УДК. 517.53.57

М. А. Сухорольський, В. В. Достойна

ОДИН КЛАС БІОРТОГОНАЛЬНИХ СИСТЕМ ФУНКЦІЙ, ЯКІ ВИНИКАЮТЬ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА У ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Розглянуто один клас систем функцій, біортогональних на замкнутому контурі в комплексній області. Досліджено властивості цих систем функцій, а також умови розвинення аналітичних функцій в ряди за основною системою. Наведено приклади розвинення елементарних функцій в такі ряди.

Вступ. Біортогональні системи функцій комплексної змінної і методи розвинення аналітичних функцій у ряди за цими системами розглядаються в роботах [2, 4–6, 8, 11]. Відшукання коефіцієнтів рядів ґрунтується на властивості біортогональності і вони виражаються через похідні функцій, які розвиваються в ці ряди. У роботах [2, 6, 8–10, 12–16] розглянуто окремі класи систем многочленів і досліджено достатні умови розвинення аналітичних функцій в ряди за ними.

У цій роботі дослідимо властивості одного класу систем функцій, біортогональних на замкнутому контурі в комплексній області, які виникають при розв'язуванні рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат, а також умови розвинення аналітичних функцій за основною системою. Наведено приклади таких розвинень.

1. Властивості біортогональних систем функцій. Розглянемо систему $\{b_n(z)\}$ функцій комплексної змінної

$$b_n(z) = \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)!}\left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{2^{2\ell}\,\ell!\left(\ell+\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)!} z^{2\ell}, \qquad n = 0,1,2,\ldots, \tag{1}$$

де $[x]$ – ціла частина x.

Зі співвідношень (1) отримаємо вирази функцій $b_n(z)$ окремо для парних і непарних значень n (послідовними замінами $\ell = j-n$ і $j = \ell+n$):

$$b_{2n}(z) = \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{2^{2(\ell+n)}\,\ell!(\ell+n)!} z^{2(\ell+n)} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(-1)^{j-n}}{2^{2j}\,j!(j-n)!} z^{2j} = \sum_{j=n}^{\infty}\frac{(-1)^j C_j^n}{2^{2j}(j!)^2} z^{2j}, \tag{2}$$

$$b_{2n+1}(z) = \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{2^{2(\ell+n)+1}\,\ell!(\ell+n+1)!} z^{2(\ell+n)+1} = \sum_{j=n}^{\infty}\frac{(-1)^j C_j^n}{2^{2j+1}\,j!(j+1)!} z^{2j+1}. \tag{3}$$

Твердження 1. *Функції $b_n(z)$ – цілі.*

Д о в е д е н н я. На підставі ознаки Даламбера ряд у співвідношенні (1) збігається рівномірно на будь-якому компакті комплексної площини і тому визначає цілу функцію. ♦

Твердження 2. *Для функцій $b_n(z)$ справджуються оцінки*

$$|b_{2n}(z)| \le \frac{e^{|z|}}{(n!)^2}\left(\frac{|z|}{2}\right)^{2n}, \tag{4}$$

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2012. – 55, № 2. – С. 52-62.

$$|b_{2n+1}(z)| \le \frac{e^{|z|}}{n!(n+1)!}\left(\frac{|z|}{2}\right)^{2n+1} \tag{5}$$

або

$$|b_n(z)| \le \frac{e^{|z|}}{\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)!\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)!}\left(\frac{|z|}{2}\right)^{n}. \tag{6}$$

Д о в е д е н н я. Використовуючи зображення [1, с. 12] функцій Бесселя 1-го роду

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{2^{2\ell}\,\ell!\,\Gamma(\ell+\nu+1)} z^{2\ell},$$

де $\Gamma(\cdot)$ – ґамма-функція, отримаємо

$$b_{2n}(z) = \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n J_n(z).$$

На підставі відомої оцінки [1, с. 23] $|J_\nu(z)| \le \left|\frac{z}{2}\right|^\nu \frac{e^{|y|}}{\Gamma(\nu+1)}$, де $y = \operatorname{Im} z$, отримуємо нерівність (4).

Аналогічно встановлюємо оцінку (5). ♦

Твердження 3. *Для похідних функцій* $b_n(z)$ *справджуються формули*

$$b'_{2n}(z) = b_{2n-1}(z), \qquad b'_{2n+1}(z) = b_{2n}(z) - \frac{1}{z} b_{2n+1}(z), \tag{7}$$

$$b''_{2n}(z) = b_{2(n-1)}(z) - \frac{1}{z} b_{2n-1}(z),$$

$$b''_{2n+1}(z) = b_{2n-1}(z) - \frac{1}{z} b_{2n}(z) + \frac{2}{z^2} b_{2n+1}(z). \tag{8}$$

Д о в е д е н н я. Формули (7) безпосередньо випливають зі співвідношень (1), (2). Формули (8) отримуємо з (7). ♦

Твердження 4. *Справджуються розвинення*

$$b_0(\sqrt{2}\,z) = \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r}(z), \qquad b_1(\sqrt{2}\,z) = \sqrt{2}\sum_{r=0}^{\infty} b_{2r+1}(z),$$

$$b_{2m}(\sqrt{2}\,z) = 2^m \sum_{r=m}^{\infty} C_r^m b_{2r}(z), \quad b_{2m+1}(\sqrt{2}\,z) = 2^{m+1/2} \sum_{r=m}^{\infty} C_r^m b_{2r+1}(z). \tag{9}$$

При цьому ряди в (9) *збігаються рівномірно в області* $|z| \le R,\ R < \infty$.

Д о в е д е н н я. Доведемо останнє співвідношення в (9). Підставивши замість $b_{2r+1}(z)$ їх вираз (3) і змінивши порядок підсумовування, одержимо

$$\sum_{r=m}^{\infty} C_r^m b_{2r+1}(z) = \sum_{r=m}^{\infty} C_r^m \sum_{j=r}^{\infty} \frac{(-1)^j C_j^r}{2^{2j+1} j!(j+1)!} z^{2j+1} =$$

$$= \sum_{j=m}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{2^{2j+1} j!(j+1)!} \sum_{r=m}^{j} C_r^m C_j^r.$$

Враховуючи відому тотожність [7, с. 619] $\sum_{r=m}^{j} C_j^r C_r^m = 2^{j-m} C_j^m$, знаходимо

$$\sum_{r=m}^{\infty} C_r^m b_{2r+1}(z) = \frac{1}{2^m} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{(-1)^j C_j^m}{2^{j+1} j!(j+1)!} z^{2j+1} = \frac{1}{2^{m+1/2}} b_{2m+1}(\sqrt{2}\,z),$$

звідки отримаємо потрібне розвинення.

Решту розвинень доводимо аналогічно.

Покажемо рівномірну збіжність ряду, наприклад, в останньому співвідношенні (9). На підставі оцінки (5) маємо

$$\left|\sum_{r=m}^{\infty} C_r^m b_{2r+1}(z)\right| \le \sum_{r=m}^{\infty} C_r^m \left|b_{2r+1}(z)\right| \le e^{|z|} \sum_{r=m}^{\infty} \frac{C_r^m}{r!(r+1)!}\left(\frac{|z|}{2}\right)^{2r+1} \le$$

$$\le \frac{e^R}{m!} \sum_{r=m}^{\infty} \frac{1}{(r-m)!(r+1)!}\left(\frac{R}{2}\right)^{2r+1}.$$

Оскільки отриманий числовий ряд збіжний (наприклад, за ознакою Даламбера), то ряд $\sum_{r=m}^{\infty} C_r^m b_{2r+1}(z)$ збіжний рівномірно в області $|z| \le R,\ R < \infty$. ♦

Твердження 5. *Твірна* $\Phi(z,t)$ *системи функцій* $\{b_n(z)\}$ *має явний вигляд*

$$\Phi(z,t) = J_0\left(z\sqrt{1+t^2}\right) + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} J_1\left(z\sqrt{1+t^2}\right),$$

де J_0, J_1 *– функції Бесселя 1-го роду.*

Д о в е д е н н я. Використовуючи співвідношення (2) і (3), маємо

$$\Phi(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}(z)t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}(z)t^{2n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j C_j^n}{2^{2j}(j!)^2} z^{2j} + \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n+1} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j C_j^n}{2^{2j+1} j!(j+1)!} z^{2j+1}.$$

Змінивши порядок підсумовування, внаслідок твердження 4 одержимо

$$\Phi(z,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{2^{2j}(j!)^2} \sum_{n=0}^{j} C_j^n t^{2n} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{2^{2j+1} j!(j+1)!} \sum_{n=0}^{j} C_j^n t^{2n+1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{2^{2j}(j!)^2}(1+t^2)^j + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{2^{2j+1} j!(j+1)!} t(1+t^2)^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{2j}(j!)^2}\left(z\sqrt{1+t^2}\right)^{2j} +$$

$$+ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{2j+1} j!(j+1)!}\left(z\sqrt{1+t^2}\right)^{2j+1} =$$

$$= J_0\left(z\sqrt{1+t^2}\right) + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} J_1\left(z\sqrt{1+t^2}\right).$$

Отже, маємо явний вираз твірної $\Phi(z,t)$. ♦

Введемо функції, асоційовані з функціями $b_n(z)$:

$$\omega_m(z) = (-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} 2^m \left(\left[\frac{m}{2}\right]\right)! \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{\left(\left[\frac{m+1}{2} - k\right]\right)!}{2^{2k} k!} \frac{1}{z^{m-2k+1}}. \qquad (10)$$

Зі співвідношення (10) запишемо вирази асоційованих функцій $\omega_m(z)$ окремо для парних та непарних значень індексів m (послідовними замінами $s = m - k$ і $k = m - s$):

$$\omega_{2m}(z) = (-1)^m m! \sum_{k=0}^{m} \frac{2^{2(m-k)}(m-k)!}{k!} \frac{1}{z^{2(m-k)+1}} =$$

$$= (-1)^m m! \sum_{s=0}^{m} \frac{2^{2s} s!}{(m-s)!} \frac{1}{z^{2s+1}} = (-1)^m \sum_{s=0}^{m} 2^{2s}(s!)^2 C_m^s \frac{1}{z^{2s+1}}, \qquad (11)$$

$$\omega_{2m+1}(z) = (-1)^m \sum_{s=0}^{m} 2^{2s+1} s!(s+1)!\, C_m^s \,\frac{1}{z^{2s+2}}\,. \tag{12}$$

Функції $\omega_m(z)$ є аналітичними зовні круга як завгодно малого радіуса з центром у початку координат. Їх аналітичність випливає з того, що вони містять скінченне число доданків за від'ємними степенями змінної z.

Твердження 6. *Для функцій* ω_m *виконуються оцінки*

$$\left|\omega_{2m}(t)\right| \le \frac{2^{2m}(m!)^2}{|t|^{2m+1}} \sum_{k=0}^{m} \frac{|t|^{2k}}{k!}\,, \tag{13}$$

$$\left|\omega_{2m+1}(t)\right| \le \frac{2^{2m+1} m!(m+1)!}{|t|^{2m+2}} \sum_{k=0}^{m} \frac{|t|^{2k}}{k!} \tag{14}$$

для всіх t *таких, що* $0 < |t| < \infty$.

Д о в е д е н н я. Враховуючи співвідношення (11), маємо

$$\left|\omega_{2m}(t)\right| \le 2^{2m} m! \sum_{k=0}^{m} \frac{(m-k)!}{2^{2k} k!\,|t|^{2m-2k+1}} \le \frac{2^{2m}(m!)^2}{|t|^{2m+1}} \sum_{k=0}^{m} \frac{|t|^{2k}}{k!}\,,$$

де $0 < |t| < \infty$.

Аналогічно доводимо нерівність (14). ♦

Теорема 1. *Системи функцій* $\{b_n(z)\}$, $\{\omega_m(z)\}$ *біортогональні на замкнутому контурі* Γ, *що охоплює нульову точку*:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma b_n(z)\omega_m(z)\, dz = \delta_{nm}\,, \tag{15}$$

де $\omega_m(z)$ *– функції, визначені співвідношенням* (10), δ_{nm} *– символ Кронекера.*

Д о в е д е н н я. На підставі співвідношень (2), (11) та (3), (12) запишемо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma b_{2n}(z)\omega_{2m}(z)\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j C_j^n}{2^{2j}(j!)^2} z^{2j} (-1)^m \sum_{s=0}^{m} 2^{2s}(s!)^2 C_m^s \frac{1}{z^{2s+1}}\, dz =$$

$$= (-1)^m \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j C_j^n}{2^{2j}(j!)^2} \sum_{s=0}^{m} 2^{2s}(s!)^2 C_m^s \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z^{2s-2j+1}}\,,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma b_{2n+1}(z)\omega_{2m+1}(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j C_j^n}{2^{2j+1} j!(j+1)!} z^{2j+1} (-1)^m \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{m} 2^{2s+1} s!(s+1)!\, C_m^s \frac{1}{z^{2s+2}}\, dz =$$

$$= (-1)^m \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j C_j^n}{2^{2j+1} j!(j+1)!} \sum_{s=0}^{m} 2^{2s+1} s!(s+1)!\, C_m^s \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z^{2s-2j+1}}\,.$$

Відомо [3, с. 81–82], що

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z^{2s-2j+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & s = j, \\ 0, & s \ne j. \end{cases}$$

Тому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma b_{2n}(z)\omega_{2m}(z)\,dz = (-1)^m \sum_{j=n}^{m} \frac{(-1)^j C_j^n}{2^{2j}(j!)^2} 2^{2j}(j!)^2 C_m^j =$$

$$= (-1)^m \sum_{j=n}^{m} (-1)^j C_m^j C_j^n .$$

Аналогічно

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma b_{2n+1}(z)\omega_{2m+1}(z)\,dz = (-1)^m \sum_{j=n}^{m} (-1)^j C_m^j C_j^n .$$

Враховуючи відому комбінаторну тотожність [7, с. 619]

$$\sum_{j=n}^{m} (-1)^j C_m^j C_j^n = (-1)^m \delta_{mn}, \tag{16}$$

отримуємо співвідношення (15).

Рівності

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma b_{2n+1}(z)\omega_{2m}(z)\,dz = 0, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma b_{2n}(z)\omega_{2m+1}(z)\,dz = 0 ,$$

очевидні, оскільки відсутні доданки з z^{-1}. ♦

Теорема 2. *Справджуються розвинення*

$$1 = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r b_{2r}(z), \qquad z = 2\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r b_{2r+1}(z) ,$$

$$z^{2m} = 2^{2m}(m!)^2 \sum_{r=m}^{\infty} (-1)^r C_r^m b_{2r}(z) ,$$

$$z^{2m+1} = 2^{2m+1} m!(m+1)! \sum_{r=m}^{\infty} (-1)^r C_r^m b_{2r+1}(z). \tag{17}$$

При цьому ряди в (17) *збігаються рівномірно в області* $|z| \le R,\ R < \infty$.

Д о в е д е н н я. Доведемо останнє співвідношення із (17). Підставляючи замість $b_{2r+1}(z)$ його вираз (3), отримаємо

$$\sum_{r=m}^{\infty} (-1)^r C_r^m b_{2r+1}(z) = \sum_{r=m}^{\infty} (-1)^r C_r^m \sum_{j=r}^{\infty} \frac{(-1)^j C_j^r}{2^{2j+1} j!(j+1)!} z^{2j+1} .$$

Змінивши в останній сумі порядок підсумовування і врахувавши тотожність (16), матимемо

$$\sum_{r=m}^{\infty} (-1)^r C_r^m b_{2r+1}(z) = \sum_{j=m}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{2j+1} j!(j+1)!} z^{2j+1} \sum_{r=m}^{j} (-1)^r C_r^m C_j^r =$$

$$= \frac{z^{2m+1}}{2^{2m+1} m!(m+1)!} ,$$

що доводить останнє співвідношення з (17).

Інші зі співвідношень (17) встановлюємо аналогічно.

Покажемо рівномірну збіжність ряду в останньому зі співвідношень (17). Враховуючи оцінку (5), знаходимо

$$\left| \sum_{r=m}^{\infty} (-1)^r C_r^m b_{2r+1}(z) \right| \le e^{|z|} \sum_{r=m}^{\infty} \frac{C_r^m}{r!(r+1)!} \left(\frac{|z|}{2}\right)^{2r+1} \le$$

$$\le \frac{e^R}{m!} \sum_{r=m}^{\infty} \frac{1}{(r-m)!(r+1)!} \left(\frac{R}{2}\right)^{2r+1} .$$

Оскільки числовий ряд $\sum\limits_{r=m}^{\infty} \frac{1}{(r-m)!(r+1)!}\left(\frac{R}{2}\right)^{2r+1}$ збіжний, то ряд $\sum\limits_{r=m}^{\infty} (-1)^r C_r^m b_{2r+1}(z)$ збіжний рівномірно в області $|z| \le R,\ R < \infty$. ♦

Теорема 3. *Справджується таке подання*:

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m(z)\omega_m(t) = \frac{1}{t-z}. \tag{18}$$

При цьому ряд у (18) *збігається рівномірно для* $|z| \le r$, $|t| \ge \rho$, де $0 < r < \infty$, $\rho > r$.

Д о в е д е н н я. Підставивши у праву частину співвідношення (18) вирази для асоційованих функцій ω_m та функцій b_m, запишемо

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m(z)\omega_m(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty} \frac{(-1)^j C_j^m}{2^{2j}(j!)^2} z^{2j}(-1)^m \sum_{s=0}^{m} 2^{2s}(s!)^2 C_m^s \frac{1}{t^{2s+1}} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=m}^{\infty} \frac{(-1)^j C_j^m}{2^{2j+1} j!(j+1)!} z^{2j+1}(-1)^m \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{m} 2^{2s+1} s!(s+1)! C_m^s \frac{1}{t^{2s+2}}.$$

Змінивши у сумах порядок підсумовування, матимемо

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m(z)\omega_m(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{2^{2j}(j!)^2} \sum_{m=0}^{j} (-1)^m C_j^m \sum_{s=0}^{m} 2^{2s}(s!)^2 C_m^s \frac{1}{t^{2s+1}} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{2^{2j+1} j!(j+1)!} \sum_{m=0}^{j} (-1)^m C_j^m \sum_{s=0}^{m} 2^{2s+1} s!(s+1)! C_m^s \frac{1}{t^{2s+2}} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j}}{2^{2j}(j!)^2} \sum_{s=0}^{j} 2^{2s}(s!)^2 \frac{1}{t^{2s+1}} \sum_{m=s}^{j} (-1)^m C_j^m C_m^s +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{2j+1}}{2^{2j+1} j!(j+1)!} \sum_{s=0}^{j} 2^{2s+1} s!(s+1)! \frac{1}{t^{2s+2}} \sum_{m=s}^{j} (-1)^m C_j^m C_m^s .$$

Використавши комбінаторну тотожність (16), остаточно знаходимо

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m(z)\omega_m(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{t^{2j+1}} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{t^{2s+2}} =$$

$$= \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{z}{t}\right)^2} + \frac{1}{t} \cdot \frac{\frac{z}{t}}{1-\left(\frac{z}{t}\right)^2} = \frac{1}{t-z}.$$

Покажемо, що ряд у співвідношенні (18) збігається рівномірно. Врахувавши оцінки (4), (5), (13), (14), одержимо

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} b_m(z)\omega_m(t)\right| \le \sum_{m=0}^{\infty} |b_{2m}(z)||\omega_{2m}(t)| + \sum_{m=0}^{\infty} |b_{2m+1}(z)||\omega_{2m+1}(t)| \le$$

$$\le \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{|z|}}{(m!)^2}\left(\frac{|z|}{2}\right)^{2m} \frac{2^{2m}(m!)^2}{|t|^{2m+1}} \sum_{k=0}^{m} \frac{|t|^{2k}}{k!} +$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{|z|}}{m!(m+1)!}\left(\frac{|z|}{2}\right)^{2m+1}\frac{2^{2m+1}m!(m+1)!}{|t|^{2m+2}}\sum_{k=0}^{m}\frac{|t|^{2k}}{k!}=$$

$$=\frac{e^{|z|}}{|t|}\sum_{m=0}^{\infty}\left|\frac{z}{t}\right|^{2m}\sum_{k=0}^{m}\frac{|t|^{2k}}{k!}+\frac{e^{|z|}|z|}{|t|^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left|\frac{z}{t}\right|^{2m}\sum_{k=0}^{m}\frac{|t|^{2k}}{k!}=$$

$$=e^{|z|}\left(\frac{1}{|t|}+\frac{|z|}{|t|^2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\left|\frac{z}{t}\right|^{2m}\sum_{k=0}^{m}\frac{|t|^{2k}}{k!}=$$

$$=\frac{e^{|z|}(|t|+|z|)}{|t|^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|t|^{2k}}{k!}\sum_{m=k}^{\infty}\left|\frac{z}{t}\right|^{2m}=$$

$$=\frac{e^{|z|}(|t|+|z|)}{|t|^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|t|^{2k}}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{z}{t}\right|^{2j+2k}=$$

$$=\frac{e^{|z|}(|t|+|z|)}{|t|^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^{2k}}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{z}{t}\right|^{2j}=$$

$$=\frac{e^{|z|}(|t|+|z|)}{|t|^2}e^{|z|^2}\frac{1}{1-\left|\frac{z}{t}\right|^2}=\frac{e^{|z|(1+|z|)}}{|t|-|z|}.$$

Отже, для всіх z і t таких, що $|z|\le r$, $|t|\ge\rho$, де $0<r<\infty$, $\rho>r$, ряд в (18) збігається рівномірно. ♦

Теорема 4. *Система функцій* $\{b_n(z)\}$ *− базис у просторі функцій* A_r, *аналітичних у крузі* $|z|\le r$, $0<r<\infty$.

Д о в е д е н н я. Система $\{b_n(z)\}$ є базисом в A_r [6, с. 161], оскільки

(*i*) функції $\omega_m(z)$ аналітичні в області $|z|>\rho>0$ (див. твердження 6);

(*ii*) коефіцієнти у розвиненнях (11), (12) асоційованих функцій $\omega_m(z)$ задовольняють умови

$$\lim_{s\to\infty}\left(2^{2s}(s!)^2C_m^s\right)^{1/2m}=\rho'_m<r,$$

$$\lim_{s\to\infty}\left(2^{2s+1}s!(s+1)!C_m^s\right)^{1/2m+1}=\rho''_m<r,$$

оскільки $C_m^s=0$, якщо $s>m$, і відповідно $\rho'_m=\rho''_m=0$;

(*ii*) правильним є розвинення (18), і за теоремою 3 відповідний ряд збігається рівномірно для всіх z і t таких, що $|z|\le r$, $|t|\ge\rho$, де

$0<r<\infty$, $\rho>r$. ♦

2. Розвинення функцій у ряди за системою $\{b_n(z)\}$**.** Нехай $f(z)$ − сума ряду за системою $\{b_n(z)\}$, і ряд є рівномірно збіжним в області $|z|\le R$, $R<\infty$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_n(z). \tag{19}$$

Помножимо ліву та праву частини рівності (19) на функцію $\omega_m(z)$ і проінтегруємо по контуру $\Gamma=\{z:|z|=r\}$, $0<r<R$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\omega_m(z)\,dz=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma b_n(z)\omega_m(z)\,dz.$$

Враховуючи умови (15) біортогональності і подання (10) для $\omega_m(z)$, маємо

$$a_m = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\omega_m(z)\,dz =$$

$$= (-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} 2^m \left(\left[\frac{m}{2}\right]\right)! \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{\left(\left[\frac{m+1}{2}\right]-k\right)!}{2^{2k}k!} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^{m-2k+1}}\,dz .$$

На підставі формули Коші одержимо

$$a_m = (-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} 2^m \left(\left[\frac{m}{2}\right]\right)! \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{\left(\left[\frac{m+1}{2}\right]-k\right)!}{2^{2k}k!} \frac{f^{(m-2k)}(0)}{(m-2k)!} . \tag{20}$$

Звідси маємо окремо для парних та непарних значень індексів m (з послідовними замінами $j = m - k$ і $k = m - j$):

$$a_{2m} = (-1)^m 2^{2m} m! \sum_{k=0}^{m} \frac{(m-k)!}{2^{2k}k!} \frac{f^{(2m-2k)}(0)}{(2m-2k)!} =$$

$$= (-1)^m 2^{2m} m! \sum_{j=0}^{m} \frac{j!}{2^{2(m-j)}(m-j)!} \frac{f^{(2j)}(0)}{(2j)!} =$$

$$= (-1)^m \sum_{j=0}^{m} \frac{2^{2j} C_m^j}{C_{2j}^j} f^{(2j)}(0) , \tag{21}$$

$$a_{2m+1} = (-1)^m \sum_{j=0}^{m} \frac{2^{2j+1} C_m^j}{C_{2j+1}^j} f^{(2j+1)}(0) . \tag{22}$$

Теорема 5. *Якщо функція* $f(z)$ *аналітична в крузі* $|z| \le R$, $R < \infty$, *і обмежена на колі* $|z| = R$ *так, що* $\max_{|z|\le R} |f(z)| = M$, *то коефіцієнти* (20) *задовольняють нерівність*

$$|a_m| \le \left(\left[\frac{m}{2}\right]\right)! \left(\left[\frac{m+1}{2}\right]\right)! \, M e^{R^2} \left(\frac{2}{R}\right)^m , \tag{23}$$

і для кожного $r \in (0, R)$ *ряд* (19) *збігається рівномірно до* $f(z)$ *в крузі* $|z| \le r$.

Д о в е д е н н я. Враховуючи нерівність

$$\frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} \le \frac{\max_{|z|\le R}|f(z)|}{R^n} = \frac{M}{R^n} ,$$

отримаємо оцінки для коефіцієнтів (20):

$$|a_{2m}| \le 2^{2m} m! \sum_{k=0}^{m} \frac{(m-k)!}{2^{2k}k!} \frac{\left|f^{(2m-2k)}(0)\right|}{(2m-2k)!} \le$$

$$\le 2^{2m} (m!)^2 M \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \frac{1}{R^{2m-2k}} \le \frac{2^{2m}(m!)^2 M}{R^{2m}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^{2k}}{k!} =$$

$$= \frac{2^{2m}(m!)^2 M e^{R^2}}{R^{2m}} .$$

Аналогічно

$$|a_{2m+1}| \le \frac{2^{2m+1} m!(m+1)! \, M e^{R^2}}{R^{2m+1}} .$$

На підставі оцінок (6) і (23) для $|z| \le r,\ r < R$, маємо

$$|f(z)| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||b_n(z)| \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)! \left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)! Me^{R^2} \left(\frac{2}{R}\right)^n \frac{e^{|z|}}{\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)! \left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)!} \left(\frac{|z|}{2}\right)^n \le$$

$$\le Me^{R^2+r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n = Me^{R^2+r} \frac{1}{1-\frac{r}{R}} = \frac{MRe^{R^2+r}}{R-r}.$$

Отже, ряд (19) збігається рівномірно в області $|z| \le r < R$. ♦

Приклад 1. Розвинути в ряд функцію $f(z) = \sin z$.

Оскільки

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

то

$$f^{(2j)}(0) = 0, \qquad f^{(2j+1)}(0) = (-1)^j.$$

За формулами (21), (22) знайдемо вирази для коефіцієнтів a_n ряду для $f(z)$:

$$a_{2m} = 0, \qquad a_{2m+1} = (-1)^m \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{2^{2j+1} C_m^j}{C_{2j+1}^j}.$$

Врахувавши тотожність

$$(-1)^m \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{2^{2j+1} C_m^j}{C_{2j+1}^j} = \frac{2 \cdot (-1)^{m+1}}{4m^2 - 1},$$

отримаємо

$$a_{2m+1} = \frac{2 \cdot (-1)^{m+1}}{4m^2 - 1}.$$

Тому

$$\sin z = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{4m^2 - 1} b_{2m+1}(z).$$ ◄

Приклад 2. Розвинути в ряд функцію $f(z) = \cos z$.

Оскільки

$$f^{(n)}(0) = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

то

$$f^{(2j)}(0) = (-1)^j, \qquad f^{(2j+1)}(0) = 0.$$

Згідно з формулами (21), (22) маємо

$$a_{2m} = (-1)^m \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{2^{2j} C_m^j}{C_{2j}^j}, \qquad a_{2m+1} = 0.$$

На підставі відомої тотожності [7, с. 629]

$$(-1)^m \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{2^{2j} C_m^j}{C_{2j}^j} = \frac{(-1)^m}{1-2m}$$

знаходимо, що $a_{2m} = \dfrac{(-1)^m}{1-2m}$.

Тому

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{1-2m} b_{2m}(z). \qquad \blacktriangleleft$$

Висновки. Зазначимо, що системи функцій

$$\{P_n(z) = z^{-1}\omega_n(z^{-1})\},$$

$$\{\psi_m(z) = z^{-1}b_m(z^{-1})\}$$

також біортогональні на замкнутому контурі, що охоплює нульову точку, при цьому система многочленів $\{P_n(z)\}$ є базисом простору A_R.

Можна показати, що функції

$$u_n(\rho, x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!}{(n-2r)!} x^{n-2r} b_{2r}(\rho),$$

$$v_n(\rho, x) = -\sum_{r=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{n!}{(n-2r-1)!} x^{n-2r-1} b_{2r+1}(\rho), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

є розв'язками рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \left(1 - \frac{\mu^2}{\rho^2}\right) u = 0, \quad (x, \rho) \in \mathbb{R}^2, \quad \mu = \text{const},$$

відповідно при $\mu = 0$ і $\mu = 1$.

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1974. – 295 с.
2. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. – Москва: Мир, 1986. – 216 с.
3. *Жевержеев В. Ф., Кальницкий Л. А., Сапогов Н. А.* Специальный курс высшей математики для втузов. – Москва: Высш. шк., 1970. – 416 с.
4. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1956. – 632 с.
5. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
6. *Маркушевич А. И.* Избранные главы теории аналитических функций. – Москва: Наука, 1976. – 191 с.
7. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. – Москва: Наука, 1981. – 798 с.
   Те саме: *Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I.* Integrals and Series. Vol. 1. Elementary Functions. – New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1986.
8. *Суетин П. К.* Ортогональные многочлены по двум переменным. – Москва: Наука, 1988. – 384 с.
9. *Сухорольський М. А.* Наближення функцій поліномами Лежандра в комплексній області // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2009. – № 643. – С. 5–14.
10. *Сухорольський М. А.* Розвинення аналітичних функцій за системами поліномів типу Мелліна // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2005. – № 346. – С. 111–115.
11. *Сухорольський М. А.* Розвинення функцій за системою поліномів, біортогональних на замкненому контурі з системою регулярних у нескінченно віддаленій точці функцій // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 2. – С. 238–254.
    Те саме: *Sukhorol's'kyi M. A.* Expansion of functions in a system of polynomials biorthogonal on a closed contour with a system of functions regular at infinitely remote point // Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, No. 2. – P. 268–288.
12. *Сухорольський М. А., Достойна В. В.* Розклад аналітичних в крузі функцій в комплексній області за системою похідних многочленів Лежандра // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2010. – № 687. – С. 105–121.

13. *Cruz-Barroso R., Daruis L., González-Vera P., Njåstad O.* Sequences of orthogonal Laurent polynomials, bi-orthogonality and quadrature formulas on the unit circle // J. Comput. Appl. Math. – 2007. – **206**, No. 2. – P. 950–966.
14. *Fackereil E. D., Littler R. A.*. Polynomials biorthogonal to Appell's polynomials // Bull. Aust. Math. Soc. – 1974. – **11**, No. 2. – P. 181–195.
15. *Schleusner J. W.* A note on biorthogonal polynomials in two variables // SIAM J. Math. Anal. – 1974. – **5**. – P. 11–18.
16. *Zhedanov A.* The «classical» Laurent biorthogonal polynomials // J. Comput. Appl. Math. – 1998. – **98**, No. 1. – P. 121–147.

ОДИН КЛАСС БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Рассматривается один класс систем функций, биортогональных на замкнутом контуре в комплексной области. Исследованы свойства этих систем функций, а также условия разложения аналитических функций в ряды по основной системе. Приведены примеры разложений элементарных функций в такие ряды.

ONE CLASS OF BIORTHOGONAL SYSTEMS OF FUNCTIONS THAT APPEARS AT SOLVING HELMHOLTZ EQUATION IN CYLINDRICAL COORDINATE SYSTEM

One class of systems of functions biorthogonal at the closed contour in complex plane is considered. The properties of these systems of functions and the conditions of expansion of analytical functions into series by basic system are investigated. The examples of expansion of elementary functions into such series are given.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
25.07.11