УДК 517.524

Т. М. Антонова[1], О. М. Сусь[2]

ФОРМУЛА РІЗНИЦІ ДЛЯ ОДНОГО З ФІГУРНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ

Розглянуто один із способів побудови фігурних наближень (фігурних підхідних дробів) для двовимірних неперервних дробів, який застосовується при вивченні умов еквівалентності двох двовимірних неперервних дробів. Встановлену в роботі формулу різниці для сусідніх наближень застосовано для дослідження властивостей послідовності таких фігурних підхідних двовимірних неперервних дробів.

Багатовимірні узагальнення неперервних дробів − гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) та двовимірні неперервні дроби (ДНД), є одним із засобів побудови раціональних наближень функцій багатьох змінних [1, 5, 8, 9]. На відміну від неперервних дробів, наближення яких будуються однозначно, для багатовимірних узагальнень неперервних дробів − ГЛД та ДНД, існує багато способів побудови їх наближень. Проте в аналітичній теорії багатовимірних узагальнень неперервних дробів вивчаються властивості таких їх наближень, які виникли при розв'язанні деяких задач аналізу. Означимо ці наближення на прикладі ДНД.

Розглянемо двовимірний неперервний дріб

$$b_{0,0}+\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{j,0}}{b_{j,0}}+\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{0,j}}{b_{0,j}}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k,k}}{b_{k,k}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{a_{k+j,k}}{b_{k+j,k}}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{a_{k,k+j}}{b_{k,k+j}}}. \tag{1}$$

Означення 1 [**1**]. Неперервні дроби вигляду

$$\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{j,0}}{b_{j,0}},\qquad \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{0,j}}{b_{0,j}},\qquad \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{a_{j,j}}{b_{j,j}},$$

$$\frac{a_{1,1}}{b_{1,1}}+\ldots+\frac{a_{k,k}}{b_{k,k}}+\frac{a_{k+1,k}}{b_{k+1,k}}+\ldots,\qquad \frac{a_{1,1}}{b_{1,1}}+\ldots+\frac{a_{k,k}}{b_{k,k}}+\frac{a_{k,k+1}}{b_{k,k+1}}+\ldots,\qquad k=1,2,\ldots,$$

називають *гілками ДНД* (1).

Під довжиною скінченної гілки − скінченного неперервного дробу, розуміють кількість його поверхів.

Як зазначено в [5], наближення ДНД можна будувати так, щоб його гілки мали однакову або різну довжину.

Означення 2 [**1**, **4**]. Наближення ДНД (1), всі гілки якого мають однакову довжину, називаються *звичайними наближеннями* або *звичайними підхідними дробами*.

Звичайне n-не наближення ДНД (1) − це скінченний ДНД вигляду

$$f_n=b_{0,0}+\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n}\frac{a_{j,0}}{b_{j,0}}+\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n}\frac{a_{0,j}}{b_{0,j}}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n}\frac{a_{k,k}}{b_{k,k}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{n-k}\dfrac{a_{k+j,k}}{b_{k+j,k}}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{n-k}\dfrac{a_{k,k+j}}{b_{k,k+j}}},\quad n=1,2,\ldots\,. \tag{2}$$

Характерною особливістю таких наближень є те, що для неперервних дробів, ГЛД і ДНД з додатними елементами справджується властивість «вилки», тобто виконується система нерівностей $f_{2k}<f_{2k+2}<f_{2j+1}<f_{2j-1}$, де k, j − довільні натуральні числа [1, 2, 4]. Властивості таких наближень для багатовимірних узагальнень неперервних дробів є, мабуть, найбільш вивченими [1].

Означення 3 [**1**, **4, 5**]. Скінченні ДНД, гілки якого мають різну довжину, називають *фігурними наближеннями.*

Перші фігурні наближення для ДНД (1) одержано при розв'язанні задачі відповідності між формальним подвійним степеневим рядом і послідовністю раціональних наближень функції двох змінних в роботах [3, 10], які для числових значень змінних мають вигляд

$$\tilde{f}_n = b_{0,0} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n} \frac{a_{j,0}}{b_{j,0}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n} \frac{a_{0,j}}{b_{0,j}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{[n/2]} \frac{a_{k,k}}{b_{k,k} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{n-2k} \frac{a_{k+j,k}}{b_{k+j,k}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{n-2k} \frac{a_{k,k+j}}{b_{k,k+j}}}, \quad n = 1, 2, \ldots \;, \tag{3}$$

де $[k]$ – ціла частина числа k.

На відміну від звичайних наближень (2), фігурні наближення вигляду (3) для ДНД з додатними елементами не мають властивості «вилки».

У роботі [6] розглядаються наближення, які пов'язані із задачею інтерполяції функції двох змінних, зображеної функціональним ДНД, визначеної і неперервної в деякій прямокутній області і які для числових значень змінних мають наступний вигляд:

$$f_{(n_1,n_2)} = b_{0,0} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n_1} \frac{a_{j,0}}{b_{j,0}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n_2} \frac{a_{0,j}}{b_{0,j}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\min(n_1,n_2)} \frac{a_{k,k}}{b_{k,k} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{n_1-k} \frac{a_{k+j,k}}{b_{k+j,k}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{n_2-k} \frac{a_{k,k+j}}{b_{k,k+j}}}, \tag{4}$$

числа n_1, n_2 $(n_1, n_2 = 1, 2, \ldots)$ мають зв'язок з вузлами інтерполяції.

Очевидно, якщо $n_1 \neq n_2$, то це наближення (4) є одним із фігурних наближень ДНД (1), а якщо $n_1 = n_2$, то наближення (4) є звичайним наближенням ДНД (1).

Предметом вивчення цієї статті є фігурне наближення ДНД (1) вигляду

$$\hat{f}_n = b_{0,0} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{[\sqrt{n}]} \frac{a_{j,0}}{b_{j,0}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{[\sqrt{n-1}]} \frac{a_{0,j}}{b_{0,j}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{[\sqrt{n+1}]-1} \frac{a_{k,k}}{b_{k,k} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{[\sqrt{n-2k}]-k} \frac{a_{k+j,k}}{b_{k+j,k}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{[\sqrt{n-2k-1}]-k} \frac{a_{k,k+j}}{b_{k,k+j}}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

одержане в роботі [7] при вивченні умов еквівалентності двох ДНД.

Розглянемо це наближення для $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\hat{f}_0 = b_{0,0}, \qquad \hat{f}_1 = b_{0,0} + \frac{a_{1,0}}{b_{1,0}}, \qquad \hat{f}_2 = b_{0,0} + \frac{a_{1,0}}{b_{1,0}} + \frac{a_{0,1}}{b_{0,1}},$$

$$\hat{f}_3 = b_{0,0} + \frac{a_{1,0}}{b_{1,0}} + \frac{a_{0,1}}{b_{0,1}} + \frac{a_{1,1}}{b_{1,1}}, \qquad \hat{f}_4 = b_{0,0} + \frac{a_{1,0}}{b_{1,0} + \frac{a_{2,0}}{b_{2,0}}} + \frac{a_{0,1}}{b_{0,1}} + \frac{a_{1,1}}{b_{1,1}},$$

$$\hat{f}_5 = b_{0,0} + \frac{a_{1,0}}{b_{1,0} + \frac{a_{2,0}}{b_{2,0}}} + \frac{a_{0,1}}{b_{0,1} + \frac{a_{0,2}}{b_{0,2}}} + \frac{a_{1,1}}{b_{1,1}},$$

$$\hat{f}_6 = b_{0,0} + \cfrac{a_{1,0}}{b_{1,0} + \cfrac{a_{2,0}}{b_{2,0}}} + \cfrac{a_{0,1}}{b_{0,1} + \cfrac{a_{0,2}}{b_{0,2}}} + \cfrac{a_{1,1}}{b_{1,1} + \cfrac{a_{2,1}}{b_{2,1}}},$$

$$\hat{f}_7 = b_{0,0} + \cfrac{a_{1,0}}{b_{1,0} + \cfrac{a_{2,0}}{b_{2,0}}} + \cfrac{a_{0,1}}{b_{0,1} + \cfrac{a_{0,2}}{b_{0,2}}} + \cfrac{a_{1,1}}{b_{1,1} + \cfrac{a_{2,1}}{b_{2,1}} + \cfrac{a_{1,2}}{b_{1,2}}},$$

$$\hat{f}_8 = b_{0,0} + \cfrac{a_{1,0}}{b_{1,0} + \cfrac{a_{2,0}}{b_{2,0}}} + \cfrac{a_{0,1}}{b_{0,1} + \cfrac{a_{0,2}}{b_{0,2}}} + \cfrac{a_{1,1}}{b_{1,1} + \cfrac{a_{2,1}}{b_{2,1}} + \cfrac{a_{1,2}}{b_{1,2}} + \cfrac{a_{2,2}}{b_{2,2}}}, \qquad \ldots .$$

Особливістю цього наближення є те, що кожний наступний підхідний дріб утворюється додаванням лише однієї ланки $\dfrac{a_{j,k}}{b_{j,k}}$, $k = 0,1,\ldots$, $j = 0,1,\ldots$, до попереднього підхідного дробу.

Зауважимо, що досліджуване наближення має таку властивість:

$$\hat{f}_{n^2+2n} = f_n, \qquad n = 1,2,\ldots,$$

тобто послідовність $\{f_n\}$ є підпослідовністю послідовності $\{\hat{f}_n\}$, $n = 1,2,\ldots$.

Дійсно, порівняємо наближення вигляду (2) та (5). Відмітимо спочатку, що $n < \sqrt{n^2+2n} < n+1$ і $n < \sqrt{n^2+2n-1} < n+1$, а для $1 \le k < n$ маємо $n < \sqrt{n^2+2n-2k} < n+1$ і $n < \sqrt{n^2+2n-2k-1} < n+1$. Тому

$$\hat{f}_{n^2+2n} = b_{0,0} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{[\sqrt{n^2+2n}]} \frac{a_{j,0}}{b_{j,0}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{[\sqrt{n^2+2n-1}]} \frac{a_{0,j}}{b_{0,j}} +$$

$$+ \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{[\sqrt{n^2+2n+1}]-1} \frac{a_{k,k}}{b_{k,k} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{[\sqrt{n^2+2n-2k}]-k} \dfrac{a_{k+j,k}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{[\sqrt{n^2+2n-2k-1}]-k} \dfrac{a_{k,k+j}}{1}} =$$

$$= f_n, \qquad n = 1,2,\ldots .$$

При вивченні властивостей наближень багатовимірних узагальнень неперервних дробів використовується формула різниці двох наближень. Використаємо запропоновану в [1] методику і встановимо формулу різниці між двома сусідніми наближеннями вигляду (5).

Позначимо

$$\hat{Q}_j^{(0)} = b_{j,j}, \quad \hat{Q}_j^{(1)} = b_{j,j} + \frac{a_{j+1,j}}{b_{j+1,j}}, \quad \hat{Q}_j^{(2)} = b_{j,j} + \frac{a_{j+1,j}}{b_{j+1,j}} + \frac{a_{j,j+1}}{b_{j,j+1}}, \quad j = 1,2,\ldots, \tag{6}$$

$$\hat{Q}_i^{(p)} = b_{i,i} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{[\sqrt{p}]} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{[\sqrt{p-1}]} \frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}} + \frac{a_{i+1,i+1}}{\hat{Q}_{i+1}^{(\alpha(p))}} = b_{i,i} + \frac{a_{i+1,i}}{Q_{i+1,i}^{([\sqrt{p}]-1)}} +$$

$$+ \frac{a_{i,i+1}}{Q_{i,i+1}^{([\sqrt{p-1}]-1)}} + \frac{a_{i+1,i+1}}{\hat{Q}_{i+1}^{(\alpha(p))}}, \qquad i = 1,2,\ldots, \qquad p = 3,4,\ldots, \tag{7}$$

де

$$\alpha(p) = \begin{cases} \ell^2 - 1, & \ell^2 + 2\ell \le p \le \ell^2 + 2\ell + 2, \\ p - 3 - 2\ell, & \ell^2 + 2\ell + 3 \le p \le \ell^2 + 4\ell + 2, \end{cases} \tag{8}$$

ℓ – додатне ціле число,

$$Q_{i+j,i}^{(k+1)} = b_{i+j,i} + \frac{a_{i+j+1,i}}{Q_{i+j+1,i}^{(k)}}, \qquad Q_{i,i+j}^{(k+1)} = b_{i,i+j} + \frac{a_{i,i+j+1}}{Q_{i,i+j+1}^{(k)}},$$

$$Q_{i+j,i}^{(0)} = b_{i+j,i}, \quad Q_{i,i+j}^{(0)} = b_{i,i+j}, \quad j = 1,2,\ldots, \quad i = 0,1,\ldots, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{9}$$

Вирази вигляду (6), (7), (9) називають скінченними залишками ДНД (1), верхні індекси, зокрема, число p у формулі (7) та число $k+1$ у виразах (9) означають довжину залишків.

Використовуючи формули (6)–(9), наближення $\hat{f}_n$, $n=1,2,\ldots$, подамо у вигляді

$$\hat{f}_n = b_{0,0} + \frac{a_{1,0}}{Q_{1,0}^{([\sqrt{n}]-1)}} + \frac{a_{0,1}}{Q_{0,1}^{([\sqrt{n-1}]-1)}} + \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(\alpha(n))}}, \qquad n=1,2,\ldots, \tag{10}$$

де $\alpha(n)$ визначається за формулою (8).

Розглянемо функцію $\alpha(p)$. Зауважимо, що ця функція є неспадною. Дійсно, для $\ell_2 > \ell_1$ та $\ell = 1,2,\ldots$, маємо:

- якщо $$\begin{gathered} \ell^2 + 2\ell \le \ell_1 \le \ell^2 + 2\ell + 1, \\ \ell^2 + 2\ell + 1 \le \ell_2 \le \ell^2 + 2\ell + 2, \end{gathered}$$

то

$$\alpha(\ell_2) - \alpha(\ell_1) = 0;$$

- якщо $$\begin{gathered} \ell^2 + 2\ell \le \ell_1 \le \ell^2 + 2\ell + 2, \\ \ell^2 + 2\ell + 3 \le \ell_2 \le \ell^2 + 4\ell + 2, \end{gathered}$$

то

$$\begin{aligned} \alpha(\ell_2) - \alpha(\ell_1) &= \ell_2 - 3 - 2\ell - \ell^2 + 1 = \\ &= \ell_2 - \ell^2 - 2\ell - 2 \ge \ell^2 + 2\ell + 3 - \ell^2 - 2\ell - 2 > 0; \end{aligned}$$

- якщо $$\begin{gathered} \ell^2 + 2\ell + 3 \le \ell_1 \le \ell^2 + 4\ell + 2, \\ \ell^2 + 2\ell + 3 \le \ell_2 \le \ell^2 + 4\ell + 2, \end{gathered}$$

то

$$\alpha(\ell_2) - \alpha(\ell_1) = \ell_2 - 3 - 2\ell - \ell_1 + 3 + 2\ell = \ell_2 - \ell_1 > 0;$$

- якщо $$\begin{gathered} \ell^2 + 2\ell + 3 \le \ell_1 \le \ell^2 + 4\ell + 2, \\ \ell^2 + 2\ell + 3 \le \ell_2 \le \ell^2 + 4\ell + 5, \end{gathered}$$

то

$$\alpha(\ell_2) - \alpha(\ell_1) = (\ell+1)^2 - 1 - \ell_1 + 3 + 2\ell = \ell^2 + 4\ell + 3 - \ell_1 \ge 0.$$

Отже, для $\ell_2 > \ell_1$ маємо $\alpha(\ell_2) - \alpha(\ell_1) \ge 0$.

Покажемо, як обчислюються довжини довільних i-х залишків, що визначаються за формулами (7).

Нехай

$$n \ge 4m^2 + 4m + 2 = (2m)^2 + 2\cdot 2m + 2, \qquad m = 1,2,\ldots.$$

Позначимо

$$\alpha_0(n) = n, \qquad \alpha_k(n) = \alpha(\alpha_{k-1}(n)), \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Тоді, використовуючи першу з формул (8), маємо

$$\alpha_1(n) \geq \alpha(4m^2 + 4m + 2) = \alpha((2m)^2 + 2 \cdot 2m + 2) = (2m)^2 - 1 \,,$$

$$\sqrt{\alpha_1(n) - 1} \geq 2m - 1 \,,$$

$$\alpha_2(n) \geq \alpha((2m)^2 - 1) = \alpha((2m-1)^2 + 2(2m-1)) = (2m-1)^2 - 1 \,,$$

$$\sqrt{\alpha_2(n) - 1} \geq 2m - 2 \,,$$

$$\alpha_3(n) \geq \alpha((2m-1)^2 - 1) = \alpha((2m-2)^2 + 2(2m-2)) = (2m-2)^2 - 1 \,,$$

$$\sqrt{\alpha_3(n) - 1} \geq 2m - 3, \qquad \ldots, \qquad m > 1 \,,$$

$$\alpha_k(n) \geq \alpha((2m-k+2)^2 - 1) = \alpha((2m-k+1)^2 + 2(2m-k+1) = \\ = (2m-k+2)^2 - 1 \,,$$

$$\sqrt{\alpha_k(n) - 1} \geq 2m - k, \qquad 1 \leq k \leq m \,. \tag{11$'$}$$

Розглянемо випадок, коли

$$n \geq 4m^2 + 8m + 2 = (2m)^2 + 4 \cdot 2m + 2, \qquad m = 1, 2, \ldots .$$

Тоді, застосовуючи другу з формул (8), для $m = 1, 2, \ldots$ одержимо

$$\alpha_1(n) \geq \alpha(4m^2 + 8m + 2) = \alpha((2m)^2 + 4 \cdot 2m + 2) = (2m)^2 + 2 \cdot 2m - 1 \,,$$

$$\sqrt{\alpha_1(n) - 1} \geq 2m \,,$$

$$\alpha_2(n) \geq \alpha((2m)^2 + 2 \cdot (2m) - 1) = \alpha((2m-1)^2 + 4(2m-1) + 2) = \\ = (2m-1)^2 + 2(2m-1) - 1 \,,$$

$$\sqrt{\alpha_2(n) - 1} \geq 2m - 1 \,,$$

$$\alpha_3(n) \geq \alpha((2m-1)^2 + 2(2m-1) - 1) = \alpha((2m-2)^2 + 4(2m-2) + 2) = \\ = (2m-2)^2 + 2(2m-2) - 1 \,,$$

$$\sqrt{\alpha_3(n) - 1} \geq 2m - 2, \quad \ldots, \qquad m > 1 \,,$$

$$\alpha_k(n) \geq \alpha((2m-k+2)^2 + 2(2m-k+2) - 1) = \\ = \alpha((2m-k+1)^2 + 4(2m-k+1) + 2) = \\ = (2m-k+1)^2 + 2(2m-k+1) - 1 \,,$$

$$\sqrt{\alpha_k(n) - 1} \geq 2m - k + 1, \qquad 1 \leq k \leq m \,. \tag{11$''$}$$

Приклад. Обчислимо довжини всіх залишків наближення $\hat{f}_{11}$, використовуючи формули (10), (6), (7), (9). Число 11 подамо у вигляді $11 = (2)^2 + 2 \cdot 2 + 3$. З формули (10) маємо

$$\hat{f}_{11} = b_{0,0} + \frac{a_{1,0}}{Q_{1,0}^{(2)}} + \frac{a_{0,1}}{Q_{0,1}^{(2)}} + \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(\alpha_1(11))}} \,,$$

де, як випливає з формули (8), $\alpha_1(11) = \alpha(11) = 11 - 3 - 4 = 4$, і

$$\hat{Q}_1^{(4)} = b_{1,1} + \frac{a_{2,1}}{Q_{2,1}^{(1)}} + \frac{a_{1,2}}{Q_{1,2}^{(0)}} + \frac{a_{2,2}}{\hat{Q}_2^{(\alpha(4))}} = b_{1,1} + \frac{a_{2,1}}{Q_{2,1}^{(1)}} + \frac{a_{1,2}}{Q_{1,2}^{(0)}} + \frac{a_{2,2}}{b_{2,2}},$$

оскільки

$$\hat{Q}_2^{(\alpha(4))} = \hat{Q}_2^{(0)} = b_{2,2}.$$

Отже,

$$\hat{f}_{11} = b_{0,0} + \frac{a_{1,0}}{Q_{1,0}^{(2)}} + \frac{a_{0,1}}{Q_{0,1}^{(2)}} + \cfrac{a_{1,1}}{b_{1,1} + \cfrac{a_{2,1}}{Q_{2,1}^{(1)}} + \cfrac{a_{1,2}}{Q_{1,2}^{(0)}} + \cfrac{a_{2,2}}{b_{2,2}}}. \quad \blacktriangleleft$$

Встановимо формулу різниці між сусідніми підхідними дробами наближення (5) за умови, що всі залишки (6), (7), (9) є відмінними від нуля.

Нехай

$$\varphi_{i,1}^{(0)} = \varphi_{i,2}^{(0)} = 0,$$

$$\varphi_{i,1}^{(p)} = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{p} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}}, \quad \varphi_{i,2}^{(p)} = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{p} \frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}, \qquad i = 0,1,2,\ldots, \qquad p = 1,2,\ldots.$$

Тоді наближення (5) подамо у вигляді

$$\hat{f}_n = b_{0,0} + \varphi_{0,1}^{([\sqrt{n}])} + \varphi_{0,2}^{([\sqrt{n-1}])} + \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(\alpha(n))}}, \qquad n = 1,2,\ldots.$$

Щоб встановити вигляд формули різниці $\hat{f}_{m+1} - \hat{f}_m$, $m = 1,2,\ldots$, розглянемо різні випадки:

1°) $m = 0$: $\quad \hat{f}_1 - \hat{f}_0 = \dfrac{a_{1,0}}{b_{1,0}}$;

2°) $m = 1$: $\quad \hat{f}_2 - \hat{f}_1 = \varphi_{0,2}^{(1)} - \varphi_{0,2}^{(0)} = \dfrac{a_{0,1}}{b_{0,1}}$;

3°) $m = 2$: $\quad \hat{f}_3 - \hat{f}_2 = \varphi_{0,2}^{(1)} - \varphi_{0,2}^{(1)} + \dfrac{a_{1,1}}{b_{1,1}} = \dfrac{a_{1,1}}{b_{1,1}}$;

4°) $m = k^2 + 2k = (k+1)^2 - 1$, $k = 1,2,\ldots$,

тоді $[\sqrt{m}] = k$, $[\sqrt{m-1}] = k$, $[\sqrt{m+1}] = k+1$,

за формулами (8), (11) обчислимо

$\alpha_1(k^2 + 2k) = \alpha(k^2 + 2k) = k^2 - 1$,

$\alpha_1(k^2 + 2k + 1) = \alpha(k^2 + 2k + 1) = k^2 - 1$,

отже, отримуємо

$$\hat{f}_{m+1} - \hat{f}_m = \varphi_{0,1}^{(k+1)} + \varphi_{0,2}^{(k)} + \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(k^2-1)}} - \varphi_{0,1}^{(k)} - \varphi_{0,2}^{(k)} - \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(k^2-1)}} =$$

$$= (-1)^k \frac{\prod_{j=1}^{k+1} a_{j,0}}{\prod_{j=1}^{k+1} Q_{j,0}^{(k+1-j)} \prod_{j=1}^{k+1} Q_{j,0}^{(k-j)}};$$

5°) $m = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2,\ k = 1, 2, \ldots,$

тоді $\left[\sqrt{m-1}\right] = k,\ \left[\sqrt{m}\right] = \left[\sqrt{m+1}\right] = k+1$,

за формулами (8), (11) обчислимо

$\alpha_1(k^2 + 2k + 1) = \alpha(k^2 + 2k + 1) = k^2 - 1$,

$\alpha_1(k^2 + 2k + 2) = \alpha(k^2 + 2k + 2) = k^2 - 1$,

отже, отримуємо

$$\hat{f}_{m+1} - \hat{f}_m = \varphi_{0,1}^{(k+1)} + \varphi_{0,2}^{(k+1)} + \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(k^2-1)}} - \varphi_{0,1}^{(k+1)} - \varphi_{0,2}^{(k)} - \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(k^2-1)}} =$$

$$= (-1)^k \frac{\prod_{j=1}^{k+1} a_{0,j}}{\prod_{j=1}^{k+1} Q_{0,j}^{(k+1-j)} \prod_{j=1}^{k+1} Q_{0,j}^{(k-j)}};$$

6°) $m = k^2 + 2k + 2 = (k+1)^2 + 1,\ k = 1, 2, \ldots,$

тоді $\left[\sqrt{m}\right] = \left[\sqrt{m-1}\right] = \left[\sqrt{m+1}\right] = k+1$,

за формулами (8), (11) обчислимо

$\alpha_1(m) = \alpha(k^2 + 2k + 2) = k^2 - 1$,

$\alpha_1(m+1) = \alpha(k^2 + 2k + 3) = k^2 + 2k + 3 - 3 - 2k = k^2$,

отже, отримуємо

$$\hat{f}_{m+1} - \hat{f}_m = \varphi_{0,1}^{(k+1)} + \varphi_{0,2}^{(k+1)} + \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(k^2)}} - \varphi_{0,1}^{(k+1)} - \varphi_{0,2}^{(k+1)} - \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(k^2-1)}} =$$

$$= -\frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(k^2)} \hat{Q}_1^{(k^2-1)}},$$

$$\left(\hat{Q}_1^{(k^2)} - \hat{Q}_1^{(k^2-1)}\right) = (-1)^k \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(k^2)} \hat{Q}_1^{(k^2-1)}} \left(\varphi_{1,1}^{(k)} - \varphi_{1,1}^{(k-1)}\right) =$$

$$= (-1)^k \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(k^2)} \hat{Q}_1^{(k^2-1)}} \frac{\prod_{j=1}^{k} a_{j+1,1}}{\prod_{j=1}^{k} Q_{j+1,1}^{(k-j)} \prod_{j=1}^{k-1} Q_{j+1,1}^{(k-1-j)}};$$

7°) $m = k^2 + 2k + 3 = (k+1)^2 + 2,\ k = 1, 2, \ldots,$

тоді $\left[\sqrt{m}\right] = \left[\sqrt{m-1}\right] = \left[\sqrt{m+1}\right] = k+1$,

за формулами (8), (11) обчислимо

$\alpha_1(m) = \alpha(k^2 + 2k + 3) = k^2$,

$\alpha_1(m+1) = \alpha(k^2 + 2k + 4) = k^2 + 1$,

отже, отримуємо

$$\hat{f}_{m+1} - \hat{f}_m = \varphi_{0,1}^{(k+1)} + \varphi_{0,2}^{(k+1)} + \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(k^2+1)}} - \varphi_{0,1}^{(k+1)} - \varphi_{0,2}^{(k+1)} - \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(k^2)}} =$$

$$= \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(k^2+1)}} - \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(k^2)}} = -\frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(k^2)}\hat{Q}_1^{(k^2-1)}}\left(\hat{Q}_1^{(k^2+1)} - \hat{Q}_1^{(k^2)}\right) =$$

$$= (-1)^k \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(k^2+1)}\hat{Q}_1^{(k^2)}}\left(\varphi_{1,2}^{(k)} - \varphi_{1,2}^{(k-1)}\right) =$$

$$= (-1)^k \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(k^2+1)}\hat{Q}_1^{(k^2)}} \frac{\prod_{j=1}^{k} a_{1,j+1}}{\prod_{j=1}^{k} Q_{1,j+1}^{(k-j)} \prod_{j=1}^{k-1} Q_{1,j+1}^{(k-1-j)}};$$

8°) $m = k^2 + 2k + 2r = (k+1)^2 + 2r - 1,\ 2 \le r \le k$,

тоді $\left[\sqrt{m}\right] = \left[\sqrt{m-1}\right] = \left[\sqrt{m+1}\right] = k+1$,

за формулами (8), (11) обчислимо

$\alpha_1(m) = \alpha(k^2 + 2k + 2r) = k^2 + 2k + 2r - 3 - 2k =$

$= (k-1)^2 + 2(k-1) + 2(r-1)$,

$\alpha_1(m+1) = \alpha(k^2 + 2k + 2r + 1) = k^2 + 2k + 2r + 1 - 3 - 2k =$

$= (k-1)^2 + 2(k-1) + 2(r-1) + 1$,

$\left[\sqrt{\alpha_1(m)}\right] = k, \qquad \left[\sqrt{\alpha_1(m) - 1}\right] = k$,

$\left[\sqrt{\alpha_1(m+1)}\right] = k, \qquad \left[\sqrt{\alpha_1(m+1) - 1}\right] = k$,

$\alpha_2(m) = \alpha(\alpha_1(m)) = \alpha((k-1)^2 + 2(k-1) + 2r) = (k-1)^2 + 2(k-1) +$

$+ 2(r-1) - 3 - 2(k-1) = (k-2)^2 + 2(k-2) + 2(r-2)$,

$\alpha_2(m+1) = \alpha(\alpha_1(m+1)) = \alpha((k-1)^2 + 2(k-1) + 2(r-1) + 1) =$

$= (k-2)^2 + 2(k-2) + 2(r-2) + 1$.

Отже, для $0 \le j \le r$ запишемо

$\alpha_j(m) = (k-j)^2 + 2(k-j) + 2(r-j)$,

$\alpha_j(m+1) = (k-j)^2 + 2(k-j) + 2(r-j) + 1$,

$\alpha_r(m) = (k-r)^2 + 2(k-r)$,

$\alpha_r(m+1) = (k-r)^2 + 2(k-r) + 1, \qquad 0 \le r \le k$,

$\left[\sqrt{\alpha_r(m)}\right] = \left[\sqrt{\alpha_r(m) - 1}\right] = \left[\sqrt{\alpha_r(m+1) - 1}\right] = k - r$,

$\left[\sqrt{\alpha_r(m+1)}\right] = k - r + 1$.

Якщо $r = k$, то $\alpha_r(m) = 0,\ \alpha_r(m+1) = 1$. При $r < k$ маємо

$\alpha_r(m) = (k-r)^2 + 2(k - r) \ge 3$,

$\alpha_r(m+1) = (k-r)^2 + 2(k-r) + 1 > 3$,

тому

$\alpha_{r+1}(m) = \alpha_{r+1}(m+1) = (k-r)^2 - 1$.

Таким чином,

$$\hat{f}_{m+1} - \hat{f}_m = \varphi_{0,1}^{(k+1)} + \varphi_{0,2}^{(k+1)} + \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(\alpha_1(m+1))}} - \varphi_{0,1}^{(k+1)} -$$

$$- \varphi_{0,2}^{(k+1)} - \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(\alpha_1(m))}} = \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(\alpha_1(m+1))}} - \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(\alpha_1(m))}} =$$

$$= - \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(\alpha_1(m+1))}\hat{Q}_1^{(\alpha_1(m))}} \left(\hat{Q}_1^{(\alpha_1(m+1))} - \hat{Q}_1^{(\alpha_1(m))}\right) =$$

$$= (-1)^2 \frac{a_{1,1}}{\hat{Q}_1^{(\alpha_1(m+1))}\hat{Q}_1^{(\alpha_1(m))}} \cdot \frac{a_{2,2}}{\hat{Q}_2^{(\alpha_2(m+1))}\hat{Q}_2^{(\alpha_2(m))}} \times$$

$$\times \left(\hat{Q}_2^{(\alpha_2(m+1))} - \hat{Q}_2^{(\alpha_2(m))}\right) = \ldots =$$

$$= (-1)^r \prod_{j=1}^{r} \frac{a_{j,j}}{\hat{Q}_j^{(\alpha_j(m+1))}\hat{Q}_j^{(\alpha_j(m))}} \left(\hat{Q}_r^{(\alpha_r(m+1))} - \hat{Q}_r^{(\alpha_r(m))}\right) =$$

$$= (-1)^r \prod_{j=1}^{r} \frac{a_{j,j}}{\hat{Q}_j^{(\alpha_j(m+1))}\hat{Q}_j^{(\alpha_j(m))}} \left(\varphi_{r,1}^{(k-r+1)} - \varphi_{r,1}^{(k-r)}\right) =$$

$$= (-1)^k \prod_{j=1}^{r} \frac{a_{j,j}}{\hat{Q}_j^{(\alpha_j(m+1))}\hat{Q}_j^{(\alpha_j(m))}} \cdot \frac{\prod\limits_{j=1}^{k-r+1} a_{j+r,r}}{\prod\limits_{j=1}^{k-r+1} Q_{j+r,r}^{(k+1-r-j)} \prod\limits_{j=1}^{k-r} Q_{j+r,r}^{(k-r-j)}};$$

9°) $m = k^2 + 2k + 1 + 2r = (k+1)^2 + 2r$,

$m + 1 = (k+1)^2 + 2r + 1, \ \ 2 \le r \le k$,

тоді $\left[\sqrt{m}\right] = \left[\sqrt{m-1}\right] = \left[\sqrt{m+1}\right] = k+1$,

за формулами (8), (11) для $0 \le j \le r$ знаходимо

$\alpha_j(m) = (k-j)^2 + 2(k-j) + 2(r-j) + 1$,

$\alpha_j(m+1) = (k-j)^2 + 2(k-j) + 2(r-j) + 1$,

$\alpha_r(m) = (k-r+1)^2, \quad \alpha_r(m+1) = (k-r+1)^2 + 1, \quad 0 \le r \le k$,

$\alpha_k(m) = 1, \qquad \alpha_k(m+1) = 2$,

отже, отримуємо

$$\hat{f}_{m+1} - \hat{f}_m = (-1)^r \prod_{j=1}^{r} \frac{a_{j,j}}{\hat{Q}_j^{(\alpha_j(m+1))}\hat{Q}_j^{(\alpha_j(m))}} \left(\varphi_{r,2}^{(k-r+1)} - \varphi_{r,2}^{(k-r)}\right) =$$

$$= (-1)^k \prod_{j=1}^{r} \frac{a_{j,j}}{\hat{Q}_j^{(\alpha_j(m+1))}\hat{Q}_j^{(\alpha_j(m))}} \cdot \frac{\prod\limits_{j=1}^{k-r+1} a_{r,j+r}}{\prod\limits_{j=1}^{k-r+1} Q_{r,j+r}^{(k+1-r-j)} \prod\limits_{j=1}^{k-r} Q_{r,j+r}^{(k-r-j)}};$$

10°) $m = k^2 + 4k + 2 = (k+1)^2 + 2k + 1$,

$m + 1 = k^2 + 4k + 3 = (k+1)^2 + 2k + 2$,

тоді $\left[\sqrt{m}\right] = \left[\sqrt{m-1}\right] = \left[\sqrt{m+1}\right] = k + 1$,

за формулами (8), (11) для $0 \le j \le k$ знаходимо

$\alpha_1(m) = k^2 + 4k + 2 - 3 - 2k = (k-1)^2 + 4(k-1) + 2$,

$\alpha_1(m+1) = (k-1)^2 + 4(k-1) + 3$,

$\left[\sqrt{\alpha_1(m)}\right] = \left[\sqrt{\alpha_1(m) - 1}\right] = \left[\sqrt{\alpha_1(m+1)}\right] = k + 1, \qquad \ldots,$

$\alpha_j(m) = (k-j)^2 + 4(k-j) + 2$,

$\alpha_j(m+1) = (k-j)^2 + 4(k-j) + 3$,

$\alpha_k(m) = 2, \qquad \alpha_k(m+1) = 3$,

отже, отримуємо

$$\hat{f}_{m+1} - \hat{f}_m = (-1)^k \prod_{j=1}^{k+1} \frac{a_{j,j}}{\hat{Q}_j^{(\alpha_j(m+1))} \hat{Q}_j^{(\alpha_j(m))}}.$$

Таким чином, остаточно

– для $m = k^2 + 4k + 2,\ k = 0,1,\ldots$:

$$\hat{f}_{m+1} - \hat{f}_m = (-1)^k \prod_{j=1}^{k+1} \frac{a_{j,j}}{\hat{Q}_j^{(\alpha_j(m+1))} \hat{Q}_j^{(\alpha_j(m))}},$$

– для $m = k^2 + 2k + 2r,\ k = 0,1,\ldots,\ 0 \le r \le k$:

$$\hat{f}_{m+1} - \hat{f}_m = (-1)^r \prod_{j=1}^{r} \frac{a_{j,j}}{\hat{Q}_j^{(\alpha_j(m+1))} \hat{Q}_j^{(\alpha_j(m))}} \left(\varphi_{r,1}^{(k-r+1)} - \varphi_{r,1}^{(k-r)}\right),$$

– для $m = k^2 + 2k + 2r + 1,\ k = 0,1,\ldots,\ 0 \le r \le k$:

$$\hat{f}_{m+1} - \hat{f}_m = (-1)^r \prod_{j=1}^{r} \frac{a_{j,j}}{\hat{Q}_j^{(\alpha_j(m+1))} \hat{Q}_j^{(\alpha_j(m))}} \left(\varphi_{r,2}^{(k-r+1)} - \varphi_{r,2}^{(k-r)}\right),$$

або

– для $m = k^2 + 4k + 2,\ k = 0,1,\ldots$:

$$\hat{f}_{m+1} - \hat{f}_m = (-1)^k \prod_{j=1}^{k+1} \frac{a_{j,j}}{\hat{Q}_j^{(\alpha_j(m+1))} \hat{Q}_j^{(\alpha_j(m))}}, \tag{12'}$$

– для $m = k^2 + 2k + 2r,\ k = 0,1,\ldots,\ 0 \le r \le k$:

$$\hat{f}_{m+1} - \hat{f}_m = (-1)^k \prod_{j=1}^{r} \frac{a_{j,j}}{\hat{Q}_j^{(\alpha_j(m+1))} \hat{Q}_j^{(\alpha_j(m))}} \cdot \frac{\prod\limits_{j=1}^{k-r+1} a_{j+r,r}}{\prod\limits_{j=1}^{k-r+1} Q_{j+r,r}^{(k+1-r-j)} \prod\limits_{j=1}^{k-r} Q_{j+r,r}^{(k-r-j)}}, \tag{12''}$$

– для $m = k^2 + 2k + 2r + 1,\ k = 0,1,\ldots,\ 0 \le r \le k$:

$$\hat{f}_{m+1} - \hat{f}_m = (-1)^k \prod_{j=1}^{r} \frac{a_{j,j}}{\hat{Q}_j^{(\alpha_j(m+1))}\hat{Q}_j^{(\alpha_j(m))}} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{k-r+1} a_{j+r,r}}{\prod_{j=1}^{k-r+1} Q_{r,j+r}^{(k+1-r-j)} \prod_{j=1}^{k-r} Q_{r,j+r}^{(k-r-j)}}. \qquad (12''')$$

Теорема. *Нехай елементи ДНД* (1) *є додатними числами. Тоді для скінченного ДНД* (5) *справджуються такі нерівності:*

$$\hat{f}_{(2n)^2+2(2n)} = \hat{f}_{4n^2+4n} \le \hat{f}_{4n^2+4n+1} \le \ldots \le \hat{f}_{4n^2+8n+2} \le$$
$$\le \hat{f}_{4n^2+8n+3} = \hat{f}_{(2n+1)^2+2(2n+1)}, \quad n = 0,1,\ldots, \qquad (13)$$

$$\hat{f}_{(2p+1)^2+2(2p+1)} = \hat{f}_{4p^2+8p+3} \ge \hat{f}_{4p^2+8p+4} \ge \ldots \ge \hat{f}_{4p^2+12p+7} \ge \hat{f}_{4p^2+12p+8} =$$
$$= \hat{f}_{(2p+2)^2+2(2p+2)}, \qquad p = 0,1,\ldots. \qquad (14)$$

Д о в е д е н н я. Оскільки елементи ДНД (1) $a_{k+j,k}$, $b_{k+j,k}$, $k, j = 0,1,\ldots$, є додатними числами, то і всі залишки скінченного ДНД (5), $\hat{Q}_j^{(p)}$, $Q_{i+j,i}^{(s)}$, $Q_{i,i+j}^{(r)}$, $i = 0,1,\ldots$, $j = 1,2,\ldots$, $p,r,s = 0,1,\ldots$, що визначаються за формулами (6), (7), (9), є додатними.

Для встановлення нерівностей (13), (14) розглянемо різниці вигляду

$$\hat{f}_{4n^2+4n+1+k} - \hat{f}_{4n^2+4n+k}, \qquad k = 0,1,\ldots,4n+2,$$

та

$$\hat{f}_{4p^2+8p+4+r} - \hat{f}_{4p^2+8p+3+r}, \qquad r = 0,1,\ldots,4p+4,$$

і доведемо, що

$$\hat{f}_{4n^2+4n+1+j} \ge \hat{f}_{4n^2+4n+j}, \qquad j = 0,1,\ldots,4n+2,$$

$$\hat{f}_{4p^2+8p+4+r} \le \hat{f}_{4p^2+8p+3+r}, \qquad r = 0,1,\ldots,4p+4.$$

Покажемо, що

$$\hat{f}_{4n^2+4n+1} \ge \hat{f}_{4n^2+4n}, \qquad \hat{f}_{4p^2+8p+4} \le \hat{f}_{4p^2+8p+3}.$$

Оскільки $m = 4n^2 + 4n = (2n)^2 + 2 \cdot 2n$ і $m = 4p^2 + 8p + 3 = (2p+1)^2 + 2 \cdot (2p+1)$, $n = 0,1,\ldots$, $p = 0,1,\ldots$, то, використовуючи формулу (12″) для $r = 0$, $k = 2n$ та для $r = 0$, $k = 2p+1$, відповідно одержимо

$$\hat{f}_{4n^2+4n+1} - \hat{f}_{4n^2+4n} = \varphi_{0,1}^{(2n+1)} - \varphi_{0,1}^{(2n)} = (-1)^{2n} \frac{\prod_{j=1}^{2n+1} a_{j,0}}{\prod_{j=1}^{2n+1} Q_{j,0}^{(2n+1-j)} \prod_{j=1}^{2n} Q_{j,0}^{(2n-j)}} \ge 0,$$

$$\hat{f}_{4p^2+8p+4} - \hat{f}_{4p^2+8p+3} = (-1)^{2p+1} \frac{\prod_{j=1}^{2p+2} a_{j,0}}{\prod_{j=1}^{2p+2} Q_{j,0}^{(2p+2-j)} \prod_{j=1}^{2p+1} Q_j^{(2p+1-j)}} \le 0.$$

Отже, для перших двох наближень нерівності (13), (14) справджуються.

Аналогічними обчисленнями переконуємось, що і для решти різниць нерівності (13), (14) є правильними.

Теорему доведено. ♦

Висновки. Встановлену в роботі формулу різниці між двома сусідніми фігурними наближеннями можна використати для вивчення поведінки послідовності фігурних наближень ДНД з дійсними елементами, зокрема, з від'ємними частинними чисельниками.

1. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
2. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
3. *Кучмінська Х. Й.* Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 7. – С. 614–618.
4. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2010. – 218 с.
5. *Кучмінська Х. Й., Сусь О. М., Возна С. М.* Апроксимативні властивості двовимірних неперервних дробів // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 1. – С. 30–44.
   Те саме: *Kuchmins'ka Kh. Yo., Sus' O. M., Vozna S. M.* Approximation properties of two-dimensional continued fractions // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, No. 1. – P. 36–54.
6. *Пагіря М. М., Свида Т. С.* Задача інтерполяції функцій двовимірними ланцюговими дробами // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 6. – С. 842–851.
   Те саме: *Pahirya M. M., Svyda T. S.* Problem of interpolation of functions by two-dimensional continued fractions // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, No. 6. – P. 954–966.
7. *Сусь О. М.* Деякі питання аналітичної теорії двовимірних ланцюгових дробів: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1996. – 123 с.
8. *Lorentzen L.* Continued fractions with circular twin value sets // Trans. Amer. Math. Soc. – 2008. – **360**, No. 8. – P. 4287–4304.
9. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions. – Vol. 1: Convergence Theory. – Amsterdam – Paris: Atlantis Press/Word Scientific, 2008. – 308 p.
10. *Murphy J. F., O'Donohoe M. R.* A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions // J. Comput. and Appl. Math. – 1978. – **4**, No. 3. – P. 181–190.

ФОРМУЛА РАЗНОСТИ ДЛЯ ОДНОГО ИЗ ФИГУРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

Рассмотрен один из способов построения фигурных приближений (фигурных подходящих дробей) двумерных непрерывных дробей, которые используются при изучении условий эквивалентности двух двумерных непрерывных дробей. Установленная в работе формула разности для соседних приближений используется для исследования свойств последовательности таких фигурных подходящих двумерных непрерывных дробей.

ON FORMULA OF DIFFERENCE FOR ONE OF THE FIGURED APPROXIMANTS OF TWO-DIMENSIONAL CONTINUED FRACTIONS

The paper deals with one of the methods of constructing the figured approximants (figured convergents) for two-dimensional continued fractions, which is used to study the conditions for equivalence of two two-dimensional continued fractions. The formula of difference for neighboring approximants, which is established in the paper, is used to investigate the properties for a sequence of such figured convergents two-dimensional continued fractions.

[1] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,

[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 04.07.11