

## ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ В УТОЧНЕНІЙ ПОСТАНОВЦІ ЗАДАЧ СТАТИКИ ТОРОЇДАЛЬНИХ ОБОЛОНОК З ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНИМИ ТОРЦЯМИ

*Запропоновано підхід до розв'язання задач про напружений стан тороїдальних оболонок з жорстко закріпленими торцями в уточненій постановці на основі методів сплайн-колокації та дискретної ортогоналізації. Наведено дані про розподіл полів переміщень і напружень.*

Тороїдальні оболонки знаходять широке застосування як елементи конструкцій в турбобудуванні, газовій і хімічній промисловостях, приладобудуванні та інших галузях сучасної техніки [2, 3, 6, 7, 11].

Розв'язки задач для тороїдальних оболонок отримано в основному в класичній постановці при більш простих умовах на торцях [2, 5, 9]. У монографії [2] відзначається, що перші роботи, присвячені розв'язанню задач про напружений стан тороїдальних оболонок, ґрунтуються на побудові аналітичних розв'язків, що зводяться до обчислення спеціальних функцій. З появою комп'ютерів для розв'язання вказаного типу задач почали використовувати чисельні методи [13].

У цій статті розв'язання задач про напружений стан тороїдальних оболонок в уточненій постановці виконується на основі нетрадиційного підходу. Цей підхід полягає у зведенні двовимірної задачі до одновимірної за допомогою методу сплайн-колокації та розв'язання одновимірної задачі стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Наведено розв'язки цієї задачі при різних умовах закріплення торців.

**1. Постановка задачі.** Будемо розглядати зрізану тороїдальну ортотропну оболонку сталого товщини з круговим поперечним перерізом (рис. 1). Координатну поверхню віднесемо до системи криволінійних координат  $\eta$ ,  $\theta$ , де  $\eta$  – кут в осьовому перерізі оболонки, а  $\theta$  – кут у поперечному перерізі, при цьому  $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$ ,  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ .

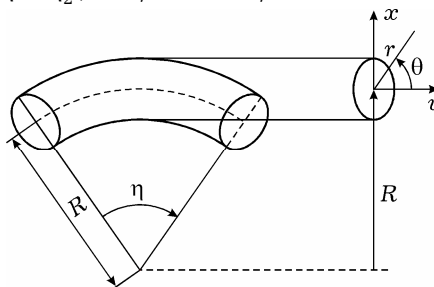


Рис. 1.

Перша квадратична форма запишеться у вигляді

$$dS^2 = A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2,$$

де  $A_1 = R + r \sin(\theta)$ ,  $A_2 = r$ ,  $\alpha_1 = \eta$ ,  $\alpha_2 = \theta$ ,  $R$  – радіус осьового кола,  $r$  – радіус кола у поперечному перерізі.

Оболонка знаходиться під дією нормального тиску  $q = q(\eta, \theta)$ . Напружено-деформований стан оболонки досліджуємо за уточненою теорією оболонок типу Тимошенка [6, 10]. Вибираючи за розв'язувальні функції переміщення  $u$ ,  $v$ ,  $w$  в осьовому, поперечному і нормальному напрямках і повні кути повороту нормалі  $\psi_\eta$ ,  $\psi_\theta$ , на основі вихідних виразів для деформації, рівнянь рівноваги та співвідношень пружності [6] отримуємо систему розв'язувальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + a_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial \eta} + a_{13} \frac{\partial^2 \Psi_\eta}{\partial \eta^2} + a_{14} \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial \theta \partial \eta} + a_{15} \frac{\partial u}{\partial \eta} + a_{16} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \\
&\quad + a_{17} \frac{\partial w}{\partial \eta} + a_{18} \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \eta} + a_{19} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \eta} + a_{110} \frac{\partial u}{\partial \theta} + a_{111} \frac{\partial v}{\partial \theta} + a_{112} \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \theta} + \\
&\quad + a_{113} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} + a_{114} u + a_{115} v + a_{116} w + a_{117} \Psi_\eta + a_{118} \Psi_\theta + a_{119}, \\
\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &= a_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \eta} + a_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + a_{23} \frac{\partial^2 \Psi_\eta}{\partial \theta \partial \eta} + a_{24} \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial \eta^2} + a_{25} \frac{\partial u}{\partial \eta} + a_{26} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \\
&\quad + a_{27} \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \eta} + a_{28} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \eta} + a_{29} \frac{\partial u}{\partial \theta} + a_{210} \frac{\partial v}{\partial \theta} + a_{211} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\
&\quad + a_{212} \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \theta} + a_{213} u + a_{214} v + a_{215} w + a_{216} \Psi_\eta + a_{217} \Psi_\theta + a_{218}, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} &= a_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + a_{32} \frac{\partial u}{\partial \eta} + a_{33} \frac{\partial w}{\partial \eta} + a_{34} \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \eta} + a_{35} \frac{\partial v}{\partial \theta} + a_{36} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\
&\quad + a_{37} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} + a_{38} u + a_{39} v + a_{310} w + a_{311} \Psi_\eta + a_{312} \Psi_\theta + a_{313}, \\
\frac{\partial^2 \Psi_\eta}{\partial \theta^2} &= a_{41} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + a_{42} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial \eta} + a_{43} \frac{\partial^2 \Psi_\eta}{\partial \eta^2} + a_{44} \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial \theta \partial \eta} + a_{45} \frac{\partial u}{\partial \eta} + a_{46} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \\
&\quad + a_{47} \frac{\partial w}{\partial \eta} + a_{48} \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \eta} + a_{49} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \eta} + a_{410} \frac{\partial u}{\partial \theta} + a_{411} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \\
&\quad + a_{412} \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \theta} + a_{413} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} + a_{414} u + a_{415} v + \\
&\quad + a_{416} w + a_{417} \Psi_\eta + a_{418} \Psi_\theta + a_{419}, \\
\frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial \theta^2} &= a_{51} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \eta} + a_{52} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + a_{53} \frac{\partial^2 \Psi_\eta}{\partial \theta \partial \eta} + a_{54} \frac{\partial^2 \Psi_\theta}{\partial \eta^2} + a_{55} \frac{\partial u}{\partial \eta} + a_{56} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \\
&\quad + a_{57} \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \eta} + a_{58} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \eta} + a_{59} \frac{\partial u}{\partial \theta} + a_{510} \frac{\partial v}{\partial \theta} + a_{511} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\
&\quad + a_{512} \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \theta} + a_{513} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} + a_{514} u + a_{414} v + \\
&\quad + a_{516} w + a_{517} \Psi_\eta + a_{518} \Psi_\theta + a_{519}. \tag{1}
\end{aligned}$$

Коефіцієнти  $a_{ij}$  системи рівнянь (1) залежать від вихідних геометричних і механічних параметрів [6]. Додаючи до системи рівнянь (1) граничні умови на торцях оболонки, приходимо до крайової задачі для системи диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Зокрема, на торцях оболонки можуть бути задані такі граничні умови:

– при жорсткому закріпленні

$$u = v = w = 0, \quad \Psi_\eta = \Psi_\theta = 0, \tag{2}$$

– при вільному опиранні

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad v = w = 0, \quad \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \eta} = \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \eta} = 0. \tag{3}$$

**2. Метод розв'язування.** Розв'язання двовимірної крайової задачі для системи рівнянь (1) з граничними умовами (2), (3) будемо здійснювати шляхом зведення двовимірної задачі до одновимірної за допомогою методу сплайн-колокації [4, 7] і знаходження розв'язку останньої стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації [3, 7, 12].

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} u(\eta, \theta) &= \sum_{i=0}^N u_i(\theta)\varphi_{1i}(\eta), & v(\eta, \theta) &= \sum_{i=0}^N v_i(\theta)\varphi_{2i}(\eta), \\ w(\eta, \theta) &= \sum_{i=0}^N w_i(\theta)\varphi_{3i}(\eta), \\ \psi_{\eta}(\eta, \theta) &= \sum_{i=0}^N \psi_{\eta i}(\theta)\varphi_{4i}(\eta), & \psi_{\theta}(\eta, \theta) &= \sum_{i=0}^N \psi_{\theta i}(\theta)\varphi_{5i}(\eta), \end{aligned} \quad (4)$$

де  $u_i(\theta)$ ,  $v_i(\theta)$ ,  $w_i(\theta)$ ,  $\psi_{\eta i}(\theta)$ ,  $\psi_{\theta i}(\theta)$  – функції, що підлягають визначенню, а  $\varphi_{ji}(\eta)$ ,  $j = 1, \dots, 5$ , – лінійні комбінації  $B$ -сплайнів третього степеня [1, 8], що задовольняють граничні умови на торцях оболонки.

При жорсткому закріпленні торців [4] маємо

$$\begin{aligned} \varphi_{10}(\eta) &= -4B_3^{-1}(\eta) + B_3^0(\eta), \\ \varphi_{11}(\eta) &= B_3^{-1}(\eta) - \frac{1}{2}B_3^0(\eta) + B_3^1(\eta), \\ \varphi_{1i}(\eta) &= B_3^i(\eta), \quad i = 2, 3, \dots, N-2, \\ \varphi_{1, N-1}(\eta) &= B_3^{N+1}(\eta) - \frac{1}{2}B_3^N(\eta) + B_3^{N-1}(\eta), \\ \varphi_{1N}(\eta) &= -4B_3^{N-1}(\eta) + B_3^N(\eta); \\ \varphi_{20}(\eta) &= -4B_3^{-1}(\eta) + B_3^0(\eta), \\ \varphi_{21}(\eta) &= B_3^{-1}(\eta) - \frac{1}{2}B_3^0(\eta) + B_3^1(\eta), \\ \varphi_{2i}(\eta) &= B_3^i(\eta), \quad i = 2, 3, \dots, N-2, \\ \varphi_{2, N-1}(\eta) &= B_3^{N+1}(\eta) - \frac{1}{2}B_3^N(\eta) + B_3^{N-1}(\eta), \\ \varphi_{2N}(\eta) &= -4B_3^{N-1}(\eta) + B_3^N(\eta); \\ \varphi_{30}(\eta) &= -4B_3^{-1}(\eta) + B_3^0(\eta), \\ \varphi_{31}(\eta) &= B_3^{-1}(\eta) - \frac{1}{2}B_3^0(\eta) + B_3^1(\eta), \\ \varphi_{3i}(\eta) &= B_3^i(\eta), \quad i = 2, 3, \dots, N-2, \\ \varphi_{3, N-1}(\eta) &= B_3^{N+1}(\eta) - \frac{1}{2}B_3^N(\eta) + B_3^{N-1}(\eta), \\ \varphi_{3N}(\eta) &= -4B_3^{N-1}(\eta) + B_3^N(\eta); \\ \varphi_{40}(\eta) &= -4B_3^{-1}(\eta) + B_3^0(\eta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{41}(\eta) &= B_3^{-1}(\eta) - \frac{1}{2}B_3^0(\eta) + B_3^1(\eta), \\
\varphi_{4i}(\eta) &= B_3^i(\eta), \quad i = 2, 3, \dots, N-2, \\
\varphi_{4,N-1}(\eta) &= B_3^{N+1}(\eta) - \frac{1}{2}B_3^N(\eta) + B_3^{N-1}(\eta), \\
\varphi_{4N}(\eta) &= -4B_3^{N-1}(\eta) + B_3^N(\eta); \\
\varphi_{50}(\eta) &= -4B_3^{-1}(\eta) + B_3^0(\eta), \\
\varphi_{51}(\eta) &= B_3^{-1}(\eta) - \frac{1}{2}B_3^0(\eta) + B_3^1(\eta), \\
\varphi_{5i}(\eta) &= B_3^i(\eta), \quad i = 2, 3, \dots, N-2, \\
\varphi_{5,N-1}(\eta) &= B_3^{N+1}(\eta) - \frac{1}{2}B_3^N(\eta) + B_3^{N-1}(\eta), \\
\varphi_{5N}(\eta) &= -4B_3^{N-1}(\eta) + B_3^N(\eta).
\end{aligned}$$

Підставляючи розв'язок (4) у розв'язувальну систему рівнянь (1) і відповідно до методу сплайн-колокації вимагаючи їх виконання на  $N+1$  лініях  $\eta = \xi_i$ ,  $i = 1, \dots, N+1$ , отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь порядку  $10(N+1)$ , яку можна подати у вигляді

$$\frac{d\bar{R}}{d\theta} = A\bar{R} + \bar{f}(\theta),$$

де

$$\begin{aligned}
\bar{R} &= \{u_0, \dots, u_N, u'_0, \dots, u'_N, v_0, \dots, v_N, v'_0, \dots, v'_N, w_0, \dots, w_N, w'_0, \dots, w'_N, \\
&\quad \Psi_{\eta 0}, \dots, \Psi_{\eta N}, \Psi'_{\eta 0}, \dots, \Psi'_{\eta N}, \Psi_{\theta 0}, \dots, \Psi_{\theta N}, \Psi'_{\theta 0}, \dots, \Psi'_{\theta N}\}^T.
\end{aligned}$$

$\bar{R}$  – вектор-функція від  $\theta$ ;  $\bar{f}(\theta)$  – вектор правих частин;  $A$  – квадратна матриця, елементи якої залежать від  $\theta$ . При цьому використовуємо умови симетрії за  $\theta$ .

Збільшуючи кількість вузлів колокації та кількість точок ортогоналізації, при використанні сучасних комп'ютерів можна отримати розв'язок задачі з високою точністю навіть для погано обумовлених задач.

**3. Числові результати.** На основі викладеного підходу отримано розв'язок задачі про напружений стан замкнутої зрізаної ортотропної тороїдальної оболонки при таких вихідних геометричних даних: довжина дуги осевого перерізу  $L = 60$ , товщина  $h = 1.5$ ,  $r = 15$ ,  $0 \leq \eta \leq \pi/2$ ,  $R = \frac{L}{\pi/2}$ .

Механічні параметри матеріалу оболонки такі:  $E_\eta = 5E$ ,  $E_\theta = 1.25E$ ,  $G_{\eta\theta} = 0.4E$ ,  $G_{\eta\gamma} = G_{\theta\gamma} = 0.2E$ , де  $E$  – модуль пружності, а коефіцієнт Пуассона  $\nu_\eta = 0.045$ . Оболонка перебуває під дією внутрішнього нормального тиску  $q = q_0 = \text{const}$  при жорсткому закріпленні торців.

Результати розв'язання задачі наведено на рис. 2 і рис. 3 у вигляді графіків розподілу уздовж твірної оболонки прогину  $w$  і напруження  $\sigma_\eta^-$  (на внутрішній поверхні оболонки) для значень кута  $\theta = -\pi/2, 0, \pi/2$ .

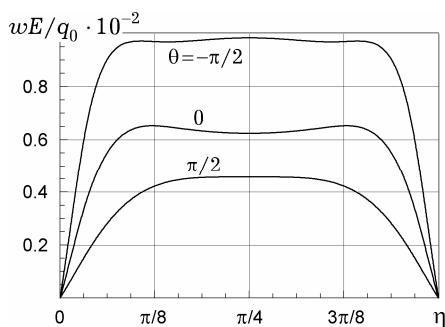


Рис. 2

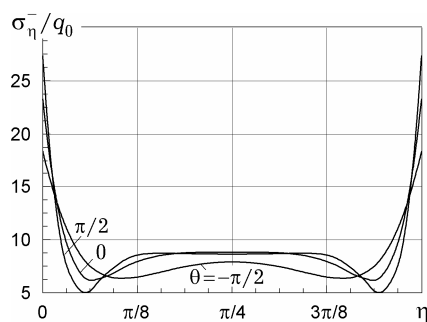


Рис. 3

1. Алберг Д., Нильсон Э., Уолли Д. Теория сплайнов и ее приложения. – Москва: Мир, 1972. – 318 с.
2. Булгаков В. Н. Статика тороидальных оболочек. – Киев: Изд-во АН УССР, 1962. – 100 с.
3. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1973. – 228 с.
4. Григоренко Я. М., Будах В. Д., Григоренко О. Я. Розв'язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів. – Миколаїв: Ліон, 2010. – 294 с.
5. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Беспалова Е. И. и др. Численное решение краевых задач статики ортотропных оболочек с переменными параметрами. – Киев: Наук. думка, 1975. – 183 с.
6. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Голуб Г. П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1987. – 216 с.
7. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академ-періодика, 2006. – 472 с.
8. Завьялов Ю. С., Квасов Ю. И., Мирошниченко В. М. Методы сплайн-функций. – Москва: Наука, 1980. – 352 с.
9. Кларк Э., Рейсснер Э. Изгиб труб с криволинейной осью // Проблемы механики. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – С. 125–149.
10. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 501 с.
11. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Vlaiikov G. G. Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models. – Kiev: Akademperiodika, 2009. – 550 p.
12. Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. Discrete Fourier-series method in problems of bending of variable-thickness rectangular plates // J. Eng. Math. – 2003. – 46, No. 3-4. – P. 269–280.
13. Soldatos K. P. Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section. A survey // Appl. Mech. Rev. – 1999. – 52, No. 8. – P. 237–274.

#### К РЕШЕНИЮ В УТОЧНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ СТАТИКИ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК С ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННЫМИ ТОРЦАМИ

Предложен подход к решению задач о напряженном состоянии тороидальных оболочек с жестко закрепленными торцами в уточненной постановке на основе методов сплайн-коллокации и дискретной ортогонализации. Приведены данные о распределении полей перемещений и напряжений.

#### TO THE SOLUTION OF THE STATIC PROBLEMS FOR TOROIDAL SHELLS WITH CLAMPED ENDS IN THE REFINED FORMULATION

An approach to solving the stress state problems for toroidal shells with clamped ends in the refined formulation is suggested. The approach uses the spline-collocation and discrete orthogonalization methods. The data on distribution of displacement and stress fields are presented.