

ДВОВИМІРНІ ЗВ'ЯЗАНІ ЕЛЕКТРИЧНІ, МАГНІТНІ ТА МЕХАНІЧНІ ПОЛЯ В ДІЕЛЕКТРИКАХ ІЗ ТРІЩИНАМИ ТА ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Методи теорії термопружного деформування тіл із тонкими включеннями застосовано до вивчення магнітоелектропружних середовищ із тонкими неоднорідностями. Побудовано інтегральні рівняння задачі, а також запропоновано ефективну розрахункову схему методу граничних елементів для їхнього розв'язування. З'ясовано, що поля механічних напружень, електричних зміщень і магнітної індукції поблизу вершини (фронт) тонкого включення, в основу математичної моделі якого можна покласти принцип спряження континуумів різної вимірності, мають кореневу особливість. Для повного опису асимптотичних виразів для напружень, переміщень та інших величин в околі фронту неоднорідності введено 10 узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень, електричних зміщень і магнітної індукції. Отримано аналітичні розв'язки задачі у граничних випадках проникної тріщини та жорсткого електропровідного включення в магнітоелектропружному середовищі. Наведено результати числового аналізу коефіцієнтів інтенсивності для пружного ізотропного включення в анізотропному магнітоелектропружному середовищі.

Вступ. Розрахунок сучасних інтелектуальних матеріалів (smart materials) вимагає врахування взаємодії усіх фізико-механічних полів, що виникають у них. Вагоме місце серед цих новітніх матеріалів посідають магнітоелектричні композити, тобто виготовлені за керамо- чи нанотехнологіями тверді суміші п'єзомагнітної та п'єзоелектричної компонент [3], у яких магнітоелектричний ефект виникає внаслідок взаємодії цих двох фаз. Огляд лінійних теорій електромагнітомеханіки таких діелектриків подано у роботі [4]. Внаслідок структурної неоднорідності магнітоелектричних композитів одна із фаз може розглядатися як сукупність мікрровключень. З іншого боку, недосконалість чи порушення технології виробництва або експлуатації таких композицій можуть на мезо- та макрорівнях зумовити утворення дефектів гомогенізованої структури у формі тонких включень або тріщин.

На відміну від лінійної механіки руйнування пружних тіл, задачі теорії тріщин у магнітоелектропружних (МЕП) матеріалах є, в загальному, нелінійними [27], оскільки діелектрична та магнітна проникності газу (переважно, повітря), що заповнює просвіт щілини, не дорівнює нулеві. Крім того, завжди існують додаткові, переважно нелінійні, зв'язки між розкриттям тріщини та розривами електричного і магнітного потенціалів на ній. Найпростіші залежності між цими потенціалами часто будують за аналогією із моделлю пружної основи Вінклера, записуючи крайові умови на берегах напівпроникної тріщини (semi-permeable crack), для якої стрибок електричного чи магнітного потенціалів на дефекті пропорційний до добутку розкриття на нормальну складову електричного зміщення чи магнітної індукції [27]. Лінеаризуючи ці рівняння, для спрощення вводять також моделі непроникної тріщини (impermeable crack), для якої електричне зміщення та магнітна індукція на поверхнях дефекту є заданими (звичайно, нульовими, тобто магнітний і електричний контакт поверхонь відсутній), а також проникної тріщини (permeable crack) – електричний та магнітний потенціали разом із нормальними складовими електричного зміщення та магнітної індукції є неперервними при переході через поверхню дефекту, тобто реалізується ідеальний електричний і магнітний контакт.

Задачі МЕП для тіл із непроникними та проникними тріщинами розглянуто у монографіях [2, 3, 8, 12, 23]. Дослідження тонких дефектів у МЕП матеріалах стосуються також роботи [6, 14, 24, 25]. У працях [16, 18, 28] на основі методу граничних елементів розроблено різні числові підходи для визначення параметрів, що характеризують руйнування магнітоелектрич-

них композитів із тріщинами. В основному вони стосуються дослідження тіл із непроникними тріщинами. Напівпроникні тріщини розглядають у роботах із дослідження зв'язаних електричних і механічних полів, зокрема, напівпроникні тріщини в п'єзоелектрику вивчено у [15] за допомогою методу граничних елементів. У праці [22] тріщини в задачах електропружності запропоновано моделювати тонкими включеннями, що дало можливість уніфікувати в межах лінійної задачі опис усіх трьох моделей проникних, непроникних і напівпроникних тріщин. Вперше цю ідею було висловлено у монографії [8], де для запису умов електричного контакту берегів тріщини використано модель тонкого діелектричного шару. Проте конкретних числових прикладів реалізації цієї ідеї подано не було. Модель тонкого включення [22] є значно продуктивнішою, оскільки дає можливість задавати різні умови неідеального електричного та механічного контакту берегів тріщини. Подібний підхід доцільно використовувати і в задачах МЕР, адже непроникними для електричного чи магнітного полів є середовища, для яких діелектрична ϵ чи магнітна μ проникності є близькими до нуля. Натомість для проникних середовищ $\epsilon \rightarrow \infty$ або $\mu \rightarrow \infty$. Проміжними значеннями діелектричної та магнітної проникностей, очевидно, можна моделювати усі чи майже усі напівпроникні середовища.

Дослідження включень у магнітоелектричному композиті стосуються лише поодинокі роботи. Еліптичні п'єземагнітні включення розглянуто у монографії [23]. У роботі [21] досліджено включення Ешелбі у п'єземагнітному матеріалі. У праці [19] вивчено взаємодію електромагнітних та механічних полів у середовищі, що містить сфероїдне включення. Можна також згадати про застосування розвинутих у роботі [20] експериментальних методів при дослідженні магнітних та електричних полів у матеріалах із нанонеоднорідностями. Тонкі включення у МЕР матеріалах практично не розглядалися.

У цій роботі запропоновані раніше [22] моделі напівпроникних тріщин і тонких включень у п'єзоелектриках та математичні методи їхнього аналізу поширено на задачі МЕР тіл із тонкими неоднорідностями.

1. Формулювання задачі та основні співвідношення магнітоелектропружності. При розгляді однорідного МЕР тіла з тонким чужорідним включенням будемо виходити із принципу спряження континуумів різної вимірності [11]. Відповідно до нього створимо лінійчату модель тонкої неоднорідності (рис. 1): включення вилучимо з розгляду як геометричний об'єкт певної товщини зі своїми фізико-механічними властивостями, а контактні напруження, поверхневі заряди, магнітний та електричний потенціали, переміщення тощо перенесемо на відповідні сторони Γ_C^\pm його середньої поверхні Γ_C . Сформовані таким чином стрибки (розриви) фізико-механічних полів визначають разом із зовнішнім навантаженням магніто-електро-напружений стан у кожній точці тіла (*зовнішня задача*). У свою чергу, ці стрибки залежать від умов взаємодії тонкої неоднорідності з тілом, що враховують як властивості включення, так і умови контакту його берегів із середовищем (*модель включення, внутрішня задача*). Поєднання зовнішньої і внутрішньої задач дає можливість отримати розподіли фізико-механічних полів у тілі відповідно до міри адекватності побудованої моделі і точності здійснених розрахунків.

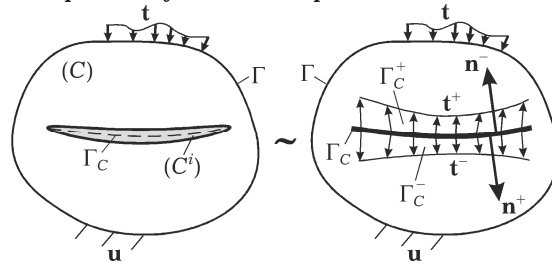


Рис. 1

Досліджуватимемо стаціонарні (квазістаціонарні) фізико-механічні поля, що діють в анізотропному МЕР матеріалі, з яким пов'язана глобальна система координат $Ox_1x_2x_3$. Рівняння рівноваги та теорема Гаусса для

електричного й магнітного полів у стаціонарному випадку набудуть вигляду [3, 23]:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad D_{i,i} - q = 0, \quad B_{i,i} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Тут σ_{ij} – компоненти тензора напружень; f_i – компоненти вектора об'ємних сил; D_i – електричне зміщення; q – густина вільних зарядів, яка для діелектрика, як правило, дорівнює нулеві; B_i – компоненти вектора магнітної індукції. У формулах приймаємо правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється.

Конститутивні співвідношення лінійної магнітоелектропружності відповідно до [3, 23] мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{pij} E_p - h_{pij} H_p, \quad D_i = e_{ikm} \varepsilon_{km} + \alpha_{ip} E_p + \beta_{ip} H_p, \\ B_i &= h_{ikm} \varepsilon_{km} + \beta_{ip} E_p + \mu_{ip} H_p, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ – деформації; $E_i = -\phi_{,i}$, $H_i = -\psi_{,i}$ – компоненти векторів напруженості електричного та магнітного полів; u_i – складові вектора переміщень точок тіла; ϕ , ψ – електричний та магнітний потенціали; C_{ijkl} – компоненти тензора пружних сталей (тензора жорсткості; модулі пружності); e_{ijk} , h_{ijk} – п'єзоелектричні та п'єземагнітні сталі; α_{ij} , μ_{ij} , β_{ij} , – діелектрична, магнітна та електромагнітна проникності матеріалу. Враховуючи властивості симетрії тензорів пружних, електричних, магнітних та електромагнітних сталей

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{jikm} = C_{kmji}, \quad e_{kij} = e_{kji}, \\ h_{kij} &= h_{kji}, \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \quad \mu_{ij} = \mu_{ji}, \quad \beta_{ij} = \beta_{ji}, \end{aligned} \quad (3)$$

формули (2) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} u_{k,m} + e_{pij} \phi_{,p} + h_{pij} \psi_{,p}, \quad D_i = e_{ikm} u_{k,m} - \alpha_{ip} \phi_{,p} - \beta_{ip} \psi_{,p}, \\ B_i &= h_{ikm} u_{k,m} - \beta_{ip} \phi_{,p} - \mu_{ip} \psi_{,p}. \end{aligned} \quad (4)$$

Розглянемо двовимірні електричні, магнітні та механічні поля, коли переміщення, електричний та магнітний потенціали точок циліндричного тіла не змінюються за координатою x_3 ($u_{i,3} \equiv 0$, $E_3 = -\phi_{,3} \equiv 0$, $H_3 = -\psi_{,3} \equiv 0$). Тобто електромагнітні та механічні поля у кожному нормальному до осі x_3 перерізі S тіла будуть однаковими. Введемо, подібно до [13, 22, 23], узагальнені величини

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i &= u_i, \quad \tilde{u}_4 = \phi, \quad \tilde{u}_5 = \psi, \quad \tilde{f}_i = f_i, \quad \tilde{f}_4 = -q, \quad \tilde{f}_5 = 0, \\ \tilde{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_{4j} = D_j, \quad \tilde{\sigma}_{5j} = B_j, \\ \tilde{C}_{ijkl} &= C_{ijkl}, \quad \tilde{C}_{ij4m} = e_{mij}, \quad \tilde{C}_{4jkm} = e_{jkm}, \quad \tilde{C}_{4j4m} = -\alpha_{jm}, \quad \tilde{C}_{ij5m} = h_{mij}, \\ \tilde{C}_{5jkm} &= h_{jkm}, \quad \tilde{C}_{5j5m} = -\mu_{jm}, \quad \tilde{C}_{4j5m} = -\beta_{jm}, \quad \tilde{C}_{5j4m} = -\beta_{jm}, \\ & i, k = 1, 2, 3, \quad j, m = 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Із використанням позначень (5) визначальні співвідношення (4) можна записати в уніфікованому компактному вигляді

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}_{ijkl} \tilde{u}_{k,m}, \quad i, k = 1, \dots, 5, \quad j, m = 1, 2, \quad (6)$$

причому відповідно до (3) означений залежностями (5) тензор магнітоелектропружних сталей із компонентами \tilde{C}_{ijkl} є симетричним:

$$\tilde{C}_{ijkl} = \tilde{C}_{kmi j}. \quad (7)$$

З урахуванням позначень (5) балансові рівняння (1) стаціонарних механічних, електричних і магнітних полів набудуть вигляду

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} + \tilde{f}_i \equiv \tilde{C}_{ijkl} \tilde{u}_{k,jm} + \tilde{f}_i = 0, \quad i, k = 1, \dots, 5, \quad j, m = 1, 2. \quad (8)$$

Термодинамічний потенціал H пружної ентальпії [3, 23] у нових змінних (5) запишемо як

$$H = \frac{1}{2} \tilde{C}_{ijkl} \tilde{u}_{i,j} \tilde{u}_{k,m}. \quad (9)$$

2. Інтегральні рівняння зовнішньої задачі. Зважаючи на симетрію (7) тензора магнітоелектропружних сталей та на балансові рівняння (8), а також використовуючи підхід [22], можна отримати МЕП-відповідник теореми взаємності робіт Бетті – Максвелла

$$\int_{\partial S} [\tilde{u}_j^{(2)} \tilde{t}_j^{(1)} - \tilde{t}_j^{(2)} \tilde{u}_j^{(1)}] d\Gamma + \iint_S \tilde{f}_j^{(1)} \tilde{u}_j^{(2)} dS = \iint_S \tilde{f}_j^{(2)} \tilde{u}_j^{(1)} dS, \quad (10)$$

де $\tilde{t}_i = \tilde{\sigma}_{ij} n_j = [t_1, t_2, t_3, D_j n_j = -\rho, B_j n_j = B_n]^\top$ – компоненти розширеного вектора напружень, поверхневих зарядів та магнітної індукції; n_j – компоненти одиничного вектора нормалі до поверхні тіла. Вибравши в (10) за один зі станів рівноваги поле, зумовлене дією одиничних зосереджених чинників $\tilde{f}_j^{(2,i)} = \delta_{ij} \delta(\boldsymbol{\xi})$, із використанням властивостей інтеграла від дельта-функції матимемо МЕП-відповідник формули Сомільяни

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(\boldsymbol{\xi}) = & \int_{\partial S} [U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{u}_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \iint_S U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{f}_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (11)$$

Тут функції Гріна $U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, $T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ відповідно до [23] означені так:

$$\begin{aligned} U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} [A_{i\alpha} A_{j\alpha} \ln Z_\alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})], \\ T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[A_{i\alpha} B_{j\alpha} (n_2 - n_1 p_\alpha) \frac{1}{Z_\alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

де $Z_\alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = x_1 + p_\alpha x_2 - (\xi_1 + p_\alpha \xi_2)$, а комплексні сталі p_α , $\alpha = 1, \dots, 5$, із додатною уявною частиною та відповідні їм компоненти $A_{i\alpha}$, $B_{i\alpha}$ матриць \mathbf{A} та \mathbf{B} визначають із задачі на власні значення формалізму Stroh:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_1^\top \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}\boldsymbol{\xi} = p\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{N}^\top \boldsymbol{\eta} = p\boldsymbol{\eta}, \quad (13)$$

де $\mathbf{N}_1 = -\mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}^\top$, $\mathbf{N}_2 = \mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{N}_3 = \mathbf{R} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{R}^\top - \mathbf{Q}$; $Q_{ik} = \tilde{C}_{i1k1}$, $T_{ik} = \tilde{C}_{i2k2}$, $R_{ik} = \tilde{C}_{i1k2} = \tilde{C}_{k2i1}$; $\boldsymbol{\xi} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]^\top$ – правий власний вектор, $\boldsymbol{\eta} = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]^\top$ – лівий власний вектор матриці \mathbf{N} ; верхній індекс « \top » означає операцію транспонування. Стовпцями матриць \mathbf{A} та \mathbf{B} є відповідно вектори-стовпці \mathbf{a}_α та \mathbf{b}_α . Вектори $\boldsymbol{\xi}_\alpha$, $\boldsymbol{\eta}_\beta$ для власних значень p_α , p_β нормують умовою

$$\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top \boldsymbol{\eta}_\beta = \delta_{\alpha\beta}. \quad (14)$$

Величини p_α (і відповідні їм вектори \mathbf{a}_α) не можуть бути дійсними. Справді, вибравши у цьому випадку деформації $\tilde{u}_{i,j}$ у формі

$$\tilde{u}_{i,j} = (\delta_{j1} + p\delta_{j2}) a_i, \quad \tilde{u}_{k,m} = (\delta_{m1} + p\delta_{m2}) a_k$$

та домножуючи (8) на a_i і підсумовуючи за індексом i , отримаємо

$$\tilde{C}_{ijkm}(\delta_{j1} + p\delta_{j2})a_i(\delta_{m1} + p\delta_{m2})a_k = \tilde{C}_{ijkm}\tilde{u}_{i,j}\tilde{u}_{k,m} = 0.$$

Тоді згідно з (9) ентальпія H такої системи повинна дорівнювати нулеві, а це фізично неможливо.

На основі методу введення фіктивних меж і їхнього подальшого спряження [5] для тіла з математичним розрізом Γ_C на основі (11) отримаємо таке подання для складових переміщень та електричного і магнітного потенціалів:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(\boldsymbol{\xi}) = & \int_{\Gamma} [U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\tilde{u}_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \int_{\Gamma_C^+} [U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\Sigma\tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\Delta\tilde{u}_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \iint_S U_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\tilde{f}_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (15)$$

Тут $\Sigma(\cdot) = (\cdot)^+ + (\cdot)^-$, $\Delta(\cdot) = (\cdot)^+ - (\cdot)^-$; $\Gamma \equiv \partial S$ – межа області S ; $\tilde{t}_i^{\pm} = \tilde{\sigma}_{ij}^{\pm}n_j^{\pm}$ (n_j^{\pm} – компоненти вектора нормалей \mathbf{n}^{\pm} до поверхонь Γ_C^{\pm}); знаками «+» та «-» позначено величини, що стосуються поверхонь Γ_C^+ та Γ_C^- , утворених в тілі математичним розрізом Γ_C .

Після диференціювання (15) можна визначити поле механічних напружень, електричних зміщень і магнітної індукції у довільній точці $\boldsymbol{\xi}$ тіла:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \tilde{C}_{ijkm}\tilde{u}_{k,m} = & \int_{\Gamma} [D_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\tilde{t}_k(\mathbf{x}) - S_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\tilde{u}_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \int_{\Gamma_C^+} [D_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\Sigma\tilde{t}_k(\mathbf{x}) - S_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\Delta\tilde{u}_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \iint_S D_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\tilde{f}_k(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (16)$$

Відповідно до [22] ядра інтегралів у (16) мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} D_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \tilde{C}_{ijpm} \frac{\partial U_{pk}}{\partial \xi_m} = & -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left[(\delta_{2j} - \delta_{1j}p_{\alpha}) B_{i\alpha} A_{k\alpha} \frac{1}{Z_{\alpha}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} \right], \\ S_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \tilde{C}_{ijpm} \frac{\partial T_{pk}}{\partial \xi_m} = & \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[(\delta_{2j} - \delta_{1j}p_{\alpha}) B_{i\alpha} B_{k\alpha} \frac{n_2 - n_1 p_{\alpha}}{[Z_{\alpha}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})]^2} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Спрямовуючи внутрішню точку $\boldsymbol{\xi}$ до точки $\mathbf{y} \in \Gamma$ межі тіла та вважаючи, що в точці \mathbf{y} крива Γ є гладкою, аналогічно до [23] із (15) отримаємо сингулярне інтегральне рівняння стосовно переміщень та електричного і магнітного потенціалів

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\tilde{u}_i(\mathbf{y}) = & \int_{\Gamma_C^+} [U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\Sigma\tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\Delta\tilde{u}_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \text{RPV} \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\tilde{t}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\tilde{u}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \iint_S U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\tilde{f}_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (18)$$

де символами RPV позначено величину невластивого інтеграла (Riemann principal value); CPV – головне значення інтеграла (Cauchy principal value). Для точки колокації \mathbf{y} , що лежить на гладкій ділянці розрізу Γ_C , отримаємо таке інтегральне рівняння:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Sigma \tilde{u}_i(\mathbf{y}) = & \text{RPV} \int_{\Gamma_C^+} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{t}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\
& - \text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{u}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\
& + \int_{\Gamma} [U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{t}_j(\mathbf{x}) - T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{u}_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\
& + \iint_S U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{f}_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \tag{19}
\end{aligned}$$

Забезпечивши в обчислювальній схемі вимогу, щоб точка колокації \mathbf{y} не потрапляла в точку зламу, інтегральні рівняння (18), (19) можна використовувати і при числовому моделюванні ламаних розрізів чи поверхонь тіла. Спрямовуючи в (16) точку $\boldsymbol{\xi}$ до точки $\mathbf{y} \in \Gamma_C$ межі тіла з урахуванням зв'язку $n_i^+ = -n_i^-$, отримаємо інтегральне рівняння стосовно вектора напружень, поверхневого заряду та магнітної індукції:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Delta \tilde{t}_i(\mathbf{y}) = & n_j^+(\mathbf{y}) \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{t}_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \right. \\
& - \text{HPV} \int_{\Gamma_C^+} S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{u}_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\
& + \int_{\Gamma} [D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{t}_k(\mathbf{x}) - S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{u}_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\
& \left. + \iint_S D_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{f}_k(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \right], \tag{20}
\end{aligned}$$

де HPV – скінченна частина гіперсингулярного інтеграла (Hadamard principal value).

При вивченні тіл із включеннями використовуватимемо інтегральне рівняння (18), коли точка колокації \mathbf{y} лежить на межі Γ тіла, та два рівняння (19), (20), коли точка колокації розташована на розрізі Γ_C .

3. Основні співвідношення внутрішньої задачі (модель тонкого включення). Розглянемо магніто-електро-напружений стан певного перерізу \mathbf{y} тонкого МЕР включення. Пов'яжемо вісь Ox'_1 локальної системи координат $Ox'_1x'_2x'_3$ із вектором нормалі $\mathbf{n}^+(\mathbf{y})$ до поверхні Γ_C^+ у точці \mathbf{y} . Складові векторів у локальній системі координат пов'язані з відповідними у глобальній співвідношеннями $\tilde{t}'_i = \Omega_{ij} \tilde{t}_j$, $\tilde{t}_i = \Omega_{ji} \tilde{t}'_j$, де $\boldsymbol{\Omega}$ – матриця повороту системи координат, повністю означена компонентами вектора $\mathbf{n}^+(\mathbf{y})$. Помістимо центр локальної системи координат на середину поверхню тонкого включення. Тоді $\tilde{g}(-h) = \tilde{g}^+$, $\tilde{g}(h) = \tilde{g}^-$, де \tilde{g} – довільна складова \tilde{u}_i , \tilde{t}_i із розширених векторів переміщення і напруження; $2h$ – товщина включення. Враховуючи, що $\mathbf{n}^\pm = -\mathbf{n}^{\text{in}\pm}$, умови ідеального механічного, електричного та магнітного контакту поверхонь включення із середовищем матимуть вигляд [10] $\tilde{u}_i^\pm = \tilde{u}_i^{\text{in}\pm}$, $\tilde{t}_i^\pm = -\tilde{t}_i^{\text{in}\pm}$. Тут верхнім індексом «in» позначено величини, що стосуються включення.

Відповідно до (6) напруження та електричне зміщення у включенні подамо з використанням позначень формалізму Stroh у вигляді

$$\tilde{\sigma}'_{i1} = Q_{ik}^{\text{in}} \tilde{u}'_{k,1} + R_{ik}^{\text{in}} \tilde{u}'_{k,2}, \quad \tilde{\sigma}'_{i2} = R_{ki}^{\text{in}} \tilde{u}'_{k,1} + T_{ik}^{\text{in}} \tilde{u}'_{k,2}, \quad i, k = 1, \dots, 5. \tag{21}$$

Інтегруючи (21) за товщиною включення, отримаємо

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^h \tilde{\sigma}'_{i1} dx'_1 &= Q'_{ik}{}^{\text{in}} [\tilde{u}'_k(h) - \tilde{u}'_k(-h)] + R'_{ik}{}^{\text{in}} \int_{-h}^h \tilde{u}'_{k,2} dx'_1, \\
\int_{-h}^h \tilde{\sigma}'_{i2} dx'_1 &= R'_{ki}{}^{\text{in}} [\tilde{u}'_k(h) - \tilde{u}'_k(-h)] + T'_{ik}{}^{\text{in}} \int_{-h}^h \tilde{u}'_{k,2} dx'_1.
\end{aligned} \quad (22)$$

Зважаючи на рівняння рівноваги (8) та умову ідеального контакту $\tilde{t}_i^\pm = -\tilde{t}_i^{\text{in}\pm}$, згідно з принципом спряження континуумів різної вимірності матимемо

$$\int_{-h}^h \tilde{\sigma}'_{i2} dx'_1 = \tilde{P}'_i(\mathbf{y}) = \Omega_{ij}(\mathbf{y}) \tilde{P}'_j(\mathbf{y}), \quad \tilde{P}'_j(\mathbf{y}) = -\tilde{P}_j^0 + \int_{\mathbf{y}_0}^{\mathbf{y}} \Sigma \tilde{t}_j(s) ds, \quad (23)$$

де s – дугова координата математичного розрізу Γ_C ; \tilde{P}_j^0 – зусилля, заряди та магнітна індукція на лівому торці включення, координати якого означені точкою \mathbf{y}_0 . На основі теореми про середнє значення інтеграла отримаємо зв'язки

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^h \tilde{\sigma}'_{i1} dx'_1 &= 2h \tilde{\sigma}'_{i1}{}^{\text{av}} \approx h(\mathbf{y}) [\tilde{t}_i^{\text{in}}(h) - \tilde{t}_i^{\text{in}}(-h)] = h(\mathbf{y}) \Delta \tilde{t}'_i(\mathbf{y}), \\
\int_{-h}^h \tilde{u}'_{k,2} dx'_1 &= 2h \tilde{u}'_{k,2}{}^{\text{av}} \approx h(\mathbf{y}) [\tilde{u}'_{k,2}(h) + \tilde{u}'_{k,2}(-h)] = h(\mathbf{y}) \Sigma \tilde{u}'_{k,2}(\mathbf{y}).
\end{aligned} \quad (24)$$

Знехтуємо у тонкому включенні взаємодією поперечних і поздовжніх стосовно середньої поверхні неоднорідності складових векторів магнітних, електричних та механічних полів (подібно до моделі пружної основи Вінклера). Тоді, використовуючи (23) та (24), зі співвідношень (22) матимемо

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{t}'_i(\mathbf{y}) &= -\frac{Q'_{ik}{}^{\text{in}}(\mathbf{y})}{h(\mathbf{y})} [\Delta \tilde{u}'_k(\mathbf{y}) + \Delta \tilde{u}'_k{}^*(\mathbf{y})], \\
T'_{ik}{}^{\text{in}}(\mathbf{y}) \Sigma \tilde{u}'_{k,2}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{h(\mathbf{y})} [\tilde{P}'_i(\mathbf{y}) + \tilde{P}'_i{}^*(\mathbf{y})].
\end{aligned} \quad (25)$$

З огляду на зроблені спрощення у (25) за аналогією із [7, 11, 22] введено систему коригувальних функцій $\Delta \tilde{u}'_i{}^*$, $\tilde{P}'_i{}^*$ (у задачах теорії пружності їх ще називають торцевими зусиллями і переміщеннями [11], чи вважають однорідним розв'язком [7]). Для тонких дефектів ці функції переважно вважають нульовими або задають наближеними апіорними залежностями [11] так, щоб задача мала точний розв'язок для трьох основних характерних випадків властивостей матеріалу неоднорідності (тріщина, абсолютно жорстке включення, суцільне бездефектне тіло, тобто включення із матеріалу середовища).

Позначаючи $\mathbf{N}^1 = (\mathbf{T}'^{\text{in}})^{-1}$ та зважаючи на те, що $\Sigma \tilde{u}'_{k,2} = \partial \Sigma \tilde{u}'_k / \partial s$, отримаємо таку модель тонкого включення:

$$\Delta \tilde{t}'_i(\mathbf{y}) = -\frac{Q'_{ij}{}^{\text{in}}(\mathbf{y})}{h(\mathbf{y})} [\Delta \tilde{u}'_j(\mathbf{y}) + \Delta \tilde{u}'_j{}^*(\mathbf{y})], \quad \frac{\partial \Sigma \tilde{u}'_i(\mathbf{y})}{\partial s} = \frac{N'_{ij}}{h(\mathbf{y})} [\tilde{P}'_j(\mathbf{y}) + \tilde{P}'_j{}^*(\mathbf{y})]. \quad (26)$$

Перейшовши у (26) до глобальної системи координат та інтегруючи $\frac{\partial \Sigma \tilde{u}'_k}{\partial s}$ уздовж дуги Γ_C від лівого торця \mathbf{y}_0 до точки колокації \mathbf{y} , матимемо

$$\Delta \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) = -\frac{\mathbf{V}(\mathbf{y}) [\Delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) + \Delta \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{y})]}{h(\mathbf{y})}, \quad \Sigma \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = 2\tilde{\mathbf{u}}^0 + \int_{\mathbf{y}_0}^{\mathbf{y}} \frac{\mathbf{W}(s) [\tilde{\mathbf{P}}(s) + \tilde{\mathbf{P}}^*(s)]}{h(s)} ds. \quad (27)$$

Тут $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega}^\top \mathbf{Q}'^{\text{in}} \boldsymbol{\Omega}$, $\mathbf{W} = \boldsymbol{\Omega}^\top \mathbf{N}^1 \boldsymbol{\Omega}$; $\tilde{\mathbf{u}}^0$ – середні значення переміщень та

електричного й магнітного потенціалів на лівому торці включення. Модель (27) для часткового випадку п'єзоелектричного включення, коли матриці \mathbf{V} та \mathbf{W} і вектори $\tilde{\mathbf{u}}$ та $\tilde{\mathbf{t}}$ вважаються чотиривимірними, не враховуючи магнітних компонент, еквівалентна до моделі, розробленої в [22].

Для визначення середніх значень переміщень та електричного й магнітного потенціалів на лівому торці тонкого включення до побудованих співвідношень слід долучити рівняння глобальної магнітоелектропружної рівноваги неоднорідності

$$\tilde{P}_j^n + \tilde{P}_j^0 - \int_{\Gamma_C^+} \Sigma \tilde{t}_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0, \quad (28)$$

де \tilde{P}_j^n – зусилля, електричні заряди та магнітна індукція на правому торці тонкого включення.

При дослідженні тонких криволінійних включень або прямолінійних неоднорідностей за дії нерівномірно розподіленого навантаження в моделі (27) необхідно врахувати ефект згину. Для цього можна скористатися співвідношеннями, записаними в роботах [9, 22] для включення зі сталою згинальною жорсткістю.

Система рівнянь (18)–(20), (27) і (28) разом із крайовими умовами на межі Γ тіла

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(\mathbf{y}) &= \tilde{u}_i^*(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \Gamma_u, & \tilde{t}_i(\mathbf{y}) &= \tilde{t}_i^*(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \Gamma_t, \\ \Gamma &= \Gamma_u \cup \Gamma_t, & \Gamma_u \cap \Gamma_t &= \emptyset, \end{aligned} \quad (29)$$

є повною для розв'язування задачі магнітоелектропружності середовища із включенням, що моделюється за принципом спряження континуумів різної вимірності. Причому шуканими є крайові функції $\Delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y})$ та $\Delta \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y})$ для $\mathbf{y} \in \Gamma_C$, і функції $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \Gamma_t$ та $\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in \Gamma_u$, що не задані крайовими умовами (29). Після їхнього знаходження поле тензора напружень і векторів електричних зміщень і магнітної індукції можна обчислити за інтегральним поданням (16).

4. Особливості у розв'язку задачі. З огляду на умови $\Delta \tilde{u}_j(\mathbf{y}_0) = \Delta \tilde{u}_j(\mathbf{y}_n) = 0$ нерозривності переміщень та електричного і магнітного потенціалів на кінцях математичного розрізу система рівнянь (19), (20), (27) після диференціювання першого рівняння та обчислення частинами гіперсингулярних інтегралів зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами Коші. Після її діагоналізації отримаємо систему рівнянь, характеристичну частину [1] кожного з яких можна подати у вигляді [22]

$$K^0 \psi \equiv \frac{b(s_0)}{i\pi} \int_{-a}^a \frac{\psi(s) ds}{s - s_0}, \quad (30)$$

де ψ – лінійні комбінації крайових функцій $\partial \Delta \tilde{u}_i / \partial s$ і $\Sigma \tilde{t}_i$. Отже, відповідно

до [1] $\psi = f(s)\omega(s)$, де $f(s)$ – регулярна функція, а $\omega(s) = \frac{1}{\sqrt{1-s/a}} \frac{1}{\sqrt{1+s/a}}$

– канонічна функція. Тобто біля торців включення крайові функції змінюються як

$$\Delta \tilde{u}_i(s) = \Delta \tilde{u}_i^0 \sqrt{s} + O(s), \quad \Sigma \tilde{t}_i(s) = \frac{\Sigma \tilde{t}_i^0}{\sqrt{s}} + O(1), \quad (31)$$

де s – дугова координата, що відраховується від вершини неоднорідності.

Відповідно до [22], зважаючи на поведінку (31) крайових функцій та інтегральне подання (16), отримаємо для напружень, електричних зміщень та магнітної індукції такий асимптотичний розподіл:

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}) = \text{Im} \{ (\delta_{2j} - \delta_{1j} p_\alpha) B_{i\alpha} (1/2 B_{k\alpha} \Delta \tilde{u}_k^0 + A_{k\alpha} \Sigma \tilde{t}_k^0) [Z_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{0})]^{-1/2} \}. \quad (32)$$

За аналогією із задачами теорії тріщин [17, 26] введемо узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень, електричних зміщень та магнітної індукції (КІНЕЗМІ) залежностями

$$\tilde{k}_i^{(1)} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tilde{\sigma}_{i2}(r, \theta)|_{\theta=0, \Sigma \tilde{\mathbf{t}}^0=0}, \quad \tilde{k}_i^{(2)} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tilde{\sigma}_{i2}(r, \theta)|_{\theta=\pi, \Delta \tilde{\mathbf{u}}^0=0}. \quad (33)$$

Тут r – відстань до вершини неоднорідності; θ – полярний кут локальної системи координат; $\tilde{\mathbf{k}}^{(1)} = [K_{21}, K_{11}, K_{31}, K_{41}, K_{51}]^\top$, $\tilde{\mathbf{k}}^{(2)} = [K_{12}^{(2)}, K_{22}^{(2)}, K_{32}, K_{42}, K_{52}]^\top$; K_{ij} – узагальнені КІНЕЗМІ. Для непроникної тріщини $K_{11} = K_I$, $K_{21} = K_{II}$, $K_{31} = K_{III}$, $K_{41} = K_{IV} \equiv K_D$, $K_{51} = K_V \equiv K_B$, $\tilde{\mathbf{k}}^{(2)} = \mathbf{0}$, де K_I , K_{II} , K_{III} , $K_{IV} \equiv K_D$, $K_V \equiv K_B$ – класичні КІНЕЗМІ теорії тріщин [17, 23, 26].

Відповідно до означення (33) із асимптотичних виразів (31), (32) отримасмо зв'язки узагальнених КІНЕЗМІ із крайовими функціями

$$\tilde{\mathbf{k}}^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} \mathbf{L} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{u}}(s), \quad \tilde{\mathbf{k}}^{(2)} = - \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma \tilde{\mathbf{t}}(s), \quad (34)$$

де $\mathbf{L} = -2\sqrt{-1} \mathbf{B} \mathbf{B}^\top$ – дійсний тензор Barnett–Lothe [23].

Дві перші компоненти $K_{12}^{(2)}$, $K_{22}^{(2)}$ вектора $\tilde{\mathbf{k}}^{(2)}$ позначені верхнім індексом «(2)» для того, щоб відрізнити їх від узагальнених КІН K_{12} та K_{22} , введених для суто пружних задач залежностями [11]:

$$K_{11} + K_{12} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(r, \theta)|_{\theta=0}, \quad K_{21} + K_{22} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12}(r, \theta)|_{\theta=0}. \quad (35)$$

Величини K_{12} та K_{22} можна отримати із вектора $\tilde{\mathbf{k}}^{(2)}$ за формулою [22]

$$k_i^{(2)} = S_{ji} \tilde{k}_j^{(2)}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, 5. \quad (36)$$

Тут $\mathbf{k}^{(2)} = [K_{22}, K_{12}]^\top$ – вектор узагальнених КІН; $\mathbf{S} = \sqrt{-1} (2\mathbf{A} \mathbf{B}^\top - \mathbf{I})$ – другий дійсний тензор Barnett–Lothe [23].

Асимптотичний розподіл (32) зручно подати через узагальнені КІНЕЗМІ за допомогою розширеної вектор-функції напружень [23], яка відповідно до (31), (32) та (34) дорівнює

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \{ \mathbf{B} \langle \sqrt{Z_*} \rangle (\sqrt{-1} \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{k}}^{(1)} - 2\mathbf{A}^\top \tilde{\mathbf{k}}^{(2)}) \}, \quad (37)$$

де $\langle \sqrt{Z_*} \rangle = \operatorname{diag} [\sqrt{Z_1}, \sqrt{Z_2}, \dots, \sqrt{Z_5}]$. Компоненти тензора напружень і векторів електричних зміщень і магнітної індукції визначаються через компоненти розширеної функції напружень $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}$ так [23]:

$$\tilde{\sigma}_{i1} = -\tilde{\Phi}_{i,2}, \quad \tilde{\sigma}_{i2} = \tilde{\Phi}_{i,1}. \quad (38)$$

Виходячи з формалізму Stroh [23], поле переміщень та електричного і магнітного потенціалів, що відповідає розширеній функції напружень (37), має вигляд

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Im} \{ \mathbf{A} \langle \sqrt{Z_*} \rangle (\sqrt{-1} \mathbf{B}^{-1} \tilde{\mathbf{k}}^{(1)} - 2\mathbf{A}^\top \tilde{\mathbf{k}}^{(2)}) \}. \quad (39)$$

5. Числовий аналіз прикладів. З урахуванням асимптотичної поведінки (31) крайових функцій на лінії Γ_C розриву фізико-механічних полів для числового розв'язування задачі використано спеціальну схему методу граничних елементів [22], що ефективно враховує кореневу особливість розв'язку завдяки спеціальним базовим функціям, які моделюють приторцеві частини тонкого включення.

5.1. Непроникні тріщини в анізотропному МЕР середовищі. Розглянемо безмежне середовище із магнітоелектричного композиту ВаТіО₃ – СоFe₂О₄ з об'ємною часткою наповнення $V_f = 0.5$. Вісь симетрії (напрямок електричної та магнітної поляризації) спрямовано вздовж осі Ox_2 . З урахуванням вибраної осі симетрії усереднені властивості композиту [18, 25] є такими: пружні сталі $C_{11} = C_{33} = 226$, $C_{12} = C_{23} = 124$, $C_{13} = 125$, $C_{22} = 216$, $C_{44} = C_{66} = 44$, $C_{55} = (C_{11} - C_{12})/2$ [ГПа]; п'єзоелектричні коефіцієнти $e_{21} = e_{23} = -2.2$, $e_{22} = 9.3$, $e_{16} = e_{34} = 5.8$ [Кл/м²]; п'єземагнітні коефіцієнти $h_{21} = h_{23} = 290.2$, $h_{22} = 350$, $h_{16} = h_{34} = 275$ [Тл]; діелектричні проникності $\epsilon_{11} = 5.64$, $\epsilon_{22} = 6.35$ [нФ/м]; магнітні проникності $\mu_{11} = 297 \cdot 10^3$, $\mu_{22} = 83.5 \cdot 10^3$ [нГ/м]; електромагнітні проникності $\beta_{11} = 5.367 \cdot 10^{-3}$, $\beta_{22} = 2.7375$ [нКл/(А·м)].

При розгляді однієї тріщини, яку моделюємо за допомогою усього 10 однакових за довжиною граничних елементів, включаючи два спеціальні прикінцеві, які описують кореневу особливість, похибка обчислення КІНЕЗМІ була меншою ніж 0.01%. Така ж похибка обчислень була і в схемі МГЕ [18], проте розбиття істотно згущувалося поблизу вершин тріщини.

У [25] за допомогою методу колокацій розглянуто задачу про взаємодію двох тріщин у МЕР середовищі. Схему задачі зображено на рис. 2. Також рис. 2 містить графіки обчислених для вершини А основної тріщини значень КІН K_I за дії на безмежності сталого одновісного навантаження σ_{22}^∞ , електричного зміщення $D_2^\infty = 10^{-8} \sigma_{22}^\infty$ [Кл·Н⁻¹] для значень індукції магнітного поля $B_2^\infty = 0$, $B_2^\infty = 10^{-6} \sigma_{22}^\infty$ [А⁻¹·м] і $B_2^\infty = -10^{-6} \sigma_{22}^\infty$ [А⁻¹·м]

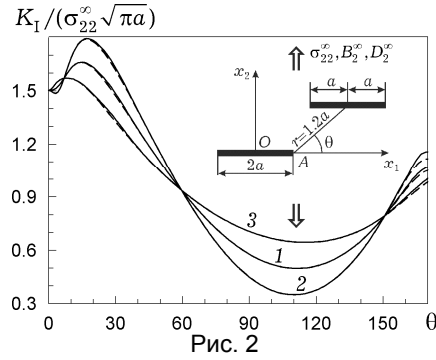


Рис. 2

(відповідно криві 1–3). Суцільні криві відповідають аналітично-числовому розв'язку [25], а штрихові отримано за допомогою запропонованого підходу. Видно добру узгодженість результатів у випадку сумісної дії механічного, електричного та магнітного навантажень. Хороша узгодженість результатів була отримана і за спільної дії лише механічного та магнітного навантажень. У розрахунках було використано всього 40 (по 20 на кожну тріщину) однакових за довжиною граничних елементів.

5.2. Проникна тріщина. Розглянемо тріщину, розташовану вздовж відрізка $[-a, a]$ осі Ox_1 , береги якої перебувають в ідеальному електричному та магнітному контакті, тобто виконуються умови [8, 10]

$$\Delta\phi(x_1) = 0, \quad \Delta\psi(x_1) = 0, \\ \Sigma\tilde{t}_4(x_1) = D_2^+ - D_2^- = 0, \quad \Sigma\tilde{t}_5(x_1) = B_2^+ - B_2^- = 0, \quad -a < x_1 < a. \quad (40)$$

Такі умови можна отримати з моделі тонкого включення (27), вважаючи пружні сталі неоднорідності близькими до нуля, а також покладаючи досить великими її діелектричну та магнітну проникності в напрямі, перпендикулярному до площини тріщини.

Використовуючи (20) і (40), отримаємо такі інтегральні рівняння задачі:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\Delta\tilde{u}_{i,1}}{x - \xi} dx = -L_{ij}^{-1} (2\tilde{\sigma}_{j2} + \delta_{j4}\Delta\tilde{t}_4 + \delta_{j5}\Delta\tilde{t}_5), \\ \Delta\tilde{u}_{4,1} = \Delta\tilde{u}_{5,1} = 0, \quad i, j = 1, \dots, 5. \quad (41)$$

Розв'язуючи (41) сумісно з умовою $\Delta\tilde{u}_i(-a) = \Delta\tilde{u}_i(a) = 0$ нерозривності переміщень та електричного і магнітного потенціалів на кінцях тріщини, на основі (34) та [1] отримаємо точний аналітичний розв'язок для КІНЕЗМІ:

$$\frac{\tilde{k}_i^{(1)}}{\sqrt{\pi a}} = \tilde{\sigma}_{i2} + \frac{\delta_{i4}\Delta\tilde{t}_4 + \delta_{i5}\Delta\tilde{t}_5}{2}, \quad (42)$$

де

$$\Delta\tilde{t}_4 = 2 \frac{(L_{5i}^{-1}L_{45}^{-1} - L_{4i}^{-1}L_{55}^{-1})\tilde{\sigma}_{i2}}{L_{44}^{-1}L_{55}^{-1} - L_{45}^{-1}L_{54}^{-1}}, \quad \Delta\tilde{t}_5 = 2 \frac{(L_{4i}^{-1}L_{54}^{-1} - L_{5i}^{-1}L_{44}^{-1})\tilde{\sigma}_{i2}}{L_{44}^{-1}L_{55}^{-1} - L_{45}^{-1}L_{54}^{-1}}.$$

Для цієї задачі похибка визначення КІНЕЗМІ (42) запропонованим числовим підходом із використанням методу граничних елементів за розбиття, що складається з 21 граничного елемента, не перевищила 0.04%. У розрахунках приймали, що модуль зсуву механічно ізотропного включення $G^{\text{in}} = 10^{-10}C_{66}$, а поперечна та поздовжня діелектрична й магнітна проникності відповідно дорівнюють $\epsilon_{22}^{\text{in}} = 10^{10}\epsilon_0$, $\epsilon_{11}^{\text{in}} = 10^{-10}\epsilon_0$ та $\mu_{22}^{\text{in}} = 10^{10}\mu_0$, $\mu_{11}^{\text{in}} = 10^{-10}\mu_0$, де ϵ_0 , μ_0 – електрична та магнітна сталі.

5.3. Абсолютно жорстке та проникне включення. Якщо діелектричні проникності ϵ_{ij} включення на декілька порядків більші ніж відповідні величини середовища, то на основі моделі включення (27) отримаємо, що при $x \rightarrow \infty$ стрибок електричного потенціалу $\Delta\phi$ прямує до нуля, тобто реалізується ідеальний електричний контакт берегів лінії розриву фізико-механічних полів. Ці умови фізично відповідають провідному (металевому) включенню. Якщо ж матеріал включення має велику магнітну проникність (наприклад, у пермалюю), то стрибок магнітного потенціалу $\Delta\psi$ теж буде близьким до нуля. Тобто еквівалентом абсолютно жорсткого включення в задачах МЕР є жорстка провідна та магнітнопроникна тонка неоднорідність, для якої $\Delta\tilde{\mathbf{u}} = 0$.

Розглянемо тонке жорстке та проникне включення, розташоване уздовж відрізка $[-a, a]$ осі Ox_1 . Відповідно до (19) та (27) ця задача зводиться до розв'язання інтегрального рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\Sigma\tilde{t}_i(x)}{x - \xi} dx = 2H_{ij}^{-1}c_j \quad (43)$$

за умов рівноваги (28) сил, електричних зміщень, магнітної індукції та моментів, які можна записати у формі

$$\int_{-a}^a \Sigma\tilde{t}_i(x) dx = 0, \quad \int_{-a}^a \Sigma\tilde{t}_2(x)(a - x) dx = 0. \quad (44)$$

Тут $\mathbf{H} = 2\sqrt{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ – третій дійсний тензор Barnett–Lothe [23]; $c_j = -\delta_{j2}\omega^0 - \tilde{u}_{j,1}^\infty$; $\tilde{u}_{j,1}^\infty$ – сталі деформації та градієнти електричного і магнітного полів однорідного середовища без включення; ω^0 – малий кут повороту включення (додатний напрям вибрано за стрілкою годинника). Розв'язок рівняння (43) з умовами (44) має вигляд [1]

$$\Sigma\tilde{t}_i(x) = \frac{2xH_{ij}^{-1}c_j}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad -a < x < a. \quad (45)$$

За допомогою (45) і (34) визначимо узагальнені КІНЕЗМІ для включення:

$$\tilde{\mathbf{k}}^{(2)} = -\sqrt{\pi a} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{c}. \quad (46)$$

Використавши другу з умов (44), отримаємо рівняння для визначення кута малого повороту включення

$$\omega^0 = -\frac{H_{2j}^{-1} \tilde{u}_{j,1}^\infty}{H_{22}^{-1}}.$$

Для визначення точності запропонованого числового підходу обчислимо узагальнені КІНЕЗМІ для жорсткого проникного включення у магнітоелектричному композиті. На безмежності задано механічне σ , електричне D або магнітне B навантаження. При цьому нормовані КІНЕЗМІ обчислюємо за формулою

$$K_{i2}^* = \frac{K_{i2}}{K_{i2}^0},$$

де $K_{12}^0 = K_{22}^0 = K_{32}^0 = \sigma^* \sqrt{\pi a}$, $K_{42}^0 = D^* \sqrt{\pi a}$, $K_{52}^0 = B^* \sqrt{\pi a}$. Якщо на безмежності задано механічне навантаження $\sigma^* = \sigma$, то $D^* = 10^{-9} \sigma$ [Кл·Н⁻¹], $B^* = 10^{-9} \sigma$ [А⁻¹·м], $\omega_\sigma^* = 10^{-9} \sigma$ [Па⁻¹]; якщо задано електричне навантаження $D^* = D$, тоді $\sigma^* = 10^9 D$ [Н·Кл⁻¹], $B^* = D$ [В·А⁻¹], $\omega_D^* = D$ [Кл⁻¹·м²]; для магнітного навантаження $B^* = B$ маємо $\sigma^* = 10^9 B$ [А·м⁻¹], $D^* = B$ [В⁻¹·А]. Значення КІНЕЗМІ та кутів ω^0 повороту включення для деяких випадків навантаження подано в табл. 1. У МГЕ-моделі використано 21 граничний елемент.

Таблиця 1

Навантаження	Аналітично за (46)	Числово (МГЕ)
$\sigma_{11} = \sigma$	$K_{12}^* = -0.094064$	$K_{12}^* = -0.094069$
$\sigma_{12} = \sigma$	$K_{22}^* = 0.077465$	$K_{22}^* = 0.077468$
	$K_{42}^* = -0.134716$	$K_{42}^* = -0.134722$
	$K_{52}^* = -3.3155$	$K_{52}^* = -3.3156$
	$\omega^0/\omega_\sigma^* = -0.01175$	$\omega^0/\omega_\sigma^* = -0.01175$
$\sigma_{31} = \sigma$	$K_{32}^* = 0.93343$	$K_{32}^* = 0.93348$
$D_1 = D$	$K_{22}^* = -0.58587$	$K_{22}^* = -0.58589$
	$K_{42}^* = 1.02482$	$K_{42}^* = 1.02487$
	$K_{52}^* = 0.01044$	$K_{52}^* = 0.01043$
	$\omega^0/\omega_D^* = 0.0030884$	$\omega^0/\omega_D^* = 0.0030883$
$B_1 = B$	$K_{22}^* = -3.7910 \cdot 10^{-5}$	$K_{22}^* = -3.7912 \cdot 10^{-5}$
	$K_{42}^* = -5.9800 \cdot 10^{-5}$	$K_{42}^* = -5.9803 \cdot 10^{-5}$
	$K_{52}^* = 0.53026$	$K_{52}^* = 0.53029$

Бачимо дуже добру узгодженість результатів розрахунків узагальнених КІНЕЗМІ тонкого жорсткого проникного включення за допомогою запропонованого числового підходу та точної формули (46). Видно, що зсувне механічне навантаження $\sigma_{12} = \sigma$ зумовлює не тільки поворот включення, а й істотну концентрацію механічних, електричних і магнітних полів. У випадку врахування лише механічних явищ для пружного ізотропного матеріалу за чистого зсуву в площині Ox_1x_2 усі КІНЕЗМІ внаслідок повороту включення були би нульовими. Істотні градієнти механічних та магнітних полів породжує також і саме лише електричне навантаження $D_1 = D$.

5.4. Пружне ізотропне діелектричне включення. Розглянемо МЕР середовище $\text{BaTiO}_3 - \text{CoFe}_2\text{O}_4$, що містить тонке пружне ізотропне включення, розташоване на відрізку $[-a, a]$ осі Ox_1 . Товщина включення $2h$, $h = 0.01a$. Відносну жорсткість включення означимо величиною $k = G^{\text{in}}/C_{66}$, де G^{in} – модуль зсуву матеріалу включення. Діелектрична та магнітна проникності включення дорівнюють відповідним сталим для вакууму ($\epsilon^{\text{in}} = \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-3}$ нФ/м, $\mu^{\text{in}} = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^2$ нГ/м), тобто вважаємо, що включення практично не поляризується. Коефіцієнт Пуассона для включення вважаємо рівним 0.3. Середовище перебуває в умовах всебічного розтягу. На рис. 3 зображено схему задачі та розраховані залежності нормованих значень узагальнених КІНЕЗМІ від відносної жорсткості k тонкого включення. При нормуванні використано величини $D^* = 10^{-9} \sigma$ [Кл·Н⁻¹], $B^* = 10^{-9} \sigma$ [А⁻¹·м]. МГЕ-модель складається з 21 однакового за довжиною граничного елемента.

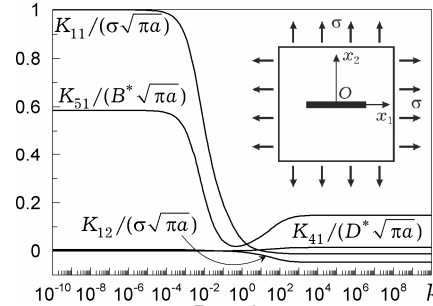


Рис. 3

На рис. 3 бачимо, що врахування ненульової магнітної проникності матеріалу сильно податного ($k \ll 1$) включення (фактично щілини) дає можливість обчислити коефіцієнт інтенсивності магнітної індукції $K_{51} = K_B$, який набуває істотного значення. При розгляді ж непроникної щілини він виявляється нульовим. Для включень із великою відносною жорсткістю ($k \gg 1$) внаслідок неповної проникності матеріалу неоднорідності КІНЕЗМІ K_{41} та K_{51} є ненульовими, а узагальнений КІН K_{12} відрізняється від відповідного значення (46) для проникного включення на 5.1% (для вибраної доволі малої товщини $2h$ неоднорідності).

Висновки. У результаті застосування принципу спряження континуумів різної вимірності побудовано моделі МЕР середовища, що містить тонке чужорідне включення. З'ясовано, що отримана модель дає можливість за допомогою очевидної зміни властивостей тонкої неоднорідності отримати різноманітні умови неідеального електромагнітного контакту на поверхні розриву фізико-механічних полів: непроникна та проникна тріщина, жорстке проникне включення тощо. Крім цього, запропонована модель дає можливість у межах лінійної задачі моделювати напівпроникні тріщини за допомогою тонких включень, відносна жорсткість яких близька до нуля. Розроблений підхід буде ефективним і при моделюванні дефектів гомогенізованої структури магнітоелектричних композитів у формі тонких п'єзоелектричних або п'єземагнітних прошарків і неоднорідностей. Виявлено істотний взаємовплив одночасної дії комплексу фізико-механічних полів на їхню концентрацію поблизу вістря тонкої неоднорідності.

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.
2. Калоеров С. А., Баева А. И., Бороненко О. И. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 268 с.
3. Калоеров С. А., Петренко А. В. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
4. Кондрат В., Грицина О. Лінійні теорії електромагнітомеханіки діелектриків // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2009. – Вип. 9. – С. 7–46.
5. Линьков А. М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. – Санкт-Петербург: Наука, 1999. – 382 с.

6. Лобода В. В., Ходанен Т. В. Задача термоэлектромагнитоупругости для п'єзо-електричного/п'єзомагнітного біматеріалу з міжфазною тріщиною // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2008. – **51**, № 3. – С. 121–132.
Te same: Loboda V. V., Khodanen T. V. Problem of thermoelectromagnetoelasticity for a piezoelectric/piezomagnetic bimaterial with interface crack // *J. Math. Sci.* – 2010. – **165**, No. 3. – P. 301–317.
7. Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. – Киев: Наук. думка, 1986. – 216 с.
8. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – Москва: Наука, 1988. – 472 с.
9. Пастернак Я. М., Сулим Г. Т. Дуальний метод граничних елементів для задач теорії тонких включень // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2010. – **53**, № 2. – С. 46–57.
Te same: Pasternak Ya. M., Sulym H. T. Dual boundary element method for problems of the theory of thin inclusions // *J. Math. Sci.* – 2011. – **178**, No. 4. – P. 421–434.
10. Сивухин Д. В. Общий курс физики. – Москва: Наука, 1977. – Т. III: Электричество. – 688 с.
11. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
12. Bardzokas D. I., Filshinsky M. L., Filshinsky L. A. Mathematical methods in electro-magneto-elasticity. – New York: Springer, 2007. – 530 p.
13. Barnett D. M., Lothe J. Dislocations and line charges in anisotropic piezoelectric insulators // *Phys. Status Solidi. B.* – 1975. – **67**. – P. 105–111.
14. Chen Y.-H., Hasebe N. Current understanding on fracture behaviors of ferroelectric/piezoelectric materials // *J. Intel. Mater. Syst. Struct.* – 2005. – **16**. – P. 673–687.
15. Denda M. BEM analysis of semipermeable piezoelectric cracks // *Key Eng. Mater.* – 2008. – **383**. – P. 67–84.
16. Dong C. Y., Lo S. H., Antes H. Fracture analysis in 2D magneto-electro-elastic media by the boundary element method // *Comput. Mech.* – 2008. – **41**, No. 2. – P. 207–217.
17. Gao C.-F., Kessler H., Balke H. Crack problems in magneto-electroelastic solids. I: Exact solution of a crack // *Int. J. Eng. Sci.* – 2003. – **41**, No. 9. – P. 969–981.
18. Garcia-Sanchez F., Rojas-Diaz R., Saez A., Zhang Ch. Fracture of magneto-electroelastic composite materials using boundary element method (BEM) // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2007. – **47**, No. 3. – P. 192–204.
19. Hou P.-F., Leung A. Y. T. A spheroidal inclusion in an infinite magneto-electro-elastic material // *Int. J. Eng. Sci.* – 2004. – **42**, No. 11–12. – P. 1255–1273.
20. Midgley P. A., Dunin-Borkowski R. E. Electron tomography and holography in materials science // *Nat. Mater.* – 2009. – **8**, No. 4. – P. 271–280.
21. Li J. Y. Magnetolectric Green's functions and their application to the inclusion and inhomogeneity problems // *Int. J. Sol. Struct.* – 2002. – **39**. – P. 4201–4213.
22. Pasternak Ia. Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2011. – **35**, No. 4. – P. 678–690.
23. Qin Q.-H. Green's function and boundary elements in multifield materials. – Oxford: Elsevier, 2007. – 266 p.
24. Tian W.-Y., Gabbert U. Macrocrack-microcrack interaction problem in magneto-electroelastic solids // *Mech. Mater.* – 2005. – **37**, No. 5. – P. 565–592.
25. Tian W.-Y., Gabbert U. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids // *Eur. J. Mech. A/Solids.* – 2004. – **23**, No. 4. – P. 599–614.
26. Wang B. L., Mai Y.-W. Crack tip field in piezoelectric/piezomagnetic media // *Eur. J. Mech. A/Solids.* – 2003. – **22**, No. 4. – P. 591–602.
27. Zhao M. H., Wang H., Yang F., Liu T. A magneto-electroelastic medium with an elliptical cavity under combined mechanical–electric–magnetic loading // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2006. – **45**, No. 3. – P. 227–237.
28. Zhu X., Huang Zh., Jiang A., Chen W. Q., Nishimura N. Fast multipole boundary element analysis for 2D problems of magneto-electro-elastic media // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2010. – **34**, No. 11. – P. 927–933.

ДВУХМЕРНЫЕ СВЯЗАННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ, МАГНИТНЫЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИКАХ С ТРЕЩИНАМИ И ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Методы теории термоупругого деформирования тел с тонкими включениями применены к изучению магнитоэлектроупругих сред с тонкими неоднородностями. Построены интегральные уравнения задачи, а также предложена эффективная расчетная схема метода граничных элементов для их решения. Доказано, что поля механических напряжений, электрических смещений и магнитной индукции вблизи вершины (фронта) тонкого включения, в основу математической модели которого можно положить принцип сопряжения континуумов разной размерности, имеют корневую особенность. Для полного описания асимптотических выражений для напряжений, смещений и других величин в окрестности фронта неоднородности введено 10 обобщенных коэффициентов интенсивности напряжений, электрических смещений и магнитной индукции. Получены аналитические решения задачи в предельных случаях проницаемой трещины и жесткого электропроводного включения в магнитоэлектроупругой среде. Представлены результаты численного анализа коэффициентов интенсивности для упругого изотропного включения в анизотропной магнитоэлектроупругой среде.

COUPLED 2D ELECTRIC, MAGNETIC AND MECHANICAL FIELDS IN DIELECTRICS WITH CRACKS AND THIN INCLUSIONS

The methods of the theory of thermoelastic deformation of solids with thin inclusions are applied to study the magnetoelastoelectric medium with thin inhomogeneities. The integral equations of the problem are developed, and the efficient numerical boundary element procedure is adopted for their solution. It is proved that fields of mechanical stress, electric displacements and magnetic induction (magnetic flux density) near the tip (front) of thin inclusion, which is modeled basing on the coupling principle for continuums of different dimension, possess a square root singularity. Thus, for the full definition of the asymptotic relations for stress, displacements and other quantities at the vicinity of inhomogeneity's front ten generalized stress intensity factors, electric displacements and magnetic induction intensity factors are introduced. Analytical solutions for limiting cases of a permeable crack and a rigid conductive inclusion in a magnetoelastoelectric medium are obtained. Results of the numerical analysis of stress, electric displacement and magnetic induction intensity factors for elastic isotropic inclusion in the anisotropic magnetoelastoelectric medium are presented.

¹ Луцький нац. техн. ун-т, Луцьк,

² Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

³ Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
14.05.11