

## УСТАНОВИВШИЕСЯ ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПРИЗМЫ

*Аналитически решена задача о вынужденных установившихся колебаниях ортотропного прямоугольника. Методом суперпозиции задача сводится к квазирегулярной бесконечной системе линейных уравнений. Использование лимитант Кояловича позволяет получить двусторонние оценки для всей бесконечной последовательности неизвестных. Приведены численные примеры реализации алгоритма.*

Несмотря на давнюю историю [3], задачи о напряженном состоянии и установившихся колебаниях прямоугольника не имеют точного решения, в связи с чем наблюдается интерес к этой задаче даже в случае статики [9–11]. В [12] рассматриваются близкие по методу решения задачи о поперечных колебаниях прямоугольной пластины. Интерес к этой задаче вызван также возможностью ее использования для разработки численных методов применительно к объектам с более сложной геометрией [8]. В статье получено решение в виде рядов Фурье, для коэффициентов которых строятся близкие двусторонние оценки, позволяющие определить коэффициенты рядов с требуемой точностью.

**Постановка задачи.** Рассмотрим плоскую деформацию прямоугольного бруса  $(x, y) \in \{-a, a\} \times \{-b, b\}$ . Положим, что плоскость упругой симметрии расположена перпендикулярно оси  $Oz$ . Тогда компоненты вектора смещений  $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$  таковы, что  $u = u(x, y)e^{-i\omega t}$ ,  $v = v(x, y)e^{-i\omega t}$ ,  $w = w_0 e^{-i\omega t}$  ( $w_0$  – некоторая константа), а деформации и напряжения  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . Уравнения колебаний имеют ту же форму, что и для изотропного тела, и могут быть записаны в форме [3]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (1)$$

В случае ортотропного материала связь между компонентами вектора смещений и тензора напряжений может быть задана при помощи технических констант:  $\nu_1, \nu_2$  и  $E_1, E_2$  – соответственно коэффициентов Пуассона и модулей Юнга в направлениях координатных осей  $Ox$  и  $Oy$ , а также  $G$  – модуля сдвига:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{E_1} \sigma_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{E_2} \sigma_{yy} &= \nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Подстановка (2) в уравнения (1) в случае вынужденных установившихся колебаний приводит к системе двух дифференциальных уравнений второго порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left( G + \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} \nu_1 \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\pi^2 G \Omega^2}{4} u &= 0, \\ \left( G + \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} \nu_2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\pi^2 G \Omega^2}{4} v &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\Omega = \frac{2\omega}{\pi} \sqrt{\frac{\rho}{G}}$  – частота колебаний, которая вводится аналогично изотропному случаю [1].

Рассмотрим установившиеся колебания бруса под действием нормальной нагрузки:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{E_1} \sigma_{xx} \Big|_{x=\pm a} &= f(y), & \frac{\tau_{xy}}{G} \Big|_{x=\pm a} &= 0, \\ \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{E_2} \sigma_{yy} \Big|_{y=\pm b} &= g(x), & \frac{\tau_{xy}}{G} \Big|_{y=\pm b} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Ограничимся случаем симметричных по обеим осям колебаний, так как другие случаи симметрии имеют аналогичное решение.

**Общее решение и бесконечная система.** При помощи метода разделения переменных можно построить общее решение (3) в виде суммы рядов Фурье:

$$\begin{aligned} u &= C_0 \sin \Omega_{11} x + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} p_{1n} y + B_n \operatorname{ch} p_{2n} y) \sin \alpha_n x + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n \frac{(1 - \nu_1 \nu_2)(q_{1n}^2 + \Omega_2^2) - \beta_n^2 E_2 / G}{(1 + \nu_2 E_1 / G - \nu_1 \nu_2) q_{1n} \beta_n} \operatorname{sh} q_{1n} x + \right. \\ &\left. + D_n \frac{(1 - \nu_1 \nu_2)(q_{2n}^2 + \Omega_2^2) - \beta_n^2 E_2 / G}{(1 + \nu_2 E_1 / G - \nu_1 \nu_2) q_{2n} \beta_n} \operatorname{sh} q_{2n} x \right) \cos \beta_n y, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} v &= A_0 \sin \Omega_{12} y + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \operatorname{ch} q_{1n} x + D_n \operatorname{ch} q_{2n} x) \sin \beta_n y + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \frac{(1 - \nu_1 \nu_2)(p_{1n}^2 + \Omega_2^2) - \alpha_n^2 E_1 / G}{(1 + \nu_1 E_2 / G - \nu_1 \nu_2) p_{1n} \alpha_n} \operatorname{sh} p_{1n} y + \right. \\ &\left. + B_n \frac{(1 - \nu_1 \nu_2)(p_{2n}^2 + \Omega_2^2) - \alpha_n^2 E_1 / G}{(1 + \nu_1 E_2 / G - \nu_1 \nu_2) p_{2n} \alpha_n} \operatorname{sh} p_{2n} y \right) \cos \alpha_n x, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \frac{\pi \Omega}{2}, & \Omega_{11} &= \frac{\pi \Omega}{2} \sqrt{\frac{G(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1}}, & \Omega_{12} &= \frac{\pi \Omega}{2} \sqrt{\frac{G(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_2}}, \\ \alpha_n &= \frac{\pi n}{a}, & \beta_n &= \frac{\pi n}{b}. \end{aligned}$$

Входящие в (5), (6) величины  $p_{1n}, p_{2n}, q_{1n}, q_{2n}$  являются корнями следующих биквадратных уравнений:

$$\begin{aligned} p^4 + \left( \Omega_{12}^2 + \Omega_2^2 - \left( \frac{E_1}{G} - 2\nu_1 \right) \alpha_n^2 \right) p^2 + \frac{\nu_1}{\nu_2} (\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2) (\alpha_n^2 - \Omega_2^2) &= 0, \\ q^4 + \left( \Omega_{11}^2 + \Omega_2^2 - \left( \frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) \beta_n^2 \right) q^2 + \frac{\nu_2}{\nu_1} (\beta_n^2 - \Omega_{12}^2) (\beta_n^2 - \Omega_2^2) &= 0. \end{aligned}$$

Формулы (3), (5) и (6) позволяют вычислить компоненты тензора напряжений:

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_{xy}}{G} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(v_2 p_{1n}^2 + \alpha_n^2) E_1 / G - (1 - v_1 v_2) \Omega_2^2}{(1 - v_1 v_2 + v_2 E_1 / G) p_{1n}} A_n \operatorname{sh} p_{1n} y + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v_2 p_{2n}^2 + \alpha_n^2) E_1 / G - (1 - v_1 v_2) \Omega_2^2}{(1 - v_1 v_2 + v_2 E_1 / G) p_{1n}} B_n \operatorname{sh} p_{2n} y \right) \sin \alpha_n x + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(v_1 q_{1n}^2 + \beta_n^2) E_2 / G - (1 - v_1 v_2) \Omega_2^2}{(1 - v_1 v_2 + v_2 E_1 / G) q_{1n}} C_n \operatorname{sh} q_{1n} x + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(v_1 q_{2n}^2 + \beta_n^2) E_2 / G - (1 - v_1 v_2) \Omega_2^2}{(1 - v_1 v_2 + v_2 E_1 / G) q_{1n}} D_n \operatorname{sh} q_{2n} x \right) \sin \beta_n y, \\
\frac{1 - v_1 v_2}{E_1} \sigma_{xx} &= C_0 \Omega_{11} \cos \Omega_{11} x + A_0 v_2 \Omega_{12} \cos \Omega_{12} y + \\
&\quad + \frac{1 - v_1 v_2}{1 - v_1 v_2 + v_2 E_1 / G} \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \frac{\alpha_n^2 + v_2 p_{1n}^2 + v_2 \Omega_2^2}{\alpha_n} \operatorname{ch} p_{1n} y + \right. \\
&\quad \left. + B_n \frac{\alpha_n^2 + v_2 p_{2n}^2 + v_2 \Omega_2^2}{\alpha_n} \operatorname{ch} p_{2n} y \right) \cos \alpha_n x + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n \left( \frac{(q_{1n}^2 + \Omega_2^2)(1 - v_1 v_2) - \beta_n^2 E_2 / G}{(1 - v_1 v_2 + v_2 E_1 / G) \beta_n} + v_2 \beta_n \right) \operatorname{ch} q_{1n} x + \right. \\
&\quad \left. + D_n \left( \frac{(q_{2n}^2 + \Omega_2^2)(1 - v_1 v_2) - \beta_n^2 E_2 / G}{(1 - v_1 v_2 + v_2 E_1 / G) \beta_n} + v_2 \beta_n \right) \operatorname{ch} q_{2n} x \right) \cos \beta_n y, \\
\frac{1 - v_1 v_2}{E_2} \sigma_{yy} &= C_0 v_1 \Omega_{11} \cos \Omega_{11} x + A_0 \Omega_{12} \cos \Omega_{12} y + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \left( \frac{(p_{1n}^2 + \Omega_2^2)(1 - v_1 v_2) - \alpha_n^2 E_1 / G}{(1 - v_1 v_2 + v_2 E_1 / G) \alpha_n} + v_1 \alpha_n \right) \operatorname{ch} p_{1n} y + \right. \\
&\quad \left. + B_n \left( \frac{(p_{2n}^2 + \Omega_2^2)(1 - v_1 v_2) - \alpha_n^2 E_1 / G}{(1 - v_1 v_2 + v_2 E_1 / G) \alpha_n} + v_1 \alpha_n \right) \operatorname{ch} p_{2n} y \right) \cos \alpha_n x + \\
&\quad + \frac{1 - v_1 v_2}{1 - v_1 v_2 + v_2 E_1 / G} \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n \frac{\beta_n^2 + v_1 q_{1n}^2 + v_2 \Omega_2^2}{\beta_n} \operatorname{ch} q_{1n} x + \right. \\
&\quad \left. + D_n \frac{\beta_n^2 + v_1 q_{2n}^2 + v_2 \Omega_2^2}{\beta_n} \operatorname{ch} q_{2n} x \right) \cos \beta_n y. \tag{7}
\end{aligned}$$

Условия (4) на касательные напряжения выполняются точно, если положить

$$\begin{aligned}
D_n &= -C_n \frac{q_{2n}(\beta_n^2 + v_1 q_{1n}^2 - \Omega_{12}^2)}{q_{1n}(\beta_n^2 + v_1 q_{2n}^2 - \Omega_{12}^2)}, \\
B_n &= -A_n \frac{p_{2n}(\alpha_n^2 + v_2 p_{1n}^2 - \Omega_{11}^2)}{p_{1n}(\alpha_n^2 + v_1 p_{2n}^2 - \Omega_{11}^2)}. \tag{8}
\end{aligned}$$

Тогда условия на нормальные напряжения (после подстановки (8) и разложения входящих в равенства функций в ряды Фурье) приводят к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $x_m, y_m$ , связанных с коэффициентами  $C_m, A_m$  формулами

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{x_0}{\Omega_{12} \sin \Omega_{12} b}, \\
A_m &= \frac{(-1)^{m+1} b(1 - v_1 v_2 + v_2 E_1/G) p_{1m} (\alpha_m^2 + v_2 p_{2m}^2 - \Omega_{11}^2)}{(1 - v_1 v_2) \alpha_m (p_{1m}^2 - p_{2m}^2) (\alpha_m^2 - \Omega_{11}^2) \operatorname{sh} p_{1m} b} x_m, \\
C_0 &= -\frac{y_0}{\Omega_{11} \sin \Omega_{11} a}, \\
C_m &= \frac{(-1)^m a(1 - v_1 v_2 + v_1 E_2/G) q_{1m} (\beta_m^2 + v_1 q_{2m}^2 - \Omega_{12}^2)}{(1 - v_1 v_2) \beta_m (q_{1m}^2 - q_{2m}^2) (\beta_m^2 - \Omega_{12}^2) \operatorname{sh} q_{1m} a} y_m. \quad (9)
\end{aligned}$$

Бесконечная система имеет вид

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{v_1 \operatorname{tg} \Omega_{12} b}{\Omega_{11} a} y_0 + v_1 \operatorname{tg} \Omega_{12} b (\Omega_{12}^2 + v_1 \Omega_2^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{\beta_n^2 (\beta_n^2 - \Omega_{12}^2)} + g_0 \operatorname{tg} \Omega_{12} b, \\
y_0 &= \frac{v_2 \operatorname{tg} \Omega_{11} a}{\Omega_{12} b} x_0 + v_2 \operatorname{tg} \Omega_{11} a (\Omega_{11}^2 + v_2 \Omega_2^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\alpha_n^2 (\alpha_n^2 - \Omega_{11}^2)} - f_0 \operatorname{tg} \Omega_{11} a, \\
x_m &= \frac{2v_1 \Omega_{11} \alpha_m^2 y_0}{a(\alpha_m^2 - \Omega_{11}^2) \Delta_m^x} + \frac{2v_1 \alpha_m^2}{v_2 \Delta_m^x} (1 + v_1 E_2/G - v_1 v_2) \times \\
&\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \alpha_m^2 - \Omega_{11}^2 \frac{v_1}{1 - v_1 v_2} \right) \beta_n^2 - \Omega_{11}^2 (\alpha_m^2 - \Omega_2^2) \frac{v_1}{1 - v_1 v_2}}{\beta_n^2 (\beta_n^2 + p_{1m}^2) (\beta_n^2 + p_{2m}^2)} y_n + \\
&\quad + \frac{(-1)^{m+1} g_m \alpha_m^2}{\Delta_m^x}, \\
y_m &= \frac{2v_2 \Omega_{12} \beta_m^2 x_0}{b(\beta_m^2 - \Omega_{12}^2) \Delta_m^y} + \frac{2v_2 \beta_m^2}{v_1 \Delta_m^y} (1 + v_2 E_1/G - v_1 v_2) \times \\
&\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \beta_m^2 - \Omega_{12}^2 \frac{v_2}{1 - v_1 v_2} \right) \alpha_n^2 - \Omega_{12}^2 (\beta_m^2 - \Omega_2^2) \frac{v_2}{1 - v_1 v_2}}{\alpha_n^2 (\alpha_n^2 + q_{1m}^2) (\alpha_n^2 + q_{2m}^2)} x_n + \\
&\quad + \frac{(-1)^m f_m \beta_m^2}{\Delta_m^y}, \quad (10)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_m^x &= \frac{b}{(p_{1m}^2 - p_{2m}^2) (\alpha_m^2 - \Omega_{11}^2)} [p_{2m} (\alpha_m^2 + v_2 p_{1m}^2 - \Omega_{11}^2) (v_1 \alpha_m^2 + p_{1m}^2 + \Omega_{12}^2) \times \\
&\quad \times \operatorname{cth} p_{2m} b - p_{1m} (\alpha_m^2 + v_2 p_{2m}^2 - \Omega_{11}^2) \times \\
&\quad \times (v_1 \alpha_m^2 + p_{2m}^2 + \Omega_{12}^2) \operatorname{cth} p_{1m} b], \\
\Delta_m^y &= \frac{a}{(q_{1m}^2 - q_{2m}^2) (\beta_m^2 - \Omega_{12}^2)} [q_{2m} (\beta_m^2 + v_1 q_{1m}^2 - \Omega_{12}^2) (v_2 \beta_m^2 + q_{1m}^2 + \Omega_{11}^2) \times \\
&\quad \times \operatorname{cth} q_{2m} a - q_{1m} (\beta_m^2 + v_1 q_{2m}^2 - \Omega_{12}^2) \times \\
&\quad \times (v_2 \beta_m^2 + q_{2m}^2 + \Omega_{11}^2) \operatorname{cth} q_{1m} a], \\
f(y) &= f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \beta_n y, \quad g(x) = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos \alpha_n x.
\end{aligned}$$

**Исследование и решение бесконечной системы.** При исследовании бесконечных систем линейных алгебраических уравнений зачастую удается доказать существование ограниченного решения показав, что бесконечная система

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} M_{mn} z_n + b_m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (11)$$

удовлетворяет условиям регулярности  $\sum_{n=1}^{\infty} |M_{mn}| < 1, m \in \mathbb{N}$ . Если указанное условие выполняется с некоторого номера  $m > N_R$ , то бесконечная система называется квазирегулярной и ее исследование можно свести к анализу конечной системы порядка  $N_R$  [2, 6].

Система (10) может быть записана в канонической форме (11), если ввести обозначения для неизвестных

$$z_1 = x_0, \quad z_2 = y_0, \quad z_{2m+1} = x_m, \quad z_{2m+2} = y_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Чтобы исследовать регулярность (10), используем значение ряда

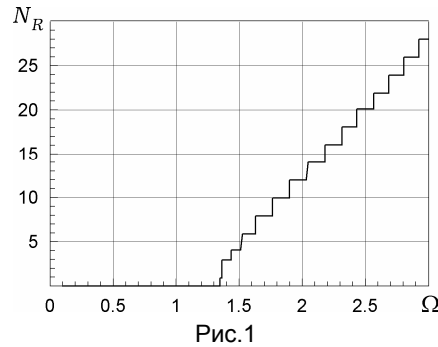
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \operatorname{cth} \pi a - \frac{1}{2a^2},$$

тогда значения рядов из модулей коэффициентов системы (10) можно вычислить точно. Для краткости приведем только их асимптотические выражения:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |M_{2m+1,n}| &= 1 - \sqrt{\frac{E_2}{G} - 2v_2} + 2\sqrt{\frac{v_2}{v_1}} \left( 1 + \frac{v_1 \Omega_{11}^2}{1 - v_1 v_2} \frac{b^2}{3} \right) \frac{1}{b\alpha_m} + O(1/\alpha_m^2), \\ \sum_{n=1}^{\infty} |M_{2m+2,n}| &= 1 - \sqrt{\frac{E_1}{G} - 2v_1} + 2\sqrt{\frac{v_1}{v_2}} \left( 1 + \frac{v_2 \Omega_{12}^2}{1 - v_1 v_2} \frac{a^2}{3} \right) \frac{1}{a\beta_m} + O(1/\beta_m^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Формулы (12) указывают, что всегда найдется номер  $N_R$ , начиная с которого ряды в условиях регулярности становятся меньше единицы, то есть система (10) является квазирегулярной.

На рис. 1 приведена зависимость количества  $N_R = N_R(\Omega)$  нерегулярных уравнений системы (10) от частоты  $\Omega$  для значений  $a/b = 3/2$ ,  $v_1 = 0.072$ ,  $v_2 = 0.036$  и  $E_1 = 1.2$ ,  $E_2 = 0.6$ ,  $G = 0.07$  [ $\times 10^5$  кг/см<sup>2</sup>] [3].



Заменой вида

$$z_m = \xi_m^0 + \sum_{j=1}^{N_R} \xi_m^j z_j, \quad m > N_R, \quad (13)$$

бесконечную систему сводим к совокупности регулярных бесконечных систем относительно  $\{\xi_m^j\}_{m=N_R+1}^\infty$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N_R$ , с одинаковой матрицей:

$$\begin{aligned}\xi_m^0 &= \sum_{n=N_R+1}^\infty M_{mn} \xi_n^0 + b_m, \\ \xi_m^j &= \sum_{n=N_R+1}^\infty M_{mn} \xi_n^j + M_{mj}, \quad m > N_R, \quad j = 1, 2, \dots, N_R.\end{aligned}\quad (14)$$

Причем при соответствующих условиях на свободные члены  $|b_m| \leq K\rho_m$  ( $K$  – некоторая положительная константа) каждая из регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (14) имеет единственное ограниченное решение (единственность решения для систем (14) можно доказать опираясь на теорему П. С. Бондаренко [2] с помощью замены  $w_{2m-1}^j = \xi_{2m-1}^j/\alpha_m$ ,  $w_{2m}^j = \xi_{2m}^j/\beta_m$ ), и вопрос о существовании ограниченного решения для квазирегулярной системы (10) эквивалентен вопросу существования решения конечной системы относительно первых  $\{z_m\}_{m=1}^{N_R}$ , которую можно получить, подставив (13) в (11) при  $m = 1, 2, \dots, N_R$ :

$$z_m = \sum_{j=1}^{N_R} Q_{mj} z_j + P_m, \quad (15)$$

где  $Q_{mj} = M_{mj} + \sum_{n=N_R+1}^\infty M_{mn} \xi_n^j$  и  $P_m = \sum_{n=N_R+1}^\infty M_{mn} \xi_n^0 + b_m$ .

Таким образом, для бесконечной системы (10) равенство нулю определителя конечной системы (15) дает дисперсионное уравнение для определения собственных частот призмы:

$$\det \|\delta_{mj} - Q_{mj}\| = 0, \quad (16)$$

( $\delta_{mj}$  – символы Кронекера). Для единственных ограниченных решений каждой из регулярных систем (14) оказывается справедливым асимптотический закон Б. М. Кояловича о существовании общего ненулевого предела у решения. Доказательство этого факта аналогично приведенному в [1, 4, 5] для бесконечных систем, возникающих в задачах установившихся колебаний для изотропного случая. Таким образом, справедливо

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_{2m+1}^j = \lim_{m \rightarrow \infty} \xi_{2m+2}^j = \tilde{G}_j. \quad (17)$$

Наличие положительного предела у решений (17) позволяет использовать для двусторонних оценок первых неизвестных и предельного значения метод предельных лимитант [7]. Данный метод позволяет найти оценки по решениям вспомогательных конечных систем уравнений

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_m^j &= \sum_{n=N_R+1}^{N_L} M_{mn} \bar{\xi}_n^j + b_m \delta_{0j} + (1 - \delta_{0j}) M_{mj}, \\ & \quad m = N_R + 1, N_R + 2, \dots, N_L, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N_R, \\ \tilde{\xi}_m^j &= \sum_{n=N_R+1}^{N_L} M_{mn} \tilde{\xi}_n^j + \rho_m, \quad m = N_R + 1, N_R + 2, \dots, N_L.\end{aligned}\quad (18)$$

Решения (18) позволяют построить выражения предельных лимитант

$$V_m^j = \left( b_m \delta_{0j} + (1 - \delta_{0j}) M_{mj} + \sum_{n=N_R+1}^{N_L} M_{mn} \bar{\xi}_n^j \right) \frac{1}{\rho_m + \sum_{n=N_R+1}^{N_L} M_{mn} \tilde{\xi}_n^j}, \quad (19)$$

точные нижняя грань  $h_j = \inf_{m > N_L} V_m^j$  и верхняя грань  $H_j = \sup_{m > N_L} V_m^j$  которых позволяют найти оценки для решений (14):

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_m^j + h_j(1 - \tilde{\xi}_m^j) \leq \xi_m^j \leq \bar{\xi}_m^j + H_j(1 - \tilde{\xi}_m^j), \quad m = N_R + 1, \dots, N_L, \\ h_j \leq \xi_m^j \leq H_j, \quad m > N_L. \end{aligned} \quad (20)$$

Доказано [7], что с увеличением  $N_L$  порядка систем (18) последовательности точных нижних  $h_j$  и верхних граней лимитант  $H_j$  образуют соответственно возрастающую и убывающую последовательности, что позволяет сделать оценки (20) как угодно близкими и определить требуемое число значащих цифр решения бесконечной системы.

В табл. 1 представлены оценки  $\bar{z}_m$  для неизвестных в системе (10), полученные методом простой редукции, и интервалы для неизвестных, полученные методом предельных лимитант для граничной задачи с такими значениями в граничных условиях (4):

$$f(y) = -1, \quad g(x) = 0,$$

рассчитанные при  $a/b = 3/2$ ,  $v_1 = 0.072$ ,  $v_2 = 0.036$ ,  $E_1 = 1.2$ ,  $E_2 = 0.6$ ,  $G = 0.07 [\times 10^5 \text{ кг/см}^2]$  и частоте вынужденных колебаний  $\Omega = 0.5$ , при которой бесконечная система остается регулярной и методом лимитант оценивается лишь одна система. В вычислениях полагали  $N_L = 5$ . Также в таблице представлены совпадающие оценки  $z_m$  снизу и сверху для неизвестных при  $N_L = 100$ , которые соответствуют точным значениям неизвестных.

Таблица 1

$m$	$\bar{z}_m$	$\bar{z}_m + \inf_{m > N} V_m^N(1 - \tilde{z}_m) \div \bar{z}_m + \sup_{m > N} V_m^N(1 - \tilde{z}_m)$	$z_m$
1	0.64066	0.64066 $\div$ 0.64066	0.64066
2	0.04752	0.04752 $\div$ 0.04752	0.04752
3	0.00095	0.00111 $\div$ 0.00122	0.00119
4	0.00373	0.00377 $\div$ 0.00379	0.00378
5	0.00139	0.00184 $\div$ 0.00213	0.00204
$\infty$	0	0.00189 $\div$ 0.00313	0.00241

Из данных табл. 1 следует, что различия между нижними и верхними оценками растут с увеличением порядкового номера, достигая наибольших значений для предельного значения, которое оценивается при помощи граней лимитант (19). Метод простой редукции дает заниженные оценки для неизвестных.

Подставляя формулы (17) в разложение (13) можно получить асимптотический закон для решения бесконечной системы (10):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = a_0, \quad (21)$$

что в случае изотропного материала совпадает с [1]. Из (21), (9) следует, что ряды (7), представляющие напряжения, в окрестности границы являются рядами Фурье с общим членом порядка  $O(1/m)$ , что при усечении рядов приводит к появлению погрешности.

**Численный пример** выполнения граничных условий  $\frac{1 - v_1 v_2}{E_1} \sigma_{xx} \Big|_{x=\pm a} = -1$  приведен в табл. 2 для рассмотренных выше параметров задачи при порядке  $N_L = 10$  систем (18) на частоте колебаний  $\Omega = 1.47$ . В таблице

приведены значения напряжений без улучшения сходимости, что равносильно применению к решению бесконечной системы метода простой редукции, а также значения напряжений с улучшением сходимости рядов напряжений на основе (21).

Таблица 2

$y/b$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
Без улучшения сходимости	-0.660	-1.358	-0.656	-1.438	-0.559	-4.920
С улучшением сходимости	-1.006	-1.001	-1.004	-0.999	-1.002	-1.006

Заметим, что с увеличением порядка вспомогательных систем  $N_L$  точность выполнения граничных условий может быть сделана сколь угодно высокой. Неудовлетворительная точность выполнения граничных условий во второй строке табл. 2 объясняется тем, что взятая в численных расчетах частота вынужденных колебаний  $\Omega = 1.47$  отличается менее чем на 1% от первой собственной частоты. В табл. 3 представлены первые собственные частоты для рассматриваемого примера, найденные как корни (16).

Таблица 3

$n$	1	2	3	4	5
$\Omega_n$	1.474	1.725	1.933	2.305	2.448

На рис. 2 представлены графики нормальных напряжений для рассмотренного выше примера в сечениях  $y/b = 0, 0.25, 0.5, 0.75$  и в сечениях  $x/a = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ .

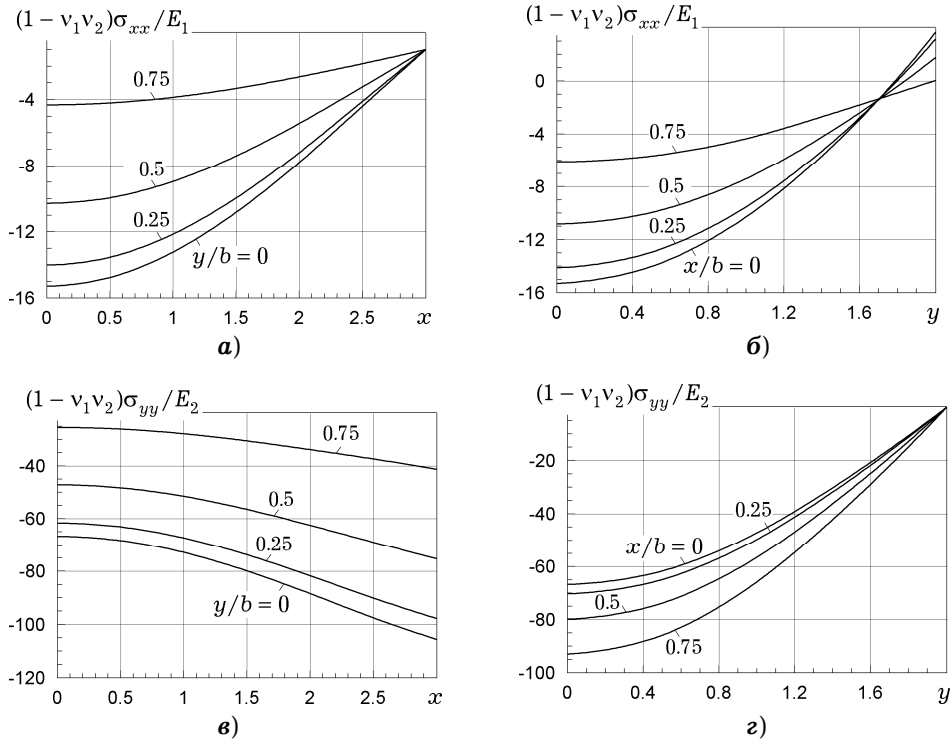


Рис. 2

Нормальные напряжения  $\frac{1 - \nu_1 \nu_2}{E_1} \sigma_{xx}$  наименьших значений (-15.29) достигают в центре прямоугольника (рис. 2а, рис. 2б), возрастая к его гра-



ницам, а нормальные напряжения  $\frac{1 - \nu_1 \nu_2}{E_2} \sigma_{yy}$  своих наименьших значений ( $-88.39$ ) достигают посередине сторон  $x = \pm a$  (рис. 2в, рис. 2г). При этом касательные напряжения оказываются достаточно малы:  $|\tau_{xy}| \leq 3.6 G$ .

Таким образом, здесь представлен новый алгоритм определения напряженно-деформированного состояния при установившихся колебаниях ортотропного прямоугольника, позволяющий строить сколь угодно близкие двусторонние оценки для коэффициентов рядов, представляющих решение задачи.

1. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
2. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. – Москва-Ленинград: Физматгиз, 1962. – 708 с.
3. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
4. *Мелешко В. В., Папков С. О.* Изгибные колебания упругих прямоугольных пластин со свободными краями: от Хладни (1809) и Ритца (1909) до наших дней // Акуст. вісн. – 2009. – **12**, № 4. – С. 34–51.
5. *Папков С. О.* Установившиеся вынужденные колебания призмы при заданных на границе смещениях // Акуст. вісн. – 2008. – **11**, № 4. – С. 36–43.
6. *Папков С. О., Чехов В. Н.* О локализации собственных частот прямоугольной призмы посредством исключения неизвестных в квазирегулярной бесконечной системе // Доп. НАН України. – 2004. – № 10. – С. 57–62.
7. *Чехов В. Н., Пан А. В.* Про граничні вирази лімітант Кояловича // Доп. НАН України. – 2007. – № 3. – С. 31–36.
8. *Banerjee J. R., Gunawardana W. D.* Dynamic stiffness matrix development and free vibration analysis of a moving beam // J. Sound Vib. – 2007. – **303**. – P. 135–143.
9. *Bloor M. I. G., Wilson M. J.* An approximate analytic solution method for bi-harmonic problem // Proc. R. Soc. Lond. A. – 2006. – **462**. – P. 1107–1121.
10. *Meleshko V. V.* Bending of an elastic rectangular clamped plate: exact versus 'engineering' solutions // J. Elasticity. – 1997. – **48**. – P. 1–50.
11. *Revenko V. P.* Three-dimensional stress state of an orthotropic rectangular prism under a transverse force applied at its end // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No. 4. – P. 367–373.  
То же: *Ревенко В. П.* Трехмерное напряженное состояние ортотропной призмы прямоугольного сечения под действием поперечной силы, приложенной на торце // Прикл. механіка. – 2005. – **41**, № 4. – С. 30–37.
12. *Xing Y. F., Liu B.* New exact solution for free vibrations of thin orthotropic rectangular plates // Compos. Struct. – 2009. – **89**. – P. 567–574.

#### УСТАЛЕНІ ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ ОРТОТРОПНОЇ ПРИЗМИ

*Аналитично розв'язано задачу про усталені вимушені коливання ортотропного прямокутника. Методом суперпозиції задачу зведено до квазирегулярної нескінченної системи лінійних рівнянь. Застосування лімітант Кояловича дозволяє обчислити двосторонні оцінки для всієї нескінченної послідовності невідомих. Наведено чисельні приклади реалізації алгоритму.*

#### STEADY-STATE FORCED VIBRATIONS OF A RECTANGULAR ORTHOTROPIC PRISM

*The problem on steady-state forced vibrations of orthotropic rectangular is solved analytically. By a superposition method this problem is reduced to a quasiregular infinite system of linear equations. Using the Koyalovich's limitants allows to calculate the bilateral estimations for all infinite sequence of unknown quantities. The numerical examples of algorithm realization are carried out.*

Севастопольск. нац. техн. ун-т, Севастополь

Получено  
05.10.11