УДК 519.46: 517.944

В. І. Федорчук

ПРО ЧАСТКОВУ ПОПЕРЕДНЮ ГРУПОВУ КЛАСИФІКАЦІЮ НЕЛІНІЙНОГО П'ЯТИВИМІРНОГО РІВНЯННЯ Д'АЛАМБЕРА

З використанням неспряжених підгруп групи Пуанкаре $P(1,4)$ проведено часткову попередню групову класифікацію нелінійного п'ятивимірного рівняння Д'Аламбера. Наведено короткий огляд отриманих результатів.

На сьогодні опубліковано багато наукових праць, присвячених груповій класифікації диференціальних рівнянь, які широко використовуються в теоретичній і математичній фізиці, механіці, газовій динаміці тощо. З деталями стосовно цього питання можна ознайомитись у [4, 7, 8, 13–15, 17, 20, 24–33] (див. також цитовану там літературу).

Започаткована ця тематика у 1881 р. працею S. Lie [26], у якій була розв'язана проблема групової класифікації лінійного двовимірного рівняння гіперболічного типу.

Л. В. Овсянніков в [7] запропонував регулярний метод для класифікації диференціальних рівнянь з нетривіальною симетрією і провів повну групову класифікацію класу рівнянь нелінійної теплопровідності.

Лінійні та нелінійні рівняння Д'Аламбера в просторах різних розмірностей використовуються при розв'язуванні різних задач диференціальної геометрії, теорії нелінійних хвиль, теоретичної і математичної фізики (див., наприклад, [1–3, 5, 6, 18, 21–23]).

Ця праця присвячена попередній груповій класифікації певного класу нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера в просторі $M(1,4)\times R(u)$ з використанням неспряжених підгруп [9, 10, 19] групи Пуанкаре $P(1,4)$. Тут і надалі $M(1,4)$ – п'ятивимірний простір Мінковського, $R(u)$ – дійсна вісь змінної u.

1. Алгебра Лі групи $P(1,4)$. Група Пуанкаре $P(1,4)$ є групою поворотів і зсувів простору $M(1,4)$. Вона використовується при розгляді різних задач теоретичної і математичної фізики (див., наприклад, [6, 12]).

Алгебра Лі групи $P(1,4)$ задається 15 базисними елементами $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$, $\mu, \nu = 0,1,2,3,4$, і P'_μ, $\mu = 0,1,2,3,4$, які задовольняють комутаційні співвідношення

$$[P'_\mu, P'_\nu] = 0,$$

$$[M'_{\mu\nu}, P'_\sigma] = g_{\mu\sigma}P'_\nu - g_{\nu\sigma}P'_\mu,$$

$$[M'_{\mu\nu}, M'_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}M'_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M'_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M'_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M'_{\nu\rho},$$

де $g_{\mu\nu}$, $\mu,\nu = 0,1,2,3,4$, – метричний тензор з компонентами $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$ і $g_{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$. Тут і надалі $M'_{\mu\nu} = iM_{\mu\nu}$.

У цій роботі розглядатимемо таке зображення для алгебри Лі групи $P(1,4)$:

$$P'_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad P'_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad P'_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$P'_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad P'_4 = -\frac{\partial}{\partial x_4}, \qquad M'_{\mu\nu} = -(x_\mu P'_\nu - x_\nu P'_\mu).$$

Надалі перейдемо від $M'_{\mu\nu}$ і P'_{μ} до таких лінійних комбінацій:

$$G = M'_{40}, \qquad L_1 = M'_{32}, \qquad L_2 = -M'_{31}, \qquad L_3 = M'_{21},$$

$$P_a = M'_{4a} - M'_{a0}, \qquad C_a = M'_{4a} + M'_{a0}, \qquad a = 1, 2, 3,$$

$$X_0 = \frac{P'_0 - P'_4}{2}, \qquad X_k = P'_k, \qquad k = 1, 2, 3, \qquad X_4 = \frac{P'_0 + P'_4}{2}.$$

2. Попередня групова класифікація нелінійного п'ятивимірного рівняння Д'Аламбера. Розглянемо клас нелінійних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера вигляду

$$\Box_5 u = F(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, u, u_0, u_1, u_2, u_3, u_4), \tag{1}$$

де $\Box_5 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_4^2}$ – оператор Д'Аламбера в просторі $M(1,4)$; F – довільна гладка функція, $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$; $u_\mu = \dfrac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$.

Метою цієї праці є попередня групова класифікація класу рівнянь (1).

Кожне перетворення з конформної групи $C(1,4)$ простору $M(1,4)$ належить до групи еквівалентності класу (1). Для попередньої групової класифікації обмежимося підгрупою $P(1,4)$ групи $C(1,4)$: використаємо *неспряжені підалгебри* [9, 10, 19] алгебри Лі групи $P(1,4)$ (спряження розглядаємо відносно групи $P(1,4)$) та *нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку* [11, 16] цих підалгебр.

На сьогодні описані класи рівнянь вигляду (1), інваріантні відносно всіх неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Неспряжені підгрупи групи $P(1,4)$ мають нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку розмірностей $2, 3 \ldots, 10$. Побудовані класи рівнянь можна записати у такому вигляді:

$$\Box_5 u = \Phi(J_1, J_2, \ldots, J_{t_1}), \tag{2}$$

де Φ – довільна гладка функція, $\{J_1, J_2, \ldots, J_{t_1}\}$, $t_1 = 2, 3, \ldots, 10$, – нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$.

Наводимо короткий огляд отриманих результатів.

Існує один *двовимірний* нееквівалентний функціональний базис диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Йому відповідає клас рівнянь вигляду (2). Нижче для цього класу наведемо базисні елементи відповідної йому неспряженої підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ та побудований клас рівнянь

$$\langle G, C_1, C_2, C_3, L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle:$$

$$\Box_5 u = \Phi(u, u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2),$$

$$u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Існує 7 *тривимірних* нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Їм відповідає 7 класів рівнянь виду (2). Нижче для деяких з цих класів наведемо базисні елементи відповідних їм неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ та побудовані класи рівнянь

1. $\langle G, P_3, C_3, L_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi(u, u_1^2 + u_2^2, u_0^2 - u_3^2 - u_4^2),$$

2. $\langle G, L_3, P_1, P_2, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi(u, u_3, u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2),$$

3. $\langle G, L_1, L_2, L_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi(u, u_0^2 - u_4^2, u_1^2 + u_2^2 + u_3^2),$$

4. $\langle L_1, L_2, L_3, P_1 - C_1, P_2 - C_2, P_3 - C_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi(u, u_4, u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2),$$

5. $\langle L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi(u, u_0 - u_4, u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2).$$

Існує 23 *чотиривимірні* нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Їм відповідає 23 класи рівнянь вигляду (2). Нижче для деяких з цих класів, наведемо базисні елементи відповідних їм неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ та побудовані класи рівнянь

1. $\langle G, P_3, L_3, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi\left(u, \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}, u_1^2 + u_2^2, u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\right),$$

2. $\langle G, L_1, L_2, L_3, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi(u, (x_0 + x_4)(u_0 + u_4), u_0^2 - u_4^2, u_1^2 + u_2^2 + u_3^2),$$

3. $\langle G, C_1, C_2, C_3, L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi((x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2}, u, u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2,$$
$$x_0 u_0 + x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4),$$

4. $\langle P_3 + X_0, P_2, P_3, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi(u, u_1 + (x_0 + x_4)(u_0 - u_4), u_0 - u_4, u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2),$$

5. $\langle L_3, P_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi(u, u_0 - u_4, u_1^2 + u_2^2, u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2).$$

Існує 62 *п'ятивимірні* нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Їм відповідає 62 класи рівнянь виду (2). Нижче для деяких з цих класів наведемо базисні елементи відповідних їм неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ та побудовані класи рівнянь

1. $\langle G, L_1, L_2, L_3, X_0, X_4 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}, u, x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3, u_0^2 - u_4^2, u_1^2 + u_2^2 + u_3^2),$$

2. $\langle P_3 + C_3 + eL_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, e > 2 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi\left(u, u_0, u_1^2 + u_2^2, u_3^2 + u_4^2, 2\arctan\frac{u_1}{u_2} - e\arctan\frac{u_3}{u_4}\right),$$

3. $\langle G + a_3 X_3, L_3, P_3, X_1, X_2, X_4, a_3 < 0 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi\left(u, \frac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4}, u_0^2 - u_3^2 - u_4^2, u_1^2 + u_2^2, x_3 - a_3 \ln(x_0 + x_4) + u_3 \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}\right),$$

4. $\langle P_1 + X_3, P_2, P_3, X_1, X_2, X_4 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi(x_0 + x_4, u, u_1 - (u_0 - u_4)x_3 - (x_0 + x_4)u_3, u_0 - u_4, u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2),$$

5. $\langle G, P_3, C_3, L_3, X_1, X_2 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi((x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2}, u, x_0 u_0 + x_3 u_3 + x_4 u_4, u_1^2 + u_2^2, u_0^2 - u_3^2 - u_4^2).$$

Існує 108 *шестивимірних* нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Їм відповідає 108 класів рівнянь виду (2). Нижче для деяких з цих класів наведемо базисні елементи відповідних їм неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ та побудовані класи рівнянь.

1. $\langle L_3 + eG, P_3, X_1, X_2, X_4, e > 0 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi\left(u, \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}, \frac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_3 + u_3, e\arctan\frac{u_1}{u_2} + \ln(x_0 + x_4), u_1^2 + u_2^2, u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\right),$$

2. $\langle G, P_3, C_3, X_1, X_2 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi((x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2}, u, x_0 u_0 + x_3 u_3 + x_4 u_4, u_1, u_2, u_0^2 - u_3^2 - u_4^2),$$

3. $\langle G + a_3 X_3, P_1, P_2, X_1, X_4, \ a_3 < 0 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi\left(x_3 - a_3 \ln(x_0 + x_4), u, \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}, \frac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_2 + u_2, u_3, u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2\right),$$

4. $\langle P_3 + C_3 + 2L_3 + \alpha(X_0 + X_4),\, X_1,\, X_2,\, X_3,\, X_0 - X_4,\, \alpha < 0\rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi\left(u,\, \alpha \arctan\frac{u_3}{u_4} - 2x_0,\, u_0,\, u_1^2 + u_2^2,\, u_3^2 + u_4^2,\, u_1 u_4 - u_2 u_3\right),$$

5. $\langle P_1,\, P_2,\, P_3,\, X_1,\, X_4\rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi\left(x_0 + x_4,\, u,\, \frac{x_2}{x_0 + x_4} + \frac{u_2}{u_0 - u_4},\, \frac{x_3}{x_0 + x_4} + \frac{u_3}{u_0 - u_4},\right.$$

$$\left. u_0 - u_4,\, u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\right).$$

Існує 136 *семивимірних* нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Їм відповідає 136 класів рівнянь виду (2). Нижче для деяких з цих класів наведемо базисні елементи відповідних їм неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ та побудовані класи рівнянь

1. $\langle G,\, L_1,\, L_2,\, L_3\rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi((x_0^2 - x_4^2)^{1/2},\, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2},\, u,\, x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3,$$

$$(x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\, u_0^2 - u_4^2,\, u_1^2 + u_2^2 + u_3^2),$$

2. $\langle L_3 + eG,\, X_1,\, X_2,\, X_3,\, e > 0\rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi\left((x_0^2 - x_4^2)^{1/2},\, u,\, (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),\, u_3,\, u_0^2 - u_4^2,\, u_1^2 + u_2^2,\right.$$

$$\left. e \arctan\frac{u_1}{u_2} - \ln(u_0 + u_4)\right),$$

3. $\langle G,\, P_3,\, C_3,\, L_3\rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi((x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\, (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\, u,\, x_1 u_2 - x_2 u_1,$$

$$x_0 u_0 + x_3 u_3 + x_4 u_4,\, u_1^2 + u_2^2,\;\; u_0^2 - u_3^2 - u_4^2),$$

4. $\left\langle L_1 + \frac{1}{2}(P_1 + C_1),\, L_2 + \frac{1}{2}(P_2 + C_2),\, L_3 + \frac{1}{2}(P_3 + C_3),\, L_3 - \frac{1}{2}(P_3 + C_3)\right\rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi(x_0,\, u,\, u_0,\, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2},\, x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4,$$

$$x_1 u_2 - x_2 u_1 + x_4 u_3 - x_3 u_4,\, u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2),$$

5. $\langle G,\, P_1,\, P_2,\, P_3\rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi\left((x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\, u,\, \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\, x_1 + \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_1,\right.$$

$$\left. x_2 + \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_2,\, x_3 + \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4} u_3,\, u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2\right).$$

Існує 89 *восъмивимірних* нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Їм відповідає 89 класів рівнянь виду (2). Нижче для деяких з цих класів наведемо базисні елементи відповідних їм неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ та побудовані класи рівнянь

1. $\langle G, P_3, L_3 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi\left((x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2}, u, x_1u_2 - x_2u_1, \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},\right.$$

$$\left.\frac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_3 + u_3, u_1^2 + u_2^2, u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\right),$$

2. $\langle L_3 + eG, P_3, X_4, e > 0 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi\left((x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, u, x_1u_2 - x_2u_1, \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}, \frac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_3 + u_3,\right.$$

$$\left.d \arctan \frac{u_1}{u_2} + \ln(x_0 + x_4), u_1^2 + u_2^2, u_0^2 - u_3^2 - u_4^2\right),$$

3. $\langle P_3 + C_3, L_3, X_0 + X_4 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi((x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}, u, x_1u_2 - x_2u_1, x_3u_4 - x_4u_3,$$

$$u_0, u_1^2 + u_2^2, u_3^2 + u_4^2),$$

4. $\langle P_3 + C_3 + eL_3, X_1, X_2, e > 2 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi\left(x_0, (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}, u, x_3u_4 - x_4u_3, e \arctan \frac{x_3}{x_4} - 2 \arctan \frac{u_1}{u_2},\right.$$

$$\left.u_0, u_1^2 + u_2^2, u_3^2 + u_4^2\right),$$

5. $\langle G, L_3, X_3 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi((x_0^2 - x_4^2)^{1/2}, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, u, x_1u_2 - x_2u_1, (x_0 + x_4)(u_0 + u_4),$$

$$u_3, u_0^2 - u_4^2, u_1^2 + u_2^2).$$

Існує 49 *дев'ятивимірних* нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Їм відповідає 49 класів рівнянь виду (2). Нижче для деяких з цих класів наведемо базисні елементи, відповідних їм неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ та побудовані класи рівнянь.

1. $\langle P_1, P_2 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi(x_3, x_0 + x_4, (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2}, u,$$

$$u_1(x_0 + x_4) + x_1(u_0 - u_4), u_2(x_0 + x_4) + x_2(u_0 - u_4),$$

$$u_3, u_0 - u_4, u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2),$$

2. $\langle P_3 + C_3 + 2L_3, X_0 + X_4 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi((x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}, x_1x_4 - x_2x_3, u, x_1u_2 - x_2u_1,$$

$$x_3u_4 - x_4u_3, u_0, u_1^2 + u_2^2, u_3^2 + u_4^2),$$

3. $\langle L_3 - P_3, X_4 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi\left(x_0 + x_4, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \arctan\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_0 + x_4}, u, x_1u_2 - x_2u_1, \right.$$

$$\left. \frac{x_3}{x_0 + x_4} + \frac{u_3}{u_0 - u_4}, u_0 - u_4, u_1^2 + u_2^2, u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 \right),$$

4. $\langle L_3, P_3 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi(x_0 + x_4, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2}, u, x_1u_2 - x_2u_1,$$

$$(x_0 + x_4)u_3 + (u_0 - u_4)x_3, u_0 - u_4, u_1^2 + u_2^2, u_0^2 - u_3^2 - u_4^2),$$

5. $\langle G, P_3 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi\left(x_1, x_2, (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2}, u, \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}, \frac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_3 + u_3, \right.$$

$$\left. u_1, u_2, u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 \right).$$

Існує 20 *десятивимірних* нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених підгруп групи $P(1,4)$. Їм відповідає 20 класів рівнянь виду (2). Нижче для деяких з цих класів наведемо базисні елементи відповідних їм неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ та побудовані класи рівнянь.

1. $\langle L_3 + eG, e > 0 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi\left(x_3, (x_0^2 - x_4^2)^{1/2}, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \ln(x_0 + x_4) + e \arctan\frac{x_1}{x_2}, \right.$$

$$\left. u, (x_0 + x_4)(u_0 + u_4), x_1u_2 - x_2u_1, u_3, u_0^2 - u_4^2, u_1^2 + u_2^2 \right),$$

2. $\langle P_3 + C_3 + eL_3, e > 2 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi\left(x_0, (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}, 2\arctan\frac{x_1}{x_2} - e\arctan\frac{x_3}{x_4}, u, \right.$$

$$\left. x_1u_2 - x_2u_1, x_3u_4 - x_4u_3, u_0, u_1^2 + u_2^2, u_3^2 + u_4^2 \right),$$

3. $\langle P_3 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi(x_1, x_2, x_0 + x_4, (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2}, u, u_0 - u_4,$$

$$(x_0 + x_4)u_3 + (u_0 - u_4)x_3, u_1, u_2, u_0^2 - u_3^2 - u_4^2),$$

4. $\langle G \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi(x_1, x_2, x_3, (x_0^2 - x_4^2)^{1/2}, u, (x_0 + x_4)(u_0 + u_4), u_1,$$

$$u_2, u_3, u_0^2 - u_4^2),$$

5. $\langle L_3 - P_3 + \alpha_0 X_0, \alpha_0 < 0 \rangle$:

$$\Box_5 u = \Phi\left((x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, (x_0 + x_4)^2 + 2\alpha_0 x_3, \alpha_0 \arctan\frac{x_1}{x_2} - x_0 - x_4, \right.$$

$$2(x_0 + x_4)^3 + 6\alpha_0 x_3(x_0 + x_4) + 3\alpha_0^2(x_0 - x_4), u, x_1u_2 - x_2u_1,$$

$$\left. x_0 + x_4 - \alpha_0 \frac{u_3}{u_0 - u_4}, u_0 - u_4, u_1^2 + u_2^2, u_0^2 - u_3^2 - u_4^2 \right).$$

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. – Москва: Мир, 1987. – 480 с.
   Ablowitz M. J., Segur H. Solitons and the inverse scattering transform. – Philadelphia, 1981. – 425 p. – SIAM Studies in Appl. Math., Vol. 4.
2. *Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.* Модель релятивистской струны в физике адронов. – Москва: Энергоатомиздат, 1987. – 176 с.
   Barbashov B. M., Nesterenko V. V. Introduction to the relativistic string theory. – Singapore: World Sci., 1990. – 249 p.
3. *Бхатнагар П. Л.* Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. – Москва: Мир, 1983. – 136 с.
   Bhatnagar P. L. Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems. – Oxford: Clarendon Press, 1979. – xii + 142 p.
4. *Дородницын В. А., Князева И. В., Свирщевский С. Р.* Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**, № 7. – С. 1215–1224.
5. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. – Москва: Наука, 1980. – 324 с.
   Novikov S. P., Manakov S. V., Pitaevskii L. P., Zakharov V. E. Theory of solitons: The inverse scattering method. – New York: Consultants Bureau, 1984. – 276 p.
6. *Кадышевский В. Г.* Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1980. – **11**, № 1. – С. 5–39.
7. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. – 1959. – **125,** № 3. – С. 492–495.
8. *Попович Р. О., Єгорченко І. А.* Групова класифікація узагальнених рівнянь ейконала // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 11. – С. 1513–1520.
   Те саме: *Popovych R. O., Ehorchenko I. A.* Group classification of generalized eikonal equations // Ukr. Math. J. – 2001. – **53**, No. 11. – P. 1841–1850.
9. *Федорчук В. М.* Нерасщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 5. – С. 696–700.
   Те саме: *Fedorchuk V. M.* Nonsplit subalgebras of the Lie algebra of the generalized Poincaré group $P(1,4)$ // Ukr. Math. J. – 1981. – **33**, No. 5. – P. 535–538.
10. *Федорчук В. М.* Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 6. – С. 717–722.
    Те саме: *Fedorchuk V. M.* Splitting subalgebras of the lie algebra of the generalized Poincaré group $P(1,4)$ // Ukr. Math. J. – 1979. – **31**, No. 6. – P. 554–558.
11. *Федорчук В. М., Федорчук В. І.* Про функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неперервних підгруп групи Пуанкаре $P(1,4)$ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 4. – С. 51–58.
12. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений квантовой механики. – Москва: Наука, 1990. – 400 с.
    Те саме: *Fushchych W. I., Nikitin A. G.* Symmetries of equations of quantum mechanics. – New York: Allerton Press Inc., 1994. – 465 p.
13. *Хабиров С. В.* Свойство определяющих уравнений алгебры в задаче групповой классификации волновых уравнений // Сиб. мат. журн. – 2009. – **50**, № 3. – С. 647–668.
    Те саме: *Khabirov S. V.* A property of the defining equations for the Lie algebra in the group classification problem for wave equations // Sib. Math. J. – 2009. – **50**, No. 3. – P. 515–532.
14. *Ames W. F., Lohner R. J., Adams E.* Group properties of $u_{tt} = [F(u)u_x]_x$ // Int. J. Non-Linear Mech. – 1981. – **16**, No. 5-6. – P. 439–447.
15. *Andriopoulos K., Dimas S., Leach P. G. L., Tsoubelis D.* On the systematic approach to the classification of differential equations by group theoretical methods // J. Comput. Appl. Math. – 2009. – **230**, No. 1. – P. 224–232.
16. *Fedorchuk V. M., Fedorchuk V. I.* On first-order differential invariants of the non-conjugate subgroups of the Poincare group $P(1,4)$ // Differential Geometry and its Applications: Proc. 10th Int. Conf. on DGA 2007, in Honour of Leonhard Euler (Olomouc, Czech Republic, 27-31 Aug. 2007). – World Sci. Publ., 2008. – P. 431–444.
17. *Fushchich W. I., Cherniha R. M.* The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1985. – **18**, No. 18. – P. 3491–3503.

18. *Fushchich W. I., Serov N. I.* The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1983. – **16**. – P. 3645 –3658.
19. *Fushchich W. I., Barannik A. F., Barannik L. F., Fedorchuk V. M.* Continuous subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$ // J. Phys. A: Math. Gen. – 1985. – **18**, No. 15. – P. 2893–2899.
20. *Gandarias M. L., Ibragimov N. H.* Equivalence group of a fourth-order evolution equation unifying various non-linear models // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2008. – **13**, No. 2. – P. 259–268.
21. *Grundland A. M., Harnad J., Winternitz P.* Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations // J. Math. Phys. – 1984. – **25**, No. 4. – P. 791–806.
22. *Grundland A. M., Tuszyński J. A., Winternitz P.* Applications of the three-dimensional "φ^6"-model to structural phase transitions // Proc. XV-th Int. Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics (Philadelphia, PA, 1986). – Teaneck (NJ): World Sci. Publ., 1987. – P. 589–601.
23. *Grundland A. M., Tuszyński J. A., Winternitz P.* Group theory and solutions of classical field theories with polynomial nonlinearities // Found. Phys. – 1993. – **23**, No. 4. – P. 633–665.
24. *Heredero Rafael Hernández* [*Hernández Heredero Rafael*], *Olver P. J.* Classification of invariant wave equations // J. Math. Phys. – 1996. – **37**, No. 12. – P. 6414–6438.
25. *Juráš M.* Some classification results for hyperbolic equations $F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0$ // J. Differ. Equations. – 2000. – **164**, No. 2. – P. 296–320.
26. *Lie S.* Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linearer partieller Differentialgleichungen // Arch. for Math. – 1881. – **6**, H. 3. – P. 328–368.
27. *Meleshko S. V., Moyo S.* On the complete group classification of the reaction-diffusion equation with a delay // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – **338**, No. 1. – P. 448–466.
28. *Nikitin A. G.* Group classification of systems and non-linear reaction-diffusion equations // Укр. мат. вісн. – 2005. – **2**, № 2. – С. 149–200.
29. *Olver P. J.* Differential invariants and invariant differential equations // Modern Group Analysis V: Theory and Appl. in Math. Model: Proc. Int. Conf. on Modern Group Analysis V (Johannesburg, South Africa, Jan., 16–22, 1994). Lie Groups and Their Applications. – 1994. – Vol. 1, Is. 1. – P. 177–192.
30. *Pucci E., Salvatori M. C.* Group properties of a class of semilinear hyperbolic equations // Int. J. Non-Linear Mech. – 1986. – **21**, No. 2. – P. 147–155.
31. *Rideau G., Winternitz P.* Evolution equations invariant under two-dimensional space-time Schrödinger group // J. Math. Phys. – 1993. – **34**, No. 2. – P. 558–570.
32. *Sheftel M. B., Malykh A. A.* On classification of second-order PDEs possessing partner symmetries // J. Phys. A. – 2009. – **42**, No. 39. – 20 pp.
33. *Sophocleous C., Tracina R.* Differential invariants for quasi-linear and semi-linear wave-type equations // Appl. Math. Comput. – 2008. – **202**, No. 1. – P. 216–228.

О ЧАСТИЧНОЙ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ГРУППОВОЙ КЛАССИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНОГО ПЯТИМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ Д'АЛАМБЕРА

С использованием несопряженных подгрупп группы Пуанкаре $P(1,4)$ выполнена частичная предварительная групповая классификация нелинейного пятимерного уравнения Д'Аламбера. Представлен краткий обзор полученных результатов.

ON PARTIAL PRELIMINARY GROUP CLASSIFICATION OF NON-LINEAR FIVE-DIMENSIONAL D'ALLEMBERT EQUATION

Using the non-conjugate subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$ the partial preliminary group classification of non-linear five-dimensional d'Allembert equation has been performed. A short review of the results obtained has been presented.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
29.12.11