{m_i}x - \Psi_{a_i}$ і $H_{a_i}(x)$ напівскалярно еквівалентні, тобто

$$H_{a_i}(x) = P_i \Psi_{a_i}(x) Q_i(x),$$

де $P_i \in GL(k_i, F)$, $Q_i(x) \in GL(k_i, F[x])$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Отже, матриці

$$P = \operatorname{diag}(P_1, P_2, \ldots, P_k)U \in GL(n, F)$$

та

$$Q(x) = V \operatorname{diag}(Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_k(x)) \in GL(n, F[x])$$

задовольняють рівність

$$P(A_0x - A_1)Q(x) = H_A(x) = \bigoplus_{i=1}^{k} \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ x & x^2 & \cdots & x^{m_i} & a_i(x) \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки матриця (2) клітками $H_{a_i}(x) = I_{k_i}x - \Psi_{a_i}$ визначена однозначно з точністю до їх перестановки, то матриця $H_A(x) = \bigoplus_{i=1}^{k} H_{a_i}(x)$ теж визначена однозначно з точністю до перестановки діагональних кліток $H_{a_i}(x)$.

Теорему доведено. ♦

Опишемо структуру неособливих матриць із $M_{n,n}(F[x])$, які перетвореннями напівскалярної еквівалентності зводяться до наведеної вище нормальної форми.

Теорема 2. *Нехай унітальні многочлени* $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_r(x) \in F[x]$, $\deg a_i(x) = m_i \geq 1$, − *інваріантні многочлени неособливої матриці* $A(x) \in M_{n,n}(F[x])$. *Якщо* $\deg \det A(x) = k \leq n$, *то матриця* $A(x)$ *напівскалярно еквівалентна кліткова-діагональній* $(n \times n)$*-матриці*

$$D(x) = I_{n-k} \bigoplus_{i=1}^{k} \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ x & x^2 & \cdots & x^{m_i} & a_i(x) \end{matrix} \right\|$$

тоді й тільки тоді, коли $A(x)$ *допускає зображення у вигляді добутку*

$$A(x) = U \left\| \begin{matrix} I_{n-k} & 0_{n-k,k} \\ 0_{k,n-k} & I_k x - B \end{matrix} \right\| V(x), \tag{3}$$

де $U \in GL(n, F)$, $B \in M_{k,k}(F)$ *і* $V(x) \in GL(n, F[x])$.

Д о в е д е н н я. Нехай неособлива матриця $A(x) \in M_{n,n}(F[x])$ допускає зображення у вигляді добутку (3). Оскільки U і $V(x)$ − оборотні матриці, то $a_1(x), a_2(x), \dots, a_r(x)$ − інваріантні многочлени матриці $I_n x - B \in M_{k,k}(F[x])$. На підставі теореми 1 матриця $I_n x - B$ напівскалярно еквівалентна матриці

$$\bigoplus_{i=1}^{r} H_{a_i}(x) = P_1(I_k x - B)Q_1(x),$$

де $P_1 \in GL(n,F)$, $Q_1(x) \in GL(n,F[x])$. Враховуючи рівність (3), маємо, що матриця $A(x)$ перетвореннями напівскалярної еквівалентності зводиться до клітково-діагональної $(n \times n)$-матриці $D(x) = I_{n-k} \bigoplus_{i=1}^{r} H_{a_i}(x)$.

Навпаки, нехай для неособливої матриці

$A(x) \in M_{n,n}(F[x]) \deg\det A(x) = k \le n$.

Нехай, далі, матриця $A(x)$ напівскалярно еквівалентна клітково-діагональній $(n \times n)$-матриці

$$D(x) = I_{n-k} \bigoplus_{i=1}^{k} H_{a_i}(x) = PA(x)Q(x), \tag{4}$$

де $P \in GL(n,F)$, $Q(x) \in GL(n,F[x])$, $a_i(x) \in F[x]$ − інваріантні многочлени матриці $A(x)$, $\deg a_i(x) = m_i \ge 1$, $i = 1,2,\dots,r$.

Згідно з теоремою 1 матриця $H(x) = \bigoplus_{i=1}^{k} H_{a_i}(x) \in M_{k,k}(F[x])$ напівскалярно еквівалентна матричній в'язці $B(x) = I_k x - B \in M_{k,k}(F[x])$ з інваріантними многочленами $a_1(x), a_2(x), \dots, a_r(x)$, тобто існують матриці $P_1 \in GL(k,F)$ та $Q_1(x) \in GL(k,F[x])$ такі, що

$$B(x) = P_1 H(x) Q_1(x).$$

Зауважимо, що матриця B визначена з точністю до подібності.

Отже, матриця $D(x)$ допускає зображення у вигляді добутку

$$D(x) = \begin{Vmatrix} I_{n-k} & 0_{n-k,k} \\ 0_{k,n-k} & P_1^{-1} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} I_{n-k} & 0_{n-k,k} \\ 0_{n-k,k} & I_k x - B \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} I_{n-k} & 0_{n-k,k} \\ 0_{n-k,k} & Q_1^{-1}(x) \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Враховуючи рівності (4) і (5), отримуємо, що для матриці $A(x)$ існує зображення у вигляді добутку (3).

Теорему доведено. ♦

Із теореми 2 випливають такі твердження.

Наслідок 1. *Нехай унітальні многочлени* $a_1(x), a_2(x), \dots, a_k(x) \in F[x]$, $\deg a_i(x) = m_i \ge 1$, − *інваріантні многочлени неособливої матриці* $A(x) \in M_{n,n}(F[x])$. *Якщо* $\deg\det A(x) = n$, *то матриця* $A(x)$ *напівскалярно еквівалентна клітково-діагональній* $(n \times n)$*-матриці*

$$H_A(x) = \bigoplus_{i=1}^{k} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ x & x^2 & \cdots & x^{m_i} & a_i(x) \end{Vmatrix}$$

тоді й тільки тоді, коли матриця $A(x)$ *елементарними перетвореннями стовпчиків зводиться до матричної в'язки* $I_n x - B \in M_{n,n}(F[x])$, *тобто* $A(x)W(x) = I_n x - B$, *де* $W(x) \in GL(n, F[x])$. *Крім цього, матриця* $H_A(x)$ *перетвореннями напівскалярної еквівалентності визначена однозначно з точністю до перестановки блоків* $H_{a_i}(x)$.

Наслідок 2. *Нехай неособливі матриці* $A_1(x), A_2(x) \in M_{n,n}(F[x])$ *елементарними перетвореннями стовпчиків зводяться до унітальних матричних в'язок, тобто* $A_i(x)W_i(x) = I_n x - B_i$, *де* $W_i(x) \in GL(n, F[x])$, $i = 1, 2$. *Матриці* $A_1(x)$ *і* $A_2(x)$ *напівскалярно еквівалентні тоді й тільки тоді, коли* $A_1(x)$ *і* $A_2(x)$ *еквівалентні.*

Нагадаємо, що теорема 1 із [8] встановлює канонічну форму матричної в'язки $A_0 x - A_1 \in M_{n,n}(F[x])$ з неособливою матрицею A_0. В цьому зв'язку опишемо структуру неособливих матриць із $M_{n,n}(F[x])$, які перетвореннями напівскалярної еквівалентності зводяться до канонічної форми, яку встановлено в теоремі 1 із [8].

Теорема 3. *Нехай унітальні многочлени* $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_r(x) \in F[x]$, $\deg a_i(x) = m_i \ge 1$, − *елементарні дільники неособливої матриці* $A(x) \in$ $\in M_{n,n}(F[x])$. *Якщо* $\deg \det A(x) = k \le n$, *то матриця* $A(x)$ *напівскалярно еквівалентна клітково-діагональній* $(n \times n)$ *-матриці*

$$D(x) = I_{n-k} \bigoplus_{i=1}^{r} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ x & x^2 & \cdots & x^{m_i} & h_i(x) \end{Vmatrix}$$

тоді й тільки тоді, коли матриця $A(x)$ *допускає зображення у вигляді добутку*

$$A(x) = U \begin{Vmatrix} I_{n-k} & 0_{n-k,k} \\ 0_{k,n-k} & I_k x - B \end{Vmatrix} V(x),$$

де $U \in GL(n, F)$, $B \in M_{k,k}(F)$ *і* $V(x) \in GL(n, F[x])$.

Д о в е д е н н я цієї теореми аналогічне до доведення теореми 2. ♦

Зауважимо, що наведені вище результати можуть бути застосовані в теорії лінійних систем при обчисленні власних значень матриць (див. [10] та цитовану там літературу).

1. *Казимирский П. С., Билонога Д. М.* Полускалярная эквивалентность многочленных матриц с попарно взаимно простыми элементарными делителями // Докл. АН УССР. Сер. А. − 1990. − № 4. − С. 8–9.
2. *Казимирский П. С., Мельник О. М.* Решение вопроса полускалярной эквивалентности многочленных матриц с попарно различными характеристическими корнями // Докл. АН УССР. Сер. А. − 1988. − № 11. − С. 9–12.
3. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. − Київ: Наук. думка, 1981. − 224 с.
4. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. − Київ: Наук. думка, 1977. − С. 61–66.
5. *Ланкастер П.* Теория матриц. − Москва: Наука, 1982. − 272 с.
   Те саме: *Lancaster P.* Theory of matrices. − New York: Acad. Press, 1969. − 326 p.

6. *Прокіп В. М.* Канонічна форма відносно напівскалярної еквівалентності матричної в'язки з невиродженою першою матрицею // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 8. – С. 1435–1440.
   Те саме: *Prokip V. M.* Canonical form with respect to semiscalar equivalence for a matrix pencil with nonsingular first matrix // Ukr. Math. J. – 2012. – **63**, No. 8. – P. 1314–1320.
7. *Шаваровский Б. З.* О некоторых «ручных» и «диких» аспектах проблемы полускалярной эквивалентности многочленных матриц // Мат. заметки. – 2004. – **76**, № 1. – С. 119–132.
   Те саме: *Shavarovskii B. Z.* On some «tame» and «wild» aspects of the problem of semiscalar equivalence of polynomial matrices // Math. Notes. – 2004. – **76**, No. 1-2. – P. 111–123.
8. *Шаваровський Б. З.* Про напівскалярну та квазідіагональну еквівалентності матриць // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 10. – С. 1435–1440.
   Те саме: *Shavarovskii B. Z.* On semiscalar and quasidiagonal equivalences of matrices // Ukr. Math. J. – 2000. – **52**, No. 10. – P. 1638–1643.
9. *Dias da Silva J. A., Laffey T. J.* On simultaneous similarity of matrices and related questions // Linear Algebra and Appl. – 1999. – **291**. – P. 167–184.
10. *Dodig M.* Eigenvalues of partially prescribed matrices // Electron. J. Linear Algebra. – 2008. – **17**. – P. 316–332.

О НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛУСКАЛЯРНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МНОГОЧЛЕННЫХ МАТРИЦ НАД ПОЛЕМ

Для матричного пучка $A_0x - A_1$, где A_0 и A_1 – $(n \times n)$-матрицы над произвольным полем F и A_0 – неособенная матрица, установлена нормальная форма относительно полускалярной эквивалентности. Описана структура неособенных многочленных матриц над полем F, которые преобразованиями полускалярной эквивалентности приводятся к установленной форме.

ON NORMAL FORM WITH RESPECT TO SEMISCALAR EQUIVALENCE OF POLYNOMIAL MATRICES OVER A FIELD

For a matrix pencil $A_0x - A_1$, in which A_0 and A_1 are $(n \times n)$-matrices over arbitrary field F and A_0 is nonsingular matrix, a normal form with respect to semiscalar equivalence is established. The structure of nonsingular polynomial matrices over a field F which by semiscalar equivalence transformations are reduced to normal form is described.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
16.08.11