

**МЕТОД НЬЮТОНА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОБЕРНЕНОЇ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ**

*Розглядається матрична обернена задача на власні значення. Для чисельного розв'язання цієї задачі пропонується алгоритм на базі ітераційного процесу Ньютона, у якому для побудови якобіана використовується чисельна процедура обчислення точних похідних від детермінанта матриці.*

**Вступ.** Обернена матрична задача на власні значення – це задача реконструкції матриці (знаходження невідомих параметрів деякої матриці) за заданим скінченним набором спектральних даних (точок спектра). Спектральні дані, які беруть у цьому участь, можуть містити повну або лише часткову інформацію про власні значення або власні вектори. Метою оберненої задачі на власні значення є побудова матриці, яка зберігає деяку специфічну структуру, а також задані спектральні властивості.

Є два основні питання, пов'язані з будь-якою оберненою задачею на власні значення, – теоретичне питання про можливість розв'язання і практичне питання про її обчислення. Основні дослідження, пов'язані з розв'язністю, полягають у встановленні необхідних або достатніх умов, при яких обернена задача на власні значення має розв'язок. З іншого боку, основною проблемою при обчисленні є розробка процедури, за допомогою якої за наперед заданими спектральними даними матриці можна побудувати чисельно саму матрицю. Обидва ці питання є важливими і складними.

Існує значна кількість літератури стосовно умов існування і єдиності розв'язку для різних постановок матричної оберненої спектральної задачі, а також методи її розв'язування (див., наприклад, [1–3, 7, 9–13, 15], а також цитовану там літературу). У цій статті мова йде про чисельний алгоритм розв'язування оберненої задачі на власні значення за припущення, що розв'язок існує.

Отже, розглядаємо алгебраїчну обернену задачу на власні значення.

**Задача З** (Загальна обернена задача на власні значення.)

Нехай  $\mathbf{A}_i = \{a_{jk}^i\}$  – комплексні матриці,  $i = 0, \dots, n$ , і  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}^n$ .

Знайти такі параметри  $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{C}^n$ , що матриця

$$\mathbf{A}(p) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^n p_i \mathbf{A}_i$$

має власні значення  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Ця задача включає класичні часткові випадки *адитивної* та *мультиплікативної* оберненої задачі на власні значення.

**Задача А** (Адитивна обернена задача на власні значення.)

Нехай  $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$  – комплексна матриця і  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}^n$ . Знайти діагональну матрицю  $\mathbf{D} = \text{diag}(p_1, \dots, p_n)$ ,  $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{C}^n$ , таку, що матриця  $\mathbf{A} + \mathbf{D}$  має власні значення  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

**Задача М** (Мультиплікативна обернена задача на власні значення.)

Нехай  $\mathbf{A} = \{a_{jk}\}$  – комплексна матриця і  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}^n$ . Знайти діагональну матрицю  $\mathbf{D} = \text{diag}(p_1, \dots, p_n)$ ,  $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{C}^n$ , таку, що матриця  $\mathbf{AD}$  має власні значення  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

В. М. Кублановською [3] був запропонований алгоритм для *задачі З*, згідно з яким розв'язок задачі обчислюється як нуль функції

$$f(p) = \begin{bmatrix} \lambda_1(p) - \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n(p) - \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де  $\lambda_1(p) < \dots < \lambda_n(p)$  – власні значення матриці  $\mathbf{A}(p)$ , а  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  – задані власні значення.

Цей алгоритм ітераційного процесу Ньютона потребує на кожному кроці обчислення всіх власних значень і власних векторів матриці  $\mathbf{A}(p)$  з метою обчислення функціональної матриці  $f(p)$ .

У роботі [9] запропоновано ще один метод Ньютона для **задачі 3**, який обчислює нулі функції

$$F(p) = \begin{bmatrix} \det(\mathbf{A}(p) - \lambda_1 \mathbf{I}) \\ \vdots \\ \det(\mathbf{A}(p) - \lambda_n \mathbf{I}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

і вимагає на кожному кроці  $n$  обернень матриць  $(\mathbf{A}(p) - \lambda_i \mathbf{I})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

На основі аналізу проведених числових експериментів у [9] зазначено, що швидкість збіжності та затрати машинного часу алгоритмами, запропонованими у роботах [3] і [9], є приблизно однакові в багатьох випадках, але є приклади, коли тільки алгоритм, який обчислює нулі функції (2), знаходить розв'язок.

У цій роботі запропоновано ще один алгоритм методу Ньютона для **задачі 3**, який обчислює нулі функції (2), але не потребує обернення матриць і вимагає дещо меншу кількість машинного часу, а точніше – дещо меншу кількість операцій при тій самій швидкості збіжності, що й алгоритм роботи [9].

**Алгоритм ітераційного методу Ньютона розв'язування обернених задач на власні значення.** Нехай  $\lambda_i \neq \lambda_j$  для  $i \neq j$ , а

$$F(p) = \begin{bmatrix} \det(\mathbf{A}(p) - \lambda_1 \mathbf{I}) \\ \vdots \\ \det(\mathbf{A}(p) - \lambda_n \mathbf{I}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(p) \\ \vdots \\ F_n(p) \end{bmatrix}.$$

Вектор  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^\top \in \mathbb{C}^n$  є розв'язком **задачі 3** тоді й тільки тоді, коли  $F(p) = 0$ . Щоб належним чином застосувати ітераційний процес Ньютона до  $F$ , потрібні частинні похідні від  $F(p)$  за  $p_1, \dots, p_n$ :

$$g_{ij} = \frac{\partial F_i(p)}{\partial p_j}, \quad \mathbf{J}(p) = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^n.$$

У роботі [9] для обчислення цих похідних застосовується теорема про слід матриці [14].

**Теорема 1.** *Якщо елементи квадратної матриці  $\mathbf{B}(c)$  є диференційовними функціями за параметром  $c$ , тоді для будь-якого  $c$  для похідної детермінанта  $\det \mathbf{B}(c)$  матриці  $\mathbf{B}(c)$  справджується співвідношення*

$$\frac{d(\det \mathbf{B}(c))}{dc} = \text{tr} \left[ \text{adj}(\mathbf{B}(c)) \cdot \frac{d\mathbf{B}(c)}{dc} \right]$$

і, якщо  $\det \mathbf{B}(c)$  не перетворюється в нуль, то

$$\frac{d(\det \mathbf{B}(c))}{dc} = \det \mathbf{B}(c) \cdot \text{tr} \left[ \mathbf{B}^{-1}(c) \cdot \frac{d\mathbf{B}(c)}{dc} \right].$$

Тут  $\frac{d\mathbf{B}(c)}{dc} = \left( \frac{db_{ij}(c)}{dc} \right)$ .

З цієї теореми випливає, що, коли  $F_i(p) \neq 0$ , то

$$g_{ij}(p) = \frac{\partial F_i(p)}{\partial p_j} = F_i(p) \cdot \text{tr} \left[ (\mathbf{A}(p) - \lambda_i \mathbf{I})^{-1} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}(p) - \lambda_i \mathbf{I})}{\partial p_j} \right] =$$

$$= F_i(p) \cdot \text{tr} [(\mathbf{A}(p) - \lambda_i \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{A}_{ij}],$$

$$\mathbf{A}_{ij} = \frac{\partial (\mathbf{A}(p) - \lambda_i \mathbf{I})}{\partial p_j},$$

і метод Ньютона подається як

$$p^{(m+1)} = p^{(m)} - [\mathbf{J}(p^{(m)})]^{-1} F(p^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Оскільки матрицю  $\mathbf{J}(p)$  можна записати у вигляді

$$\mathbf{J}(p) = \text{diag}(F_1(p), F_2(p), \dots, F_n(p)) \cdot \mathbf{H}(p),$$

де

$$\mathbf{H}(p) = \text{tr} [(\mathbf{A}(p) - \lambda_i \mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{A}_{ij}], \quad (4)$$

то ітераційний процес (3) набуде вигляду

$$p^{(m+1)} = p^{(m)} - [\mathbf{H}(p^{(m)})]^{-1} e, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $e = (1, 1, \dots, 1)^\top$ ,  $p^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_n^{(0)})^\top$  – початкове наближення. Отже, алгоритм можна записати так.

---

#### Алгоритм 1

---

**Крок 1.** Задаємо початкове наближення  $p^{(0)}$ .

**Крок 2.** **for**  $m = 0, 1, 2, \dots$  до досягнення точності **do**.

**Крок 3.** Обчислюємо  $(\mathbf{A}(p^{(m)}) - \lambda_i \mathbf{I})$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Крок 4.** Обчислюємо  $(\mathbf{A}(p^{(m)}) - \lambda_i \mathbf{I})^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Крок 5.** Будуємо матрицю  $\mathbf{H}(p^{(m)})$ , використовуючи (4).

**Крок 6.** Обчислюємо  $p^{(m+1)}$ , розв'язуючи систему

$$\mathbf{H}(p^{(m)})(p^{(m+1)} - p^{(m)}) = -e.$$

**Крок 7.** **end for**  $m$ .

**Крок 8.** Кінець.

---

Цей алгоритм вимагає таких обчислювальних затрат:

Оскільки **Крок 3** виконується в усіх алгоритмах для розв'язування задачі (2), то кількість операцій множення для його виконання не будемо включати у загальні обчислювальні затрати. Відомо [8], що обчислення матриці  $(\mathbf{A}(p^{(m)}) - \lambda_i \mathbf{I})^{-1}$  (**Крок 4**) для кожного  $i$  вимагає  $(4/3)n^3$  операцій множення. Легко перевірити, що **Крок 5** для кожного  $i$  вимагає  $n^3$  операцій множення, а на **Кроці 6** необхідно  $(1/3)n^3$  операцій множення.

Таким чином, **алгоритм 1** вимагає

$$\frac{4}{3} \sum_{i=1}^n n^3 + n \sum_{i=1}^n n^3 + \frac{1}{3} n^3 = n^5 + \frac{4}{3} n^4 + \frac{1}{3} n^3$$

операцій множення на кожній ітерації.

У цій роботі для обчислення похідних детермінанта матриці використовуємо інший підхід, який ґрунтується на **LU**-розкладі матриці [5]:

**Теорема 2.** Якщо елементи квадратної матриці  $\mathbf{D}(\lambda)$  є диференційовними функціями за параметром  $\lambda$ , то для будь-якого  $\lambda$  для похідних детермінанта  $\det \mathbf{D}(\lambda) \equiv f(\lambda)$  матриці  $\mathbf{D}(\lambda)$  справджуються співвідношення

$$f'(\lambda) \equiv [\det \mathbf{D}(\lambda)]' = \sum_{k=1}^n v_{kk}(\lambda) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n u_{ii}(\lambda), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f''(\lambda) \equiv [\det \mathbf{D}(\lambda)]'' &= \\ &= \sum_{k=1}^n w_{kk}(\lambda) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n u_{ii}(\lambda) + \sum_{k=1}^n v_{kk}(\lambda) \left( \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n v_{jj}(\lambda) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k, \\ i \neq j}}^n u_{ii}(\lambda) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

де  $u_{ii}(\lambda)$ ,  $v_{ii}(\lambda)$  та  $w_{ii}(\lambda)$  – відповідно елементи верхніх трикутних матриць  $\mathbf{U}(\lambda)$ ,  $\mathbf{V}(\lambda)$  та  $\mathbf{W}(\lambda)$  у розкладах

$$\mathbf{D}(\lambda) = \mathbf{L}(\lambda)\mathbf{U}(\lambda), \quad (7)$$

$$\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{M}(\lambda)\mathbf{U}(\lambda) + \mathbf{L}(\lambda)\mathbf{V}(\lambda), \quad (8)$$

$$\mathbf{C}(\lambda) = \mathbf{N}(\lambda)\mathbf{U}(\lambda) + 2\mathbf{M}(\lambda)\mathbf{V}(\lambda) + \mathbf{L}(\lambda)\mathbf{W}(\lambda), \quad (9)$$

а  $\mathbf{L}(\lambda)$  – нижня трикутна матриця з одиничними діагональними елементами.

**Д о в е д е н н я.** Відомо, що матриця  $\mathbf{D}(\lambda)$  порядку  $n$ , у якої при будь-якому  $\lambda$  головні мінори всіх порядків від 1 до  $n-1$  відмінні від нуля, за допомогою  $\mathbf{LU}$ -розкладу може бути записана у вигляді (7), де  $\mathbf{L}(\lambda)$  – нижня трикутна матриця з одиничними діагональними елементами, а  $\mathbf{U}(\lambda)$  – верхня трикутна матриця. Тоді

$$f(\lambda) = \det \mathbf{L}(\lambda) \det \mathbf{U}(\lambda) = \prod_{i=1}^n u_{ii}(\lambda).$$

Оскільки елементи квадратної матриці  $\mathbf{D}(\lambda)$  (а, отже, й  $\mathbf{U}(\lambda)$ ) є диференційовними функціями за  $\lambda$ , то для будь-яких  $\lambda$  отримуємо, що

$$f'(\lambda) = \sum_{k=1}^n u'_{kk}(\lambda) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n u_{ii}(\lambda), \quad (10)$$

$$f''(\lambda) = \sum_{k=1}^n u''_{kk}(\lambda) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n u_{ii}(\lambda) + \sum_{k=1}^n u'_{kk}(\lambda) \left( \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n u'_{jj}(\lambda) \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k, \\ i \neq j}}^n u_{ii}(\lambda) \right). \quad (11)$$

Для знаходження значень  $u'_{ii}(\lambda)$ , продиференціювавши (7) за  $\lambda$ , отримуємо

$$\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{M}(\lambda)\mathbf{U}(\lambda) + \mathbf{L}(\lambda)\mathbf{V}(\lambda),$$

тобто розклад (8), де  $\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{D}'(\lambda)$ ,  $\mathbf{M}(\lambda) = \mathbf{L}'(\lambda)$ ,  $\mathbf{V}(\lambda) = \mathbf{U}'(\lambda)$ , а  $v_{ii}(\lambda) = u'_{ii}(\lambda)$  є елементами матриці  $\mathbf{V}(\lambda)$ . Тепер, диференціюючи останню рівність за  $\lambda$ , отримуємо (9), а саме:

$$\mathbf{C}(\lambda) = \mathbf{N}(\lambda)\mathbf{U}(\lambda) + 2\mathbf{M}(\lambda)\mathbf{V}(\lambda) + \mathbf{L}(\lambda)\mathbf{W}(\lambda),$$

де

$$\mathbf{C}(\lambda) = \mathbf{B}'(\lambda) = \mathbf{D}''(\lambda), \quad \mathbf{N}(\lambda) = \mathbf{M}'(\lambda), \quad \mathbf{W}(\lambda) = \mathbf{V}'(\lambda) = \mathbf{U}''(\lambda),$$

а  $w_{ii}(\lambda) = v'_{ii}(\lambda) = u''_{ii}(\lambda)$  є елементами матриці  $\mathbf{W}(\lambda)$ . Отже, з (8), (9) отримуємо (10), (11), тобто (5) і (6). Теорему доведено.  $\blacklozenge$

Таким чином, для обчислення  $f(\lambda_m)$ ,  $f'(\lambda_m)$  та  $f''(\lambda_m)$  необхідно при фіксованому  $\lambda = \lambda_m$  обчислити

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \mathbf{L}\mathbf{U}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{M}\mathbf{U} + \mathbf{L}\mathbf{V}, \\ \mathbf{C} &= \mathbf{N}\mathbf{U} + 2\mathbf{M}\mathbf{V} + \mathbf{L}\mathbf{W},\end{aligned}\tag{12}$$

звідки

$$\begin{aligned}f(\lambda_m) &= \prod_{i=1}^n u_{ii}, & f'(\lambda_m) &= \sum_{k=1}^n v_{kk} \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n u_{ii}, \\ f''(\lambda_m) &= \sum_{k=1}^n w_{kk} \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n u_{ii} + \sum_{k=1}^n v_{kk} \left( \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n v_{jj} \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k, \\ i \neq j}}^n u_{ii} \right).\end{aligned}\tag{13}$$

Елементи матриць у розкладах (12) можуть бути обчислені за допомогою рекурентних співвідношень,  $r = 1, 2, \dots, n$ :

$$\begin{aligned}u_{rk} &= d_{rk} - \sum_{j=1}^{r-1} \ell_{rj} u_{jk}, & k &= r, \dots, n, \\ \ell_{ir} &= \left( d_{ir} - \sum_{j=1}^{r-1} \ell_{ij} u_{jr} \right) \frac{1}{u_{rr}}, & i &= r+1, \dots, n, \\ v_{rk} &= b_{rk} - \sum_{j=1}^{r-1} (m_{rj} u_{jk} + \ell_{rj} v_{jk}), & k &= r, \dots, n, \\ m_{ir} &= \left[ b_{ir} - \sum_{j=1}^{r-1} (m_{ij} u_{jr} + \ell_{ij} v_{jr}) - \ell_{ir} v_{rr} \right] \frac{1}{u_{rr}}, & i &= r+1, \dots, n, \\ w_{rk} &= c_{rk} - \sum_{j=1}^{r-1} (n_{rj} u_{jk} + 2m_{rj} v_{jk} + \ell_{rj} w_{jk}), & k &= r, \dots, n, \\ n_{ir} &= \left[ c_{ir} - \sum_{j=1}^{r-1} (n_{ij} u_{jr} + 2m_{ij} v_{jr} + \ell_{ij} w_{jr}) - 2m_{ir} v_{rr} - \ell_{ir} w_{rr} \right] \frac{1}{u_{rr}}, \\ & & i &= r+1, \dots, n.\end{aligned}$$

Якщо деякі головні мінори порядку  $j \leq n-1$  матриці дорівнюють нулеві, то розклад (7) може не існувати або ж, якщо він існує, то він не є однозначним.

На практиці найкращий спосіб встановити можливість  $\mathbf{LU}$ -розкладу – це спробувати обчислити його. Може виникнути ситуація, коли  $u_{rr} = 0$  ( $r$  – порядок головного мінора матриці, який дорівнює нулеві). Щоб уникнути цього, в процесі розкладу застосовують низку перестановок рядків (і/або стовпців) матриці  $\mathbf{D}$  з вибором головного елемента. У цьому випадку розклади (12) запишуться у вигляді

$$\mathbf{P}\mathbf{D} = \mathbf{L}\mathbf{U},\tag{14}$$

$$\mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{M}\mathbf{U} + \mathbf{L}\mathbf{V},\tag{15}$$

$$\mathbf{P}\mathbf{C} = \mathbf{N}\mathbf{U} + 2\mathbf{M}\mathbf{V} + \mathbf{L}\mathbf{W},$$

де  $\mathbf{P}$  – матриця перестановок, причому  $\det \mathbf{P} = (-1)^q$ , де  $q$  – число перестановок (наприклад, рядків), і співвідношення (13) набудуть вигляду

$$f(\lambda_m) = (-1)^q \prod_{i=1}^n u_{ii}, \quad f'(\lambda_m) = (-1)^q \sum_{k=1}^n v_{kk} \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n u_{ii},$$

$$f''(\lambda_m) = (-1)^q \sum_{k=1}^n w_{kk} \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^n u_{ii} + (-1)^q \sum_{k=1}^n v_{kk} \left( \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n v_{jj} \prod_{\substack{i=1, \\ i \neq k, i \neq j}}^n u_{ii} \right). \quad (16)$$

Отже, нехай відоме деяке наближення  $p^{(m)} = (p_1^{(m)}, p_2^{(m)}, \dots, p_n^{(m)})$ . Тоді, враховуючи останні співвідношення, ітераційний процес методу Ньютона знаходження нулів функції (2) набуде вигляду

$$p^{(m+1)} = p^{(m)} - [\mathbf{J}(p^{(m)})]^{-1} F(p^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

з матрицею

$$\mathbf{J}(p^{(m)}) = \text{matr} \left\{ \frac{\partial f_i(p^{(m)})}{\partial p_j} \right\}_{i,j}^n$$

та вектором

$$F(p^{(m)}) = (f_1(p^{(m)}), f_2(p^{(m)}), \dots, f_n(p^{(m)})),$$

де

$$f_i(p^{(m)}) = \det(\mathbf{A}(p^{(m)}) - \lambda_i \mathbf{I}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким чином, алгоритм можна записати у такому вигляді.

---

### Алгоритм 2

---

**Крок 1.** Задаємо початкове наближення  $p^{(0)}$ .

**Крок 2.** **for**  $m = 0, 1, 2, \dots$  до досягнення точності **do**.

**Крок 3.** Обчислюємо  $(\mathbf{A}(p^{(m)}) - \lambda_i \mathbf{I})$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Крок 4.** Обчислюємо  $\mathbf{LU}$ -розклади (14), (15) та  $f_i(p^{(m)})$  і  $\frac{\partial f_i(p^{(m)})}{\partial p_j}$  за (16).

**Крок 5.** Формуємо матрицю  $\mathbf{J}(p^{(m)})$  і вектор  $F(p^{(m)})$ .

**Крок 6.** Обчислюємо  $p^{(m+1)}$ , розв'язуючи систему

$$\mathbf{J}(p^{(m)})(p^{(m+1)} - p^{(m)}) = -F(p^{(m)}).$$

**Крок 7.** **end for**  $m$ .

**Крок 8.** Кінець.

---

Запропонований **алгоритм 2** вимагає таких обчислювальних затрат.

Як уже зазначалося, обчислювальні затрати на **Кроці 3 алгоритму 2** є ті ж самі, що й **алгоритму 1**, тому їх не включаємо у загальні затрати. Отже, обчислювальні затрати (кількість операцій множення) при обчисленні детермінанта та однієї частинної похідної (16) з використанням розкладів (14), (15) становлять:

- для отримання розкладу (14), (15) -  $n^3 - n$  операцій,
- для обчислення детермінанта та похідної від детермінанта матриці -  $n^3 + n^2 - n$  операцій.

Тому для формування матриці  $\mathbf{J}(p^{(m)})$  і вектора  $F(p^{(m)})$  необхідно  $n^5 + n^4 - n^3$  операцій множення. **Крок 6**, як і в **алгоритмі 1**, вимагає  $(1/3)n^3$  операцій множення.

Отже, загальні обчислювальні затрати становлять  $n^5 + n^4 - \frac{2}{3}n^3$  операцій множення на кожній ітерації, що є дещо меншим від кількості операцій **алгоритму 1**.

Якщо матриця  $\mathbf{J}(p^{(m)})$  є невідродженою, то **алгоритм 2**, як і **алгоритм 1**, є локально квадратично збіжним. Це впливає з теореми про збіжність методу Ньютона (див., наприклад, [4]).

**Теорема 3.** *Нехай задача (2) має власне значення  $p^*$  і матриця  $\mathbf{J}(p^*)$  є неособливою. Тоді існує такий окіл  $N(p^*)$  власного значення  $p^*$ , що для всіх  $p^{(0)} \in N(p^*)$  ітераційний процес **алгоритму 2** збігається до власного значення  $p^*$  квадратично.*

1. *Валеев Н. Ф.* Регулярные решения многопараметрической обратной спектральной задачи // Мат. заметки. – 2009. – **85**, № 6. – С. 940–943.  
Te same: *Valeev N. F.* Regular solutions of a multiparameter inverse spectral problem // Math. Notes. – 2009. – **85**, No. 5-6. – P. 890–893.
2. *Гладвилл Г. М. Л.* Обратные задачи теории колебаний. – Москва–Ижевск: Изд-во НИИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 610 с.  
Te same: *Graham M. L. Gladwell* Inverse problems in vibration. – New York: Kluwer Acad. Publ., 2005.
3. *Кублановская В. Н.* Об одном подходе к решению обратной проблемы собственных значений // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. – 1970. – **18**. – С. 138–149.
4. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – Москва: Мир, 1975. – 558 с.  
Te same: *Ortega J., Reinboldt W.* Iterative solution of nonlinear equations in several variables. – New York: Acad. Press, 1970.
5. *Подлевский Б. М.* О некоторых двусторонних аналогах метода Ньютона решения нелинейной спектральной задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2007. – **47**, № 11. – С. 1819–1829.  
Te same: *Podlevskii B. M.* On certain two-sided analogues of Newton's method for solving nonlinear eigenvalue problems // Comput. Math. Math. Phys. – 2007. – **47**, No. 11. – P. 1745–1755.
6. *Подлевский Б. М.* О применении метода Ньютона к нахождению собственных значений некоторых двухпараметрических (многопараметрических) спектральных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2008. – **48**, № 12. – С. 2107–2112.  
Te same: *Podlevskii B. M.* Newton's method as a tool for finding the eigenvalues of certain two-parameter (multiparameter) spectral problems // Comput. Math. Math. Phys. – 2008. – **48**, No. 12. – P. 2140–2145.
7. *Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Валеев Н. Ф.* Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения // Докл. РАН. – 2009. – **426**, № 4. – С. 457–460.
8. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – Москва: Мир, 1989. – 655 с.  
Te same: *Horn R. A., Jonson Ch. R.* Matrix analysis. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.
9. *Biegler-Konig F. W.* A Newton iteration process for inverse eigenvalue problems // Numer. Math. – 1981. – **37**, No. 3. – P. 349–354.
10. *Biegler-Konig F. W.* Sufficient conditions for the solubility of inverse eigenvalue problems // Linear Algebra Appl. – 1981. – **40**. – P. 89–100.
11. *Dai H., Lancaster P.* Numerical method for finding multiple eigenvalues of matrices depending on parameters // Numer. Math. – 1997. – **76**, No. 2. – P. 189–208.
12. *Friedland S.* Inverse eigenvalue problems // Linear Algebra Appl. – 1977. – **17**, No. 1. – P. 15–51.
13. *Friedland S., Nocedal J., Overton M. L.* The formulation and analysis of numerical methods for inverse eigenvalue problems // SIAM J. Numer. Anal. – 1987. – **24**, No. 3. – P. 634–667.
14. *Lancaster P.* Lambda-matrices and vibrating systems. – New York: Dover Publ., 2002. – 208 p.
15. *Li L. L.* Sufficient conditions for the solvability of algebraic inverse eigenvalue problems // Linear Algebra Appl. – 1995. – **221**. – P. 117–129.

## МЕТОД НЬЮТОНА РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

*Рассматривается матричная обратная задача на собственные значения. Для численного решения этой задачи предлагается алгоритм на основании итерационного процесса Ньютона в котором для построения якобиана используется численная процедура вычисления точных производных детерминанта матрицы.*

## NEWTON'S METHOD FOR SOLVING THE INVERSE SPECTRAL PROBLEM

*The matrix inverse eigenvalues problem is considered. For numerical solution of this problem an algorithm based on Newton's iterative process is proposed. In this iterative process, a numerical procedure of calculating exact derivatives of the matrix determinant to construct the Jacobian is used.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
07.12.11