

### ПРО ВЗАЄМОДІЮ ПРУЖНОЇ *SH*-ХВИЛІ З МІЖФАЗНОЮ ТРІЩИНОЮ В АБСОЛЮТНО ЖОРСТКОМУ З'ЄДНАННІ ПЛАСТИНИ З ПІВПРОСТОРОМ

Розв'язана задача дифракції пружної *SH*-хвилі на міжфазній тріщині, яка утворилась на межі абсолютно жорсткого з'єднання пластини з півпростором. Розглянуто напівнескінченну і скінченну тріщини. Методом Вінера – Гопфа розв'язок задачі дифракції для напівнескінченної тріщини отримано в аналітичному вигляді. У випадку скінченної тріщини задачу зведено до розв'язання безмежної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Досліджено коефіцієнти трансформації хвиль на вершині напівнескінченної міжфазної тріщини. У випадку скінченної тріщини отримано власні значення оператора дифракційної задачі, які визначають комплексні резонансні частоти динамічної системи. Наведено залежності власних частот і коливань від параметрів структури.

Однією з проблем діагностики є виявлення розшарувань у з'єднаннях матеріалів. Її вирішення базується на вивченні взаємодії пружних хвиль із міжфазними тріщинами. Теоретичною основою таких досліджень є розв'язки задач теорії дифракції та поширення хвиль у пластинах [1, 5, 12, 13]. Поведінку полів в околі резонансних частот пружних пластин із внутрішніми тріщинами вивчали у працях [6, 7, 11], а резонансні властивості багатопарових періодичних структур із тріщиною за їх опромінення *SH*-хвилею досліджували в [8].

У роботі [9] методом Вінера – Гопфа розв'язано задачу дифракції *SH*-хвилі на міжфазній тріщині, яка утворилась на межі ідеального з'єднання пластини з півпростором, а у працях [2, 10] – задачу дифракції цієї хвилі на міжфазній тріщині у з'єднанні двох півпросторів.

Тут розв'яжемо задачу дифракції пружної *SH*-хвилі на тріщині, утвореній на межі абсолютно жорсткого з'єднання пластини з півпростором. Дослідимо формування власних комплексних частот та коливань такої структури з метою визначення оптимальних режимів її зондування.

Розглянемо тріщину на плоскій межі абсолютно жорсткого з'єднання пластини  $P : \{x \in (-\infty, \infty), y \in (-d, 0), z \in (-\infty, \infty)\}$  з поверхнею  $S : \{x \in (-\infty, \infty), y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$  півпростору  $y > 0$ , де  $Oxyz$  – декартова система координат.

Нехай тріщина займає область  $\Gamma : \{x \in (-L, 0), y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$  (рис. 1).

Така структура опромінюється однією з незатухаючих хвилеводних мод, що поширюються в пластині при її абсолютно жорсткому з'єднанні з півпростором за відсутності дефекта.

Розглянемо монохроматичне опромінення, що описується гармонічною часовою залежністю  $e^{-i\omega t}$  (цей множник надалі опускаємо). Дифракційні процеси в описаній системі визначає одна скалярна функція  $u = u(x, y)$ , пов'язана з полем зміщень  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{e}_z u(x, y)$ . Тоді відповідну крайову дифракційну задачу формулюємо так:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (1)$$

$$\tau_{zy} = \mu \frac{\partial(u + u^{\text{inc}})}{\partial y} = 0, \quad y = -d, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (2)$$

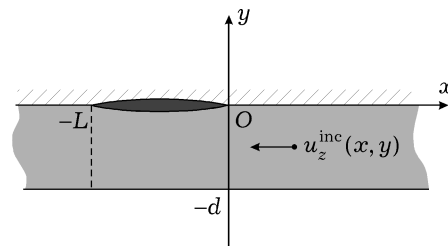


Рис. 1

$$\tau_{zy} = \mu \frac{\partial(u + u^{\text{inc}})}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad x \in (-L, 0), \quad (3)$$

$$u^{\text{tot}} = u + u^{\text{inc}} = 0, \quad y = 0, \quad x \in (-\infty, -L) \cup (0, \infty). \quad (4)$$

Тут  $u^{\text{inc}}(x, y) = e^{\gamma_j x} \sin(\beta_j y)$  – збуджувальна хвиля, яка поширюється у від'ємному напрямі осі  $Ox$ ;  $\beta_j = \pi(2j-1)/2d$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ;  $\gamma_j = \sqrt{\beta_j^2 - k^2}$ ,  $\text{Re } \gamma_j > 0$ ;  $k = k' + ik''$  – хвильове число ( $k', k'' > 0$ ,  $k' \gg k''$ ).

Розв'язок крайової задачі (1)–(4) необхідно знайти у класі функцій, які забезпечують граничне поглинання, коли  $|x| \rightarrow \infty$ , а також виконання таких умов у вершинах тріщини:

$$u \sim \rho^{1/2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \sim \rho^{-1/2}, \quad \rho = [x^2 + y^2]^{1/2} \rightarrow 0, \quad \rho = [(x+L)^2 + y^2]^{1/2} \rightarrow 0. \quad (5)$$

Розглянемо два випадки сформульованої задачі.

**1. Напівнескінченна тріщина ( $L \rightarrow \infty$ ).** Введемо трансформанту Фур'є дифрагovanого поля  $u(x, y)$ :

$$U(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i\alpha x} dx, \quad (6)$$

де  $\alpha = \text{Re } \alpha + i \text{Im } \alpha$ ,  $\alpha \equiv \sigma + i\tau$ .

Застосовуючи перетворення Фур'є до рівняння (1), подамо трансформанту (6) у вигляді

$$U(\alpha, y) = B(\alpha) e^{\gamma y} + C(\alpha) e^{-\gamma y}. \quad (7)$$

Тут  $B(\alpha), C(\alpha)$  – невідомі функції;  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \alpha^2}$ ,  $\text{Re } \gamma > 0$ ; функція  $U(\alpha, y)$  – регулярна в смужі  $\alpha \in \Pi : \{-\tau_0 < \tau < \tau_0\}$ , де  $\tau_0 \leq \min\{\text{Im } k, \text{Re } \gamma_1\}$ ,  $\text{Re } \gamma_1 < \text{Re } \gamma_j$ , коли  $j > 1$ .

Розглянемо інтеграли Фур'є

$$U'^+(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u'_y(x, 0) e^{i\alpha x} dx, \quad (8)$$

$$\Phi'(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 u'_y(x, 0) e^{i\alpha x} dx, \quad (9)$$

де  $U'^+(\alpha, 0)$  – функція від параметра  $\alpha$ , регулярна у півплощині  $\tau > -\tau_0$ ;  $\Phi'(\alpha, 0)$  – функція, регулярна в нижній півплощині  $\tau < \tau_0$ .

Продиференціювавши вираз (7) за змінною  $y$  і застосувавши інтегральне перетворення Фур'є до граничної умови (2), знаходимо

$$C(\alpha) = B(\alpha) e^{-2\gamma d}. \quad (10)$$

При  $y \rightarrow 0$ , беручи до уваги вирази (6)–(10) і використовуючи граничну умову (3), отримаємо співвідношення

$$U'^+(\alpha, 0) + \frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} = \gamma B(\alpha) [1 - e^{-2\gamma d}]. \quad (11)$$

Далі рівняння (7) перепишемо так:

$$U(\alpha, y) = \left[ \frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} + U'^+(\alpha, 0) \right] \frac{\text{ch } \gamma(y+d)}{\gamma \text{sh } (\gamma d)}. \quad (12)$$

Використовуючи подання (12) і застосовуючи Фур'є перетворення граничної умови (4), отримуємо рівняння Вінера – Гопфа, яке запишемо у вигляді

$$M(\alpha)U^{++}(\alpha, 0) + \frac{i\beta_j M(\alpha)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} + J_1(\alpha) = 0, \quad \alpha \in \Pi. \quad (13)$$

Тут  $U^{++}(\alpha, 0)$  і  $J_1(\alpha)$  – шукані функції, причому  $J_1(\alpha)$  – функція, регулярна у нижній півплощині  $\tau < \tau_0$ :

$$J_1(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 u(x, 0) e^{i\alpha x} dx, \quad (14)$$

а  $M(\alpha)$  – відома функція, регулярна у смузі  $\alpha \in \Pi$ , а за межами цієї смуги допускає прості нулі та полюси:

$$M(\alpha) = \frac{\text{ch}(\gamma d)}{\gamma \text{sh}(\gamma d)}. \quad (15)$$

Функцію  $M(\alpha)$  (15) можна факторизувати методом нескінченних добутків і подати у вигляді

$$M(\alpha) = M_+(\alpha)M_-(\alpha). \quad (16)$$

Тут

$$M_-(\alpha) = M_+(-\alpha),$$

$$M_+(\alpha) = \frac{\sqrt{\cos(kd)} \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 + \frac{\alpha}{i\gamma_n^{(c)}} \right] e^{i\alpha \frac{d}{\pi n}}}{i\sqrt{k \sin(kd)} \left( 1 + \frac{\alpha}{i\gamma_0^{(s)}} \right) \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 + \frac{\alpha}{i\gamma_n^{(s)}} \right] e^{i\alpha \frac{d}{\pi n}}}, \quad (17)$$

$$\gamma_n^{(c)} = \sqrt{\pi^2 \frac{(2n-1)^2}{4d^2} - k^2}, \quad \gamma_n^{(s)} = \sqrt{\pi^2 \frac{n^2}{d^2} - k^2}, \quad \gamma_0^{(s)} = -ik.$$

У формулах (16), (17) функції  $M_+(\alpha)$ ,  $M_-(\alpha)$  є регулярними і не мають нулів відповідно у півплощинах  $\tau > -\tau_0$ ,  $\tau < \tau_0$ . При  $|\alpha| \rightarrow \infty$  в областях регулярності справджується асимптотична оцінка  $M_{\pm}(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$ . За межами областей регулярності функції  $M_{\pm}(\alpha)$  мають прості нулі і полюси відповідно у точках  $\alpha = \mp i\gamma_n^{(c)}$  і  $\alpha = \mp i\gamma_n^{(s)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а також простий полюс, коли  $\alpha = \mp k$ .

Асимптотична поведінка функції  $U^{++}(\alpha, 0)$  (8) в області регулярності, коли  $|\alpha| \rightarrow \infty$ , така:  $U^{++}(\alpha, 0) = O(\alpha^{-1/2})$ . Функція  $J_1(\alpha)$  (14) в області  $\tau < \tau_0$  при  $|\alpha| \rightarrow \infty$  має асимптотику  $J_1(\alpha) = O(\alpha^{-3/2})$ .

Далі функціональне рівняння (13) переписуємо у вигляді

$$M_+(\alpha)U^{++}(\alpha, 0) + S^+(\alpha) = -\frac{J_1(\alpha)}{M_-(\alpha)} - S^-(\alpha), \quad \alpha \in \Pi, \quad (18)$$

де

$$S^+(\alpha) = \frac{i\beta_j M_+(\alpha)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} - \frac{i\beta_j M_+(i\gamma_j)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}, \quad (19)$$

$$S^-(\alpha) = \frac{i\beta_j M_+(i\gamma_j)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}. \quad (20)$$

Доданки у лівій частині рівняння (18) є регулярними функціями змінної  $\alpha$  в області  $\tau > -\tau_0$ , а в правій – в області  $\tau < \tau_0$ . Кожен доданок функціонального рівняння (18) при  $|\alpha| \rightarrow \infty$  в області регулярності прямує до нуля, як  $O(\alpha^{-1})$ . Крім того, функції справа і зліва у рівнянні (18) мають спільну смугу регулярності  $\Pi$ . Отже, застосовуючи теорему Ліувілля, розв'язок рівняння (18) запишемо так:

$$U'^+(\alpha, 0) = -\frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)} \left[ 1 - \frac{M_+(i\gamma_j)}{M_+(\alpha)} \right], \quad (21)$$

$$J_1(\alpha) = -\frac{i\beta_j M_+(i\gamma_j) M_-(\alpha)}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}. \quad (22)$$

Тепер, враховуючи співвідношення (12) і застосовуючи обернене перетворення Фур'є, отримаємо вирази для дифрагованого поля зміщень у пластині, яка при  $x > 0, y = 0$  абсолютно жорстко з'єднана з півпростором, а поверхня  $x < 0, y = 0$  є відшарованою від цього півпростору:

$$u(x, y) = \begin{cases} \sum_{q=1}^{\infty} R_{jq} e^{-\gamma_q^{(c)} x} \sin\left(\frac{\pi(2q-1)}{2d} y\right), & x > 0, \\ -\sin(\beta_j y) e^{\gamma_j x} + \sum_{q=0}^{\infty} T_{jq} e^{\gamma_q^{(s)} x} \cos\left(\frac{\pi q}{d} y\right), & x < 0, \end{cases} \quad j=1, 2, \dots \quad (23)$$

Тут

$$R_{jq} = \frac{\pi\beta_j M_+(i\gamma_j) (2q-1) M_+(i\gamma_q^{(c)})}{2d^2 (\gamma_q^{(c)} + \gamma_j) \gamma_q^{(c)}}, \quad q=1, 2, \dots, \quad j=1, 2, \dots, \quad (24)$$

$$T_{jq} = \frac{\varepsilon_q \beta_j M_+(i\gamma_j)}{d M_+(i\gamma_q^{(s)}) (\gamma_q^{(s)} - \gamma_j) \gamma_q^{(s)}}, \quad q=0, 1, 2, \dots, \quad j=1, 2, \dots \quad (25)$$

Використовуючи формули (23), вираз для повного поля подаємо формулою  $u^{\text{tot}} = u + e^{\gamma_j x} \sin \beta_j y$ . Далі встановлюємо, що  $u^{\text{tot}}$  забезпечує виконання граничних умов на вільній поверхні пластини при  $y = -d$  і на поверхні з'єднання при  $y = 0$ . Крім того, із виразів (24), (25) випливає асимптотична поведінка коефіцієнтів  $R_{jq}, T_{jq} = O(q^{-3/2})$ , а отже, при  $y = 0$  маємо, що  $u = O(x^{1/2})$  і  $du/dy = O(x^{-1/2})$ , коли  $x \rightarrow -0$ .

**2. Випадок скінченної тріщини ( $L < \infty$ ).** У цьому випадку крайова задача (1)–(4) зводиться до рівняння Вінера – Гопфа:

$$[\Psi^{(+)}(\alpha) + e^{-i\alpha L} \Psi^-(\alpha)] M(\alpha) + J_1(\alpha) = 0, \quad \alpha \in \Pi. \quad (26)$$

Тут  $\Psi^-(\alpha)$ ,  $\Psi^{(+)}(\alpha)$ ,  $J_1(\alpha)$  – шукані функції:

$$\Psi^-(\alpha) = U'^-(\alpha, 0) - \frac{i\beta_j e^{-\gamma_j L}}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}, \quad (27)$$

$$\Psi^{(+)}(\alpha) = U'^+(\alpha, 0) + \frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}, \quad (28)$$

$$J_1(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^0 u(x, 0) e^{i\alpha x} dx, \quad (29)$$

$$U'^-(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-L} u'_y(x, 0) e^{i\alpha(x+L)} dx. \quad (30)$$

Функція  $\Psi^-(\alpha)$  є регулярною у комплексній півплощині  $\tau < \tau_0$ ;  $\Psi^{(+)}(\alpha)$  – регулярна в області  $\tau > -\tau_0$ , за винятком точки  $\alpha = i\gamma_j$  ( $\text{Re } \gamma_j > \tau_0$ ), де вона має простий полюс;  $J_1(\alpha)$  – ціла функція.

Асимптотична поведінка функцій  $\Psi^-(\alpha)$  (27),  $\Psi^{(+)}(\alpha)$  (28) в областях регулярності, коли  $|\alpha| \rightarrow \infty$ , така:  $\Psi^{(+)}(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$ ,  $\Psi^-(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$ . Ціла функція  $J_1(\alpha)$  (29) при  $|\alpha| \rightarrow \infty$  в області  $\tau < \tau_0$  спадає до нуля:  $J_1(\alpha) = O(\alpha^{-3/2})$ , а в області  $\tau > -\tau_0$  спадає до нуля добуток  $e^{i\alpha L} J_1(\alpha) = O(\alpha^{-3/2})$ .

Далі функціональне рівняння (26) переписуємо у вигляді

$$M_+(\alpha)\Psi^{(+)}(\alpha) + e^{-i\alpha L}M_+(\alpha)\Psi^-(\alpha) + \frac{J_1(\alpha)}{M_-(\alpha)} = 0, \quad \alpha \in \Pi, \quad (31)$$

$$M_-(\alpha)e^{i\alpha L}\Psi^{(+)}(\alpha) + M_-(\alpha)\Psi^-(\alpha) + \frac{e^{i\alpha L}J_1(\alpha)}{M_+(\alpha)} = 0, \quad \alpha \in \Pi. \quad (32)$$

Факторизуючи рівняння (31), (32), отримуємо систему інтегральних рівнянь другого роду, які після заміни інтегралів рядами лишків зводимо до таких співвідношень:

$$M_+(\alpha)\Psi^{(+)}(\alpha) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n e^{-\gamma_n^{(s)}L}\Psi^-(i\gamma_n^{(s)})}{id\gamma_n^{(s)}M_+(i\gamma_n^{(s)})(i\gamma_n^{(s)} + \alpha)} = \frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}} \frac{M_+(i\gamma_j)}{\alpha - i\gamma_j}, \quad (33)$$

$$M_-(\alpha)\Psi^-(\alpha) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n e^{-\gamma_n^{(s)}L}\Psi^{(+)}(i\gamma_n^{(s)})}{id\gamma_n^{(s)}M_+(i\gamma_n^{(s)})(\alpha - i\gamma_n^{(s)})} = 0, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1/2, & n = 0, \\ 1, & n > 0. \end{cases} \quad (34)$$

Покладаючи у першому рівнянні  $\alpha = i\gamma_\ell^{(s)}$ , а у другому  $\alpha = -i\gamma_\ell^{(s)}$ ,  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ , із функціональних співвідношень (33), (34) отримуємо нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР), які у кінцевому результаті запишемо так:

$$[I + A]X = F. \quad (35)$$

Тут  $X = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $x_n = M_+(i\gamma_n^{(s)})\Psi^{(+)}(i\gamma_n^{(s)})$ ,  $x_n = O(n^{-1})$ , коли  $n \rightarrow \infty$ ;  $I$  – одинична матриця;  $A = \{a_{\ell n}\}_{n,\ell=0}^{\infty}$ ,  $F = \{f_\ell\}_{\ell=0}^{\infty}$ :

$$a_{\ell n} = -\frac{\varepsilon_n d^{-2} e^{-\gamma_n^{(s)}L}}{\gamma_n^{(s)} [M_+(i\gamma_n^{(s)})]^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m e^{-\gamma_m^{(s)}L}}{[M_+(i\gamma_m^{(s)})]^2 \gamma_m^{(s)} (\gamma_\ell^{(s)} + \gamma_m^{(s)}) (\gamma_m^{(s)} + \gamma_n^{(s)})}, \quad (36)$$

$$f_\ell = \frac{\beta_j}{\sqrt{2\pi}} \frac{M_+(i\gamma_j)}{\gamma_\ell^{(s)} - \gamma_j}. \quad (37)$$

Для матричних елементів (36) при  $\ell, n \rightarrow \infty$  виконується оцінка

$$|a_{\ell n}| \leq C \frac{e^{-\pi n L/d}}{\ell n}, \quad (38)$$

де  $C$  – відома стала. Отже,  $\|A\|_{\ell^2} = \sum_{\ell, n} |a_{\ell n}|^2 < \infty$ , і НСЛАР (35) має єдиний

розв'язок, за винятком дискретних значень хвильового параметра  $k$ , для яких однорідне рівняння (35) допускає ненульовий розв'язок.

Дифраговане поле зміщень запишемо у вигляді

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\Psi^-(\alpha)e^{-i\alpha L} + \Psi^{(+)}(\alpha)] \frac{\text{ch } \gamma(y+d)}{\gamma \text{sh } (\gamma d)} e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (39)$$

Тут функції  $\Psi^-(\alpha)$ ,  $\Psi^{(+)}(\alpha)$  визначаються формулами (33), (34).

Використовуючи формулу (39), в області  $\mathcal{D}_1 = \{x, y : -L < x < 0, -d < y < 0\}$  поле зміщень подамо так:

$$u^{\text{tot}}(x, y) = \frac{\sqrt{2\pi}}{d} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_q}{\gamma_q^{(s)}} \cos \frac{\pi q y}{d} \left[ \Psi^{(+)}(i\gamma_q^{(s)}) e^{\gamma_q^{(s)} x} - \Psi^{-}(-i\gamma_q^{(s)}) e^{-\gamma_q^{(s)}(x+L)} \right]. \quad (40)$$

Характеристичне рівняння для визначення спектра вихідної дифракційної задачі запишемо у вигляді:

$$\det[I + A(\Omega)] = 0. \quad (41)$$

Тут  $\Omega = kd = \omega d/c$ ,  $c$  – швидкість поширення  $SH$ -хвилі у пластині,  $\omega$  – комплексна частота.

**3. Одномодове наближення.** Якщо  $\text{Re } kd < \pi/2$ , то у динамічній системі, яку розглядаємо, існує тільки одна незгасаюча мода в хвилеводній області  $\mathcal{D}_1$ . Тоді за умови, що  $\text{Re } kL \gg 1$ , зі співвідношень (33), (34) отримуємо наближену систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\Psi^{(+)}(k) - \frac{e^{ikL}}{4k^2 d M_+^2(k)} \Psi^{-}(-k) = \frac{\beta_j}{\sqrt{2\pi}} \frac{M_+(i\gamma_j)}{M_+(k)(k - \gamma_j)}, \quad (42)$$

$$\Psi^{-}(-k) - \frac{e^{ikL}}{4k^2 d M_+^2(k)} \Psi^{(+)}(k) = 0. \quad (43)$$

Розв'язок цієї системи рівнянь подамо у вигляді

$$\Psi^{(+)}(k) = \frac{\beta_j}{\sqrt{2\pi}} \frac{M_+(i\gamma_j)}{M_+(k)(k - \gamma_j)D(k)}, \quad (44)$$

$$\Psi^{-}(-k) = \frac{\beta_j M_+(i\gamma_j) e^{ikL}}{4\sqrt{2\pi} k^2 d M_+^3(k)(k - \gamma_j)D(k)}. \quad (45)$$

Тут

$$D(k) = 1 - \left[ \frac{e^{ikL}}{4k^2 d M_+^2(k)} \right]^2. \quad (46)$$

Вираз (46) визначає наближене дисперсійне рівняння для знаходження комплексних резонансних частот, яке записуємо так:

$$D(k) = 0. \quad (47)$$

#### 4. Аналіз чисельних результатів.

**1°. Дифракція на вершині напівнескінченної тріщини (відшаруванні).** При обчисленні покладали, що хвильове число  $k$  має малу уявну частину,  $k'' \leq 0.0001 \text{ м}^{-1}$ . На рис. 2 показано залежність від безрозмірної товщини пластини  $\text{Re } kd$  модулів комплексних амплітуд  $R_{jq}$  (див. (24)). За фізичним змістом  $R_{jq}$  – це комплексна амплітуда  $q$ -ї хвилеводної моди, що збуджується у пластині  $P$  при дифракції на краю тріщини  $j$ -ї хвилеводної моди в області  $x > 0$  (рис. 2а – при  $j = 1$ , рис. 2б – при  $j = 2$ ).

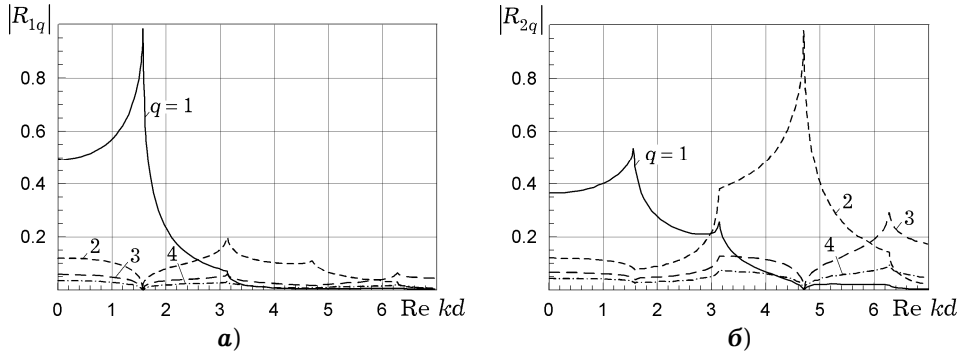


Рис. 2

Як видно із поведінки кривих, наведених на рис. 2а, серед коефіцієнтів трансформації  $R_{1q}$  модуль коефіцієнта відбивання  $|R_{11}|$  досягає максимального значення ( $|R_{11}| \rightarrow 1$ ), коли  $\text{Re} kd \rightarrow \pi/2$ . Параметр  $\text{Re} kd = \pi/2$  відповідає критичній товщині пластини для першої моди (крива при  $q = 1$  на рис. 2а). При цьому трансформація першої моди у вищі типи коливань за цих умов, обумовлена дифракцією на межі відшарування, практично відсутня (див. поведінку кривих при  $q = 2, 3, 4$ ).

На рис. 2а спостерігаємо також зростання модуля коефіцієнта  $|R_{12}|$ , коли  $\text{Re} kd \rightarrow \pi$  (крива при  $q = 2$ ). Параметр  $\text{Re} kd = \pi$  співпадає зі значенням критичної товщини пластини для першої хвилеводної моди в області відшарування ( $x < 0$ ).

Аналогічну картину бачимо на рис. 2б. Максимального значення досягає модуль коефіцієнта відбивання  $|R_{22}|$ , коли  $\text{Re} kd \rightarrow 3\pi/2$ , що відповідає критичній товщині пластини  $P$  в області  $x > 0$ .

На рис. 3 показано залежності від безрозмірного параметра  $\text{Re} kd$

модуля комплексних коефіцієнтів трансформації  $|T_{1q}|$  при  $q = 0, 1, 2, 3$ .

За фізичним змістом  $T_{1q}$  визначає комплексну амплітуду  $q$ -ї хвилеводної моди, що збуджується в пластині  $P$  при дифракції на краю тріщини першої хвилеводної моди в області  $x < 0$ . Крива при  $q = 0$  ілюструє залежність модуля комплексної амплітуди хвилеводної моди з нульовим значенням критичної частоти  $T_{10}$ .

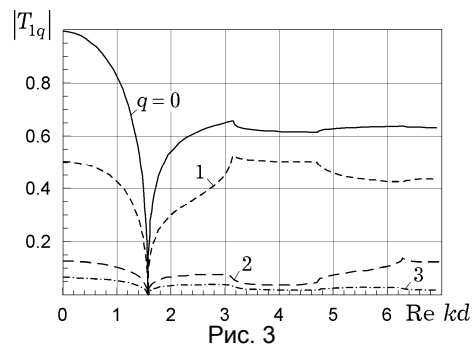


Рис. 3

Оскільки, як видно з рис. 3, при  $\text{Re} kd \rightarrow \pi/2$  усі комплексні амплітуди  $T_{1q} \rightarrow 0$ , то за цих умов  $SH$ -хвиля не проходить в область відшарування пластини. Це пояснює ефект практично повного відбивання збуджуючої хвилеводної моди з індексом  $j = 1$  від вершини відшарування (див. криву при  $q = 1$  на рис. 2а).

Зауважимо, що при  $\text{Re} kd < \pi/2$  єдиною незагасаючою модою пластини в області  $x < 0$  є мода з індексом  $q = 0$ . Модуль комплексної амплітуди цієї моди є максимальним при  $\omega \rightarrow 0$ , і  $|T_{10}| \rightarrow 0$ , коли  $\text{Re} kd \rightarrow \pi/2$ . При  $\text{Re} kd > \pi$  коефіцієнт  $|T_{10}|$  є практично не залежним від параметра  $\text{Re} kd$ , тобто ця хвиля поширюється у пластині  $P$  при  $x < 0$  без дисперсії.

Із наведених закономірностей дифракції  $SH$ -моди на вершині відшарування бачимо, що максимальне відбивання має місце на частотах, близьких до критичної частоти збуджувальної моди. Цю умову можна використати для отримання максимального відгуку від вершини відшарування, беручи  $\omega > \omega_n^{\text{cr}} = \pi c \frac{2n-1}{2d}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , для області  $x > 0$ .

**2°. Резонансні коливання в системі зі скінченною тріщиною.** Розглянемо скінченну тріщину на межі з'єднання півпростору з пластинною. В обмеженій хвилеводній області  $\mathcal{D}_1$  під тріщиною може поширюватись хвилеводна мода з нульовим значенням критичної частоти ( $\omega_0^{\text{cr}} = 0$ ). В дотичних до  $\mathcal{D}_1$  хвилеводах

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2 &: \{x, y : -\infty < x < -L, -d < y < 0\}, \\ \mathcal{D}_3 &: \{x, y : 0 < x < \infty; -d < y < 0\} \end{aligned} \quad (48)$$

мінімальна критична частота  $\omega_1^{\text{cr}} = \pi c/(2d)$ , а отже, при  $0 < \omega < \omega_1^{\text{cr}}$  в області  $\mathcal{D}_1$  можуть виникати резонансні коливання.

Для визначення резонансних режимів дослідили комплексні корені рівняння (41), яке розглядали на рімановій поверхні як функцію спектрального параметра  $\Omega$  з точками галуження на дійсній осі  $\Omega = \pm \pi n$  і  $\Omega = \pm \pi(2n - 1)/2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Необхідні розрізи комплексної площини  $\Omega$  вибирали з умови, яка забезпечує формування на першому листі ріманової поверхні загасаючих в часі власних коливань [3, 4].

Кількість комплексних коренів рівняння (41) в області  $0 < \text{Re } \omega < \omega_1^{\text{cr}}$  залежить від величини параметра  $p = L/d$ . При малих значеннях  $p$  ( $p < 2.5$ ) існує тільки один корінь рівняння (41), а при збільшенні  $p$  кількість коренів, які йому відповідають, зростає.

На рис. 4 наведено залежності дійсної ( $\text{Re } \Omega_{1(2,3)} > 0$ ) і уявної ( $\text{Im } \Omega_{1(2,3)} < 0$ ) частин коренів цього рівняння від  $p = L/d$  (для перших трьох коренів). На відповідних комплексних частотах спостерігаємо резонанс основної моди ( $u(x, y) \sim e^{\pm \gamma_0^{(s)} x}$ ) у хвилеводній області  $\mathcal{D}_1$ .

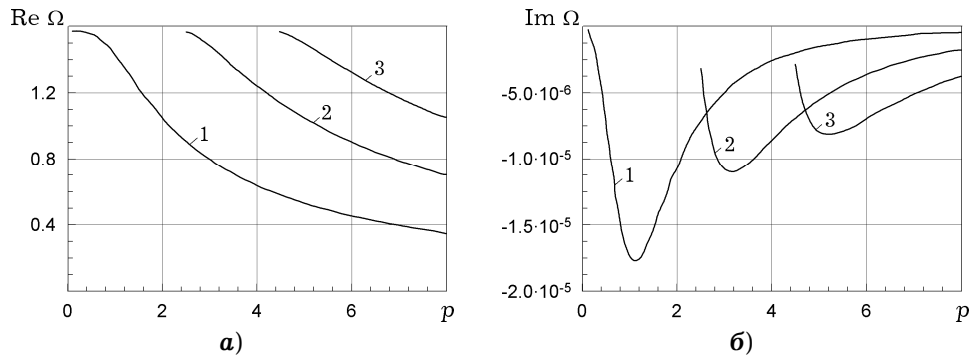


Рис. 4

У зв'язку з малим значенням модуля уявної частини комплексного спектрального параметра  $|\text{Im } \Omega_1|/|\text{Re } \Omega_1| \sim 10^{-5}$  (див. рис. 4б) добротність резонансних коливань є високою, про що свідчить утворення максимуму в точці, яка відповідає дійсній частині резонансної частоти на графіку залежності  $|\Psi^{(+)}(i\gamma_0^{(s)})|$  від безрозмірної довжини тріщини  $\text{Re } kL$  при  $p = 1$  (рис. 5). Зауважимо, що при зростанні  $p$  абсолютні значення уявних частин коренів рівняння (41) зменшуються (див. рис. 4б), а отже, добротність коливань у резонансній області  $\mathcal{D}_1$  зростає.

Дані, наведені на рис. 4, можна використати для вибору частоти зондування при діагностуванні тріщин у з'єднаннях пластин із півпростором. Оскільки  $0 < \text{Re } \omega < \omega_1^{\text{cr}}$ , і хвиля такої частоти не може поширюватись без загасання у хвилеводних областях (48), то зондування дефекту можна провести, скануючи вільну від напружень зовнішню поверхню пластини локальним випромінювачем.

Поведінка кривих на рис. 4 показує, що добротний резонансний ефект в області  $\mathcal{D}_1$  можна спостерігати для значень параметра  $p \geq 0.1$ . Ця умова накладає обмеження на співвідношення між довжиною тріщини і товщиною пластини, за яких можна отримати резонансний відгук при діагностуванні.



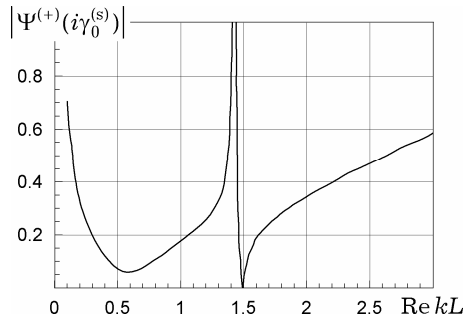


Рис. 5

Для наближеного знаходження резонансних частот використали рівняння (47), яке отримали в одномодовому наближенні. На рис. 6 показано залежність відносної похибки значень першої резонансної частоти як функції параметра  $p$ :

$$\delta(p) = \frac{|\Omega_1(p) - \Omega_1^{(1)}(p)|}{|\Omega_1(p)|} \times 100\% .$$

Тут  $\Omega_1(p)$  і  $\Omega_1^{(1)}(p)$  – комплексні корені відповідно рівнянь (41) і (47).

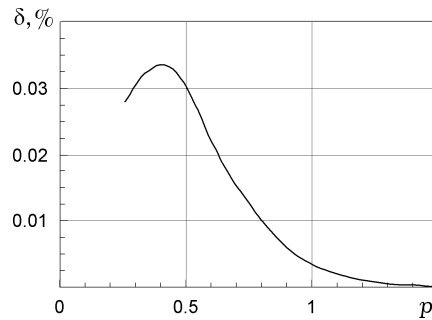


Рис. 6

Як бачимо на цьому рисунку, відносна похибка визначення першого комплексного кореня за наближеним рівнянням (47) не перевищує 0.04 %, а отже, одномодове наближення можна використовувати для спрощення аналізу.

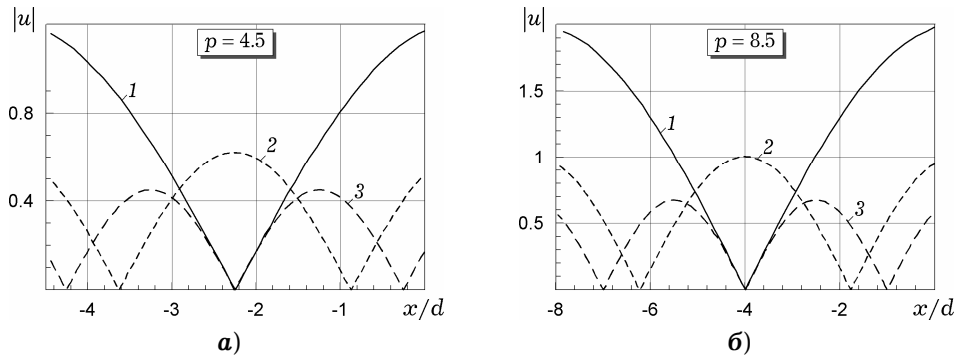


Рис. 7

На рис. 7 проілюстровано розподіл модуля поля зміщень  $|u|$  на вільній поверхні  $\{x, y : -L < x < 0, y = -d\}$  пластини під тріщиною (залежність від  $x/d$ ) при збудженні досліджуваної структури на комплексних резонансних частотах при значеннях параметра  $p = 4.5$  (рис. 7а) і  $p = 8.5$  (рис. 7б) для перших трьох коренів рівняння (47) (відповідно криві 1–3).

Поведінка кривих на рис. 7 відображає поведінку модуля власних функцій однорідної дифракційної задачі (1)–(4), що відповідають різним значенням комплексного спектрального параметра  $\Omega$ . Як видно із графіків, наведених на цьому рисунку, зростання параметра  $p$  якісно не впливає на розподіл модуля поля зміщень. Оскільки при збільшенні  $p$  уявні частини резонансних частот прямують до нуля, то відповідні власні функції за цих умов відображають розподіл поля зміщень для дійсних частот.

У табл. 1 подано значення довжини тріщини і відповідні їм дійсні та уявні частини комплексної резонансної частоти, на якій спостерігається резонанс основної моди у з'єднанні титанової ( $c = 3270$  м/сек) і нікелевої ( $c = 2960$  м/сек) пластин товщини  $d = 10$  мм з півпростором.

Порівнюючи дані, наведені у табл. 1, бачимо, що чутливість резонансної частоти до зміни довжини тріщини є вищою для пластин з більшою швидкістю поширення  $SH$ -хвиль у пластині, а отже, у таких пластинах можна точніше виявляти зміни довжини міжфазної тріщини за зсувом резонансної частоти.

Таблиця 1

	титан	нікель
$L, \text{мм}$	$\omega, \text{рад/сек}$	$\omega, \text{рад/сек}$
1	$513645 - i0.0766074$	$464951 - i0.0693449$
1.5	$513612 - i0.20069$	$464921 - i0.181665$
2	$513520 - i0.376162$	$464838 - i0.34501$
2.5	$513324 - i0.60489$	$464660 - i0.547546$
3	$512967 - i0.886432$	$464337 - i0.802398$
4	$511527 - i1.59386$	$463033 - i1.44276$
5	$508704 - i2.44434$	$460478 - i2.21262$
10	$467195 - i5.68506$	$422905 - i5.14611$
15	$402326 - i4.97067$	$364185 - i4.49945$
20	$343917 - i3.44204$	$311313 - i3.11573$
30	$261295 - i1.60675$	$236524 - i1.45443$
	$484271 - i3.53072$	$438361 - i3.196$
40	$209259 - i0.839975$	$189421 - i0.760344$
	$406369 - i2.80089$	$367845 - i2.53536$
50	$174179 - i0.487761$	$157667 - i0.441521$
	$343239 - i1.79332$	$310700 - i1.62331$
	$491103 - i2.59858$	$444546 - i2.35223$

Отримані значення резонансних частот можна використати для зондування при селективному діагностуванні міжфазних дефектів (налаштуванні на виявлення тріщин заданої довжини) або при визначенні величини підросання тріщини за зсувом резонансної частоти. Важливо, що для коротких тріщин резонансна частота для діагностування визначається однозначно, а зі зростанням довжини тріщини ( $p > 2.5$ ) кількість резонансних частот, що відповідає фіксованому  $p$ , зростає (див. рис. 4).

**Висновки.** Показано, що максимальний коефіцієнт відбивання зондувальної  $SH$ -хвилі від краю напівнескінченного відшарування пластини від півпростору досягається на частотах, близьких до критичної частоти збудженої у пластині хвилеводної моди.

Показано можливість збудження високочастотних резонансних поперечних коливань в абсолютно жорсткому з'єднанні пластини з півпростором за наявності міжфазної тріщини (відшарування). Встановлено, що при зростанні відношення довжини тріщини до товщини пластини уявна частина комплексної резонансної частоти зменшується. Отримані значення частот можна використати для вибору оптимального режиму зондування, орієнтованого на виявлення дефектів фіксованих розмірів, а також для визначення величини підростання тріщини при навантаженні за зсувом резонансної частоти.

Для розглянутої динамічної системи отримано оцінку нижньої межі відношення довжини тріщини до товщини пластини, при якій можливе її діагностування на основі збудження резонансного відгуку.

Виявлено властивість розгалуження коренів характеристичного рівняння для визначення спектра дифракційної задачі при зростанні відношення довжини тріщини до товщини пластини. Показано, що відповідні комплексні частоти знаходяться в області, обмеженій зверху мінімальним значенням критичної частоти  $\omega_1^{cr} = \pi c/(2d)$ .

1. Гринченко В. Т., Городецкая Н. С. Краевой резонанс при изгибных колебаниях полуполосы // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1985. – № 4. – С. 20–23.
2. Курыляк Д. Б., Назарчук З. Т., Войтко М. В. Анализ поля плоской  $SH$ -хвилі, розсіяної скінченною тріщиною на межі поділу матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – 42, № 6. – С. 5–16.  
Те саме: Kuryliak D. B., Nazarchuk Z. T., Voytko M. V. Analysis of the field of a plane  $SH$ -wave scattered by a finite crack on the interface of materials // Mater. Sci. – 2006. – 42, No. 6. – P. 711–724.
3. Сиренко Ю. К., Сухаревский И. В., Сухаревский О. И., Яшина Н. П. Фундаментальные и прикладные задачи теории рассеяния электромагнитных волн. – Харьков: Крок, 2000. – 343 с.
4. Шестопалов В. П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур. – Киев: Наук. думка, 1987. – 288 с.
5. Asghar S., Zaman F. D. Diffraction of  $SH$ -waves by a finite crack in a layer overlying a half space // Boll. Geofis. Teor. Appl. – 1987. – 19, No. 113. – P. 43–50.
6. Glushkov E., Glushkova N., Golub M., Boström A. Natural resonance frequencies, wave blocking, and energy localization in an elastic half-space and waveguide with a crack // J. Acoust. Soc. Am. – 2006. – 119, No. 6. – P. 3589–3598.
7. Glushkov Ye. V., Glushkova N. V., Yeregin A. A., Mikhas'kiv V. V. The layered element method in the dynamic theory of elasticity // J. Appl. Math. Mech. – 2009. – 73, No. 4. – P. 449–456.
8. Golub M. V., Zhang C., Wang Y.  $SH$ -wave propagation and resonance phenomena in a periodically layered composite structure with a crack // J. Sound Vib. – 2011. – 330. – P. 3141–3154.
9. Kuryliak D. B., Voytko M. V. Wiener – Hopf analysis of the elastic wave diffraction by the finite crack located at the plane interface between the elastic isotropic slab and half-space medium // Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED), Lviv–Tbilisi, Oct. 11–14, 2004. – P. 22–25.
10. Pal S. C., Chosh M. L. High frequency scattering of antiplane shear waves by interface crack // Indian J. Pure Appl. Math. – 1990. – 21, No. 12. – P. 1107–1124.
11. Rokhlin S. I. Resonance phenomena of Lamb waves scattering by a finite crack in a solid layer // J. Acoust. Soc. Am. – 1981. – 69, No. 4. – P. 922–928.
12. Wang Y. S., Gross D. Transfer matrix method of wave propagation in a layered medium with multiple interface cracks: anti-plane case // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2001. – 68. – P. 499–503.
13. Zaman F. D. Diffraction of  $SH$ -waves across a mixed boundary in a plate // Mech. Res. Commun. – 2001. – 28, No. 2. – P. 171–178.

**О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГОЙ SH-ВОЛНЫ С МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ В  
АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОМ СОЕДИНЕНИИ ПЛАСТИНЫ С ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ**

Решена задача дифракции упругой SH-волны на межфазной трещине, образовавшейся на границе абсолютно жесткого соединения пластины и полупространства. Рассмотрены полубесконечную и конечную трещины. Методом Винера – Хопфа решение задачи для полубесконечной трещины получено в аналитическом виде. В случае конечной трещины задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Исследованы коэффициенты трансформации волн на вершине полубесконечной межфазной трещины. В случае конечной трещины найдены собственные значения оператора дифракционной задачи, определяющие комплексные резонансные частоты динамической системы. Приведены зависимости собственных частот и колебаний от параметров структуры.

**ON INTERACTION OF ELASTIC SH-WAVE WITH INTERFACE  
CRACK IN ABSOLUTELY RIGID JOINT OF PLATE AND HALF-SPACE**

The problem of elastic SH-wave mode diffraction by the interface crack, formed on the border of absolutely rigid junction of a plate and a half-space is solved. The semi-infinite and finite cracks are considered. The solution of the wave diffraction problem for semi-infinite crack is obtained in the analytical form by applying Whiner – Hopf technique. In the case of a finite crack, the problem is reduced to solution of the infinite system of linear algebraic equations. The coefficient of wave transformation at the edge of the interphase crack is investigated. In the case of the semi-infinite crack, the eigenvalues of the operator of dynamic problem, which define the complex resonance frequencies of the dynamic system, are obtained. The examples of the dependence of the own frequencies and oscillations from the structure parameters are presented.

Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка  
НАН України, Львів

Одержано  
30.06.11