УДК 512.8: 519.4

Светлой памяти моего учителя
Бориса Васильевича Попова

И. В. Позднякова

ПОЛУГРУППЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ НЕКОТОРЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ МОНОУНАРНЫХ АЛГЕБР

Рассматривается некоторый класс бесконечных моноунарных алгебр, не содержащих циклических и метамоногенных подалгебр. Показано, что моноунарная алгебра этого класса определяется с точностью до изоморфизма своей полугруппой эндоморфизмов. Также доказано, что в полугруппе эндоморфизмов каждой моноунарной алгебры этого класса существует плотно вложенный идеал, мощность которого совпадает с порядком этой моноунарной алгебры и который также определяет ее.

Исследование полугруппы эндоморфизмов любой алгебраической системы всегда представляет значительный интерес. Некоторые свойства алгебраической системы находят свое отражение в свойствах полугруппы эндоморфизмов этой системы. Наибольший интерес представляет случай, когда полугруппа эндоморфизмов определяет структуру исходной алгебраической системы, то есть характеризует ее с точностью до изоморфизма. Одним из первых результатов такого рода получен Л. М. Глускиным. В работе [1] он показал, что отношение квазипорядка характеризуется полугруппой эндоморфизмов с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма. Впоследствии этот результат был обобщен на более широкий класс рефлексивных бинарных отношений. В [7] указан максимальный класс бинарных отношений, которые характеризуются полугруппой эндоморфизмов ранга два (и более высокого ранга) с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма. В этих работах существенно использовалась рефлексивность бинарного отношения. Упомянутые выше результаты были обобщены в [10], где рассматривались отношения произвольной арности также рефлексивные.

В настоящей работе рассматриваются бесконечные моноунарные алгебры, удовлетворяющие некоторым условиям. Унарную операцию можно рассматривать как бинарное отношение, удовлетворяющее условию функциональности. Такое бинарное отношение не является рефлексивным, за исключением тривиального случая. В связи с этим методы доказательств, которые использовались в работах [1, 7], оказываются неприменимыми.

Моноунарные алгебры играют значительную роль в изучении алгебраических и реляционных структур, особенно в конечном случае [12, 18, 21]. Кроме того, существует тесная связь между моноунарными алгебрами и некоторыми видами автоматов [9, 11]. Моноунарные алгебры начали активно изучаться с 60-х годов прошлого века и на сегодняшний день существует большое количество работ, посвященных им, например, [4, 8, 13–17, 20, 21]. В [2] сделан краткий обзор результатов исследований алгебр, родственных моноунарным алгебрам, и отмечено, что до сих пор остается не до конца решенной задача об «определимости» алгебры родственной ей алгеброй в теории моноунарных алгебр. В работе [8] доказано, что связная моноунарная алгебра с некоторыми условиями конечности (в частности, конечная алгебра) определяется полугруппой эндоморфизмов. Следует отметить работу [20], в которой аналогичный результат получен для бесконечных моноунарных алгебр, не содержащих циклических подалгебр с сюрьективной операцией.

В этой статье рассматривается класс бесконечных моноунарных алгебр без циклических и метамоногенных подалгебр. Доказано, что моноунарные алгебры этого класса определяются полугруппой эндоморфизмов. Кроме того, найдена подполугруппа полугруппы эндоморфизмов, мощность которой равна мощности множества, на котором задана унарная операция, и также характеризующая моноунарную алгебру с точностью до изоморфизма. Эта полугруппа образует плотно вложенный идеал полугруппы всех эндоморфизмов моноунарной алгебры.

Представляет интерес тот факт, что любая полугруппа изоморфна подполугруппе полугруппы эндоморфизмов некоторой моноунарной алгебры. Действительно, пусть G – произвольная полугруппа с единицей (возможно, присоединенной внешним образом). Обозначим через f_a левый сдвиг полугруппы G на элемент $a \in G$. Тогда можно рассматривать моноунарную алгебру (G, f_a), где $f_a(x) = ax$ для всех $x \in G$. Пусть R_G – полугруппа всех правых сдвигов полугруппы G. Хорошо известно [3, 5], что R_G изоморфна полугруппе G. Известно также, что левый сдвиг f_a коммутирует со всеми правыми сдвигами полугруппы G. Поэтому все преобразования из полугруппы R_G являются эндоморфизмами алгебры (G, f_a). Таким образом, полугруппа G изоморфна подполугруппе R_G полугруппы всех эндоморфизмов алгебры (G, f_a) [5].

Все понятия, связанные с полугруппами и бинарными отношениями, которые используются в настоящей работе без определения, можно найти в монографиях [3, 6].

Моноунарной алгеброй называют алгебру (A, f), где A – непустое множество, а f – унарная алгебраическая операция, определенная на множестве A.

Пусть (A, f) – моноунарная алгебра. Подалгебру алгебры (A, f), порожденную элементом α из A, будем обозначать через $[\alpha]$. Если моноунарная алгебра порождается одним элементом, то она называется *моногенной*. Моногенная моноунарная алгебра называется *циклической*, если она порождается любым своим элементом. Элементы циклической подалгебры называют *циклическими элементами*.

Метамоногенной моноунарной алгеброй называют моноунарную алгебру, которая является объединением строго возрастающей последовательности моногенных подалгебр.

Моноунарную алгебру называют *связной*, если пересечение двух любых ее моногенных подалгебр непусто.

Пусть (A, f) – произвольная моноунарная алгебра. Преобразование g множества A такое, что из $f(\alpha) = \beta$ следует $f(g(\alpha)) = g(\beta)$ для всех $\alpha, \beta \in$ $\in A$, называют *эндоморфизмом моноунарной алгебры* (A, f). Очевидно, что преобразование g будет эндоморфизмом тогда и только тогда, когда $gf =$ $= fg$. Будем обозначать через $End(A)$ полугруппу всех эндоморфизмов моноунарной алгебры (A, f), а через $E(A)$ – совокупность всех идемпотентов полугруппы $End(A)$.

Если (A, f) является моногенной моноунарной алгеброй без циклических элементов, то полугруппа $End(A)$ будет бесконечной моногенной полугруппой с образующим элементом f. Описание строения всех эндоморфизмов произвольной моноунарной алгебры изложено в работе [19].

Пусть, далее, (A, f) – произвольная связная моноунарная алгебра без циклических элементов и метамоногенных подалгебр. Если (A, f) не содержит циклической подалгебры, то моногенные подалгебры в (A, f) будут бесконечными.

Через $\mathbb{N}$ будем обозначать множество всех натуральных чисел, а через $\mathbb{N}_0$ – множество всех целых неотрицательных чисел. Элемент α_0 будем называть *концевым*, если $f(\beta) \neq \alpha_0$ для всех $\beta \in A$. Так как алгебра

(A,f) не содержит метамоногенных подалгебр, то для каждого элемента α алгебры (A,f) существует концевой элемент α_0 такой, что $f^k(\alpha_0)=\alpha$, где $k\in\mathbb{N}_0$. Обозначим через A_0 множество всех концевых элементов алгебры (A,f).

Пусть α,β − произвольные элементы алгебры (A,f). В силу связности алгебры (A,f) всегда найдутся числа $m,n\in\mathbb{N}_0$ такие, что $f^m(\alpha)=f^n(\beta)$.

Подалгебру $[\alpha]$ алгебры (A,f), где $\alpha\in A_0$, будем называть моногенной подалгеброй *максимальной высоты*, если для всех $\beta\in A_0$ и всех $m,n\in\mathbb{N}_0$ выполняется условие:

из того, что $f^m(\alpha)=f^n(\beta)$, *следует* $m\geq n$.

Обозначим через $\mathfrak{F}$ класс всех связных моноунарных алгебр (A,f), содержащих моногенную подалгебру максимальной высоты. Из этого условия следует, в частности, что алгебра (A,f) не содержит циклических и метамоногенных подалгебр.

Далее будем рассматривать только моноунарные алгебры класса $\mathfrak{F}$.

Замечание 1. Пусть A_1 − множество всех элементов алгебры (A,f), которые порождают моногенные подалгебры максимальной высоты. Определим отображение $\nu:A\to\mathbb{N}_0$, положив $\nu(\gamma)=m-n$, если $f^m(\alpha_0)=f^n(\gamma)$, а $\alpha_0\in A_1$. Число $\nu(\gamma)$ не зависит от выбора $\alpha_0\in A_1$ и определяется только элементом γ. Действительно, пусть $\alpha\in A_1$ и $f^{m'}(\alpha)=f^{n'}(\gamma)$. Тогда $f^{m'+n}(\alpha)=$ $=f^{n'+n}(\gamma)=f^{n'+m}(\alpha_0)$. Поскольку элементы α_0 и α порождают моногенные подалгебры максимальной высоты, то $m'+n=n'+m$, откуда $m'-n'=m-n$.

Очевидно, что $\nu(\alpha)=0$ тогда и только тогда, когда $\alpha\in A_1$. Кроме того, функция ν обладает следующими свойствами:

1°) $\nu(f^k(\gamma))=\nu(\gamma)+k$;

2°) если $\gamma\in A_1$, то $\nu(f^k(\gamma))=k$ для любых $\gamma\in A$ и $k\in\mathbb{N}_0$.

Действительно, пусть $\nu(\gamma)=m-n$ и $f^m(\alpha_0)=f^n(\gamma)$, $\alpha_0\in A_1$. Тогда $f^{m+k}(\alpha_0)=f^n(f^k(\gamma))$. Поэтому имеем, что $\nu(f^k(\gamma))=(m+k)-n=\nu(\gamma)+k$. Свойство ***2°***) непосредственно следует из свойства ***1°***), если учесть, что $\nu(\gamma)=0$.

Замечание 2. Пусть $\varepsilon\subset A\times A$ − отношение эквивалентности, определенное следующим образом:

$(\alpha,\beta)\in\varepsilon$ *тогда и только тогда, когда* $\nu(\alpha)=\nu(\beta)$.

Класс эквивалентности по отношению ε, состоящий из всех элементов γ из A таких, что $\nu(\gamma)=n$, обозначим через K_n. Очевидно, что $K_0=A_1$. Пусть $\alpha\in A_1$. Положим $\alpha_k=f^k(\alpha)$ для всех $k\in\mathbb{N}_0$. Тогда, согласно замечанию 1, $\nu(\alpha_k)=k$ и поэтому $\alpha_k\in K_k$ для любого $k\in\mathbb{N}_0$. В силу свойства ***1°***) функции ν, отношение эквивалентности ε стабильно относительно операции f и потому является конгруэнцией на алгебре (A,f), причем фактор-алгебра $(A,f)/\varepsilon$ будет бесконечной моногенной моноунарной алгеброй.

Пусть g − произвольное преобразование множества A. Будем обозначать через ε_g отношение эквивалентности на множестве A, которое определяется следующим образом:

$(\alpha, \beta) \in \varepsilon_g$ *тогда и только тогда, когда* $g(\alpha) = g(\beta)$.

Утверждение 1. *Для каждого преобразования* $g \in End(A)$ *существует единственное число* $\nu_g \in \mathbb{N}_0$ *такое, что* $\nu g(\beta) = \nu(\beta) + \nu_g$ *для всех* $\beta \in A$. *Более того, отображение* $End(A) \to (\mathbb{N}_0, +)$ *такое, что* $g \mapsto \nu_g$, *является гомоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in A$. Поскольку алгебра (A, f) связна, то существуют такие числа $p, q \in \mathbb{N}_0$, что $f^p(\alpha) = f^q(\beta)$. Тогда, согласно замечанию 1,

$$p + \nu(\alpha) = \nu f^p(\alpha) = \nu f^q(\beta) = q + \nu(\beta)$$

и

$$p + \nu g(\alpha) = \nu f^p g(\alpha) = \nu g f^p(\alpha) = \nu g f^q(\beta) = \nu f^q g(\beta) = q + \nu g(\beta),$$

откуда

$$\nu g(\beta) - \nu g(\alpha) = p - q = \nu(\beta) - \nu(\alpha),$$

и можно положить

$$\nu_g = \nu g(\beta) - \nu(\beta) = \nu g(\alpha) - \nu(\alpha).$$

Если $\nu(\alpha) = 0$, то $\nu g(\alpha) \geq \nu(\alpha)$, поэтому $\nu_g \geq 0$.

Докажем теперь второе предложение утверждения. Для этого достаточно зафиксировать элемент $\beta \in A$ и заметить, что для любых элементов $g, h \in End(A)$ выполняется цепочка равенств

$$\nu_{gh} = \nu gh(\beta) - \nu(\beta) = \nu gh(\beta) - \nu h(\beta) + \nu h(\beta) - \nu(\beta) = \nu_g + \nu_h. \quad ♦$$

Следствие 1. *Для всех* $k \in \mathbb{N}_0$ *имеет место равенство* $\nu_{f^k} = k$.

Доказательство. По замечанию 1, $\nu(f^k(\gamma)) = \nu(\gamma) + k$ для всех $\gamma \in A$. ♦

Следствие 2. *Пусть* $g \in End(A)$. *Тогда из* $g(\alpha) = g(\beta)$ *следует* $\nu(\alpha) = \nu(\beta)$ *для всех* $\alpha, \beta \in A$.

Доказательство. Согласно утверждению 1,

$$\nu_g = \nu g(\beta) - \nu(\beta) = \nu g(\alpha) - \nu(\alpha). \quad ♦$$

Следствие 3. *Для всех* $e \in E(A)$ *и всех* $\beta \in A$ *имеют место равенства* $\nu_e = 0$ *и* $\nu(e(\beta)) = \nu(\beta)$.

Теорема 1. *Для любого элемента алгебры* (A, f) *существует единственное преобразование* $\hat{\gamma} \in End(A)$ *такое, что* $\hat{\gamma}(A) = [\gamma]$. *При этом* $\hat{\gamma}(\beta) = f^{\nu(\beta)}(\gamma)$ *для всех* $\beta \in A$ *и* $\nu_\gamma = \nu(\gamma)$. *Отображение* $A \to End(A)$ *такое, что* $\gamma \mapsto \hat{\gamma}$, − *инъективно. Кроме того,* $\hat{\gamma} \in E(A)$ *тогда и только тогда, когда* $\nu(\gamma) = 0$.

Доказательство. Для доказательства существования достаточно показать, что преобразование $\hat{\gamma}$ алгебры A, заданное формулой $\hat{\gamma}(\beta) = f^{\nu(\beta)}(\gamma)$ для всех $\beta \in A$, является эндоморфизмом алгебры A. Действительно, по замечанию 1, $f\hat{\gamma}(\beta) = f^{\nu(\beta)+1}(\gamma) = f^{\nu(f(\beta))}(\gamma) = \hat{\gamma} f(\beta)$ для всех $\beta \in A$.

Для доказательства единственности предположим, что $g \in End(A)$ и $g(A) = [\gamma]$. Пусть $g(\alpha) = \gamma$ для некоторого элемента $\alpha \in A$. Предположим, что моногенная подалгебра $[\alpha]$ не является моногенной подалгеброй максимальной высоты. Тогда существует элемент $\delta \in A_0$ и числа $m, n \in \mathbb{N}_0$ такие, что $f^m(\alpha) = f^n(\delta)$ и $m < n$. Поскольку $g(A) = [\gamma]$, то существует такое число $p \in \mathbb{N}_0$, что $g(\delta) = f^p(\gamma)$. Тогда

$$f^{n+p}(\gamma) = f^n f^p(\gamma) = f^n g(\delta) = g f^n(\delta) = g\, f^m(\alpha) = f^m g(\alpha) = f^m(\gamma),$$

поэтому $n + p = m$, что невозможно.

Поскольку алгебра A связна, то существуют такие числа $k, \ell \in \mathbb{N}_0$, что $f^k(\alpha) = f^\ell(\beta)$. По замечанию 1, $k = \ell + \nu(\beta)$. Поскольку $g(A) = [\gamma]$, то существует такое число $p \in \mathbb{N}_0$, что $g(\beta) = f^p(\gamma)$. Тогда

$$f^k(\gamma) = f^k g(\alpha) = g\, f^k(\alpha) = g\, f^\ell(\beta) = f^\ell g(\beta) = f^{\ell+p}(\gamma).$$

Поэтому $k = \ell + p$, $g(\beta) = f^{\nu(\beta)}(\gamma)$ и $g = \hat{\gamma}$.

Равенство $\nu_{\hat{\gamma}} = \nu(\gamma)$ следует из замечания 1 и цепочки равенств

$$\nu_{\hat{\gamma}} = \nu\hat{\gamma}(\gamma) - \nu(\gamma) = \nu f^{\nu(\gamma)}(\gamma) - \nu(\gamma) = \nu(\gamma) + \nu(\gamma) - \nu(\gamma) = \nu(\gamma).$$

Инъективность отображения $A \to End(A)$ такого, что $\gamma \mapsto \hat{\gamma}$, очевидна.

Пусть теперь $\hat{\gamma} \in E(A)$. Тогда, по следствию 3, $\nu(\gamma) = \nu_{\hat{\gamma}} = 0$. Наоборот, если $\nu(\gamma) = 0$, то, по замечанию 1, для всех $p \in \mathbb{N}_0$ имеем

$$\hat{\gamma}\, f^p(\gamma) = f^{\nu(f^p(\gamma))}(\gamma) = f^{p+\nu(\gamma)}(\gamma) = f^p(\gamma).$$

Поскольку $\hat{\gamma}(A) = [\gamma]$, то $\hat{\gamma} \in E(A)$. ♦

Теорема 2. *Для всех* $\gamma \in A$, $g \in End(A)$ *и* $e \in E(A)$ *имеют место равенства:*

$$g\hat{\gamma} = \widehat{g(\gamma)},$$

$$\hat{\gamma} g = f^{\nu(g)}\hat{\gamma},$$

$$\hat{\gamma} e = \hat{\gamma}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\beta \in A$ − произвольный элемент. Тогда, по теореме 1, $g\hat{\gamma}(\beta) = g\, f^{\nu(\beta)}(\gamma) = f^{\nu(\beta)} g(\gamma) = \widehat{g(\gamma)}(\beta)$, а по теореме 1 и утверждению 1, $\hat{\gamma}\, g(\beta) = f^{\nu(g(\beta))}(\gamma) = f^{\nu_g + \nu(\beta)}(\gamma) = f^{\nu_g} f^{\nu(\beta)}(\gamma) = f^{\nu_g}\hat{\gamma}(\beta)$. Если $g \in E(A)$, то, по следствию 3, $\nu_g = 0$ и поэтому $\hat{\gamma}\, g(\beta) = \hat{\gamma}(\beta)$. ♦

Утверждение 2. *Для всех* $g \in End(A)$ *имеет место включение* $\varepsilon_g \subset \varepsilon$. *При этом* $\varepsilon_g = \varepsilon$ *тогда и только когда, когда* $g(A) = [\gamma]$ *для некоторого элемента* $\gamma \in A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $\varepsilon_g \subset \varepsilon$ следует из следствия 2.

Если $g(A) = [\gamma]$ для некоторого элемента $\gamma \in A$, то, по теореме 1, $g(\beta) = f^{\nu(\beta)}(\gamma)$ для всех $\beta \in A$, откуда $\varepsilon \subset \varepsilon_g$.

Пусть теперь $\varepsilon_g = \varepsilon$. Возьмем произвольный элемент $\alpha \in A_1$ и положим $\gamma = g(\alpha)$. Пусть $\beta \in A$ − произвольный элемент. Тогда поскольку, по замечанию 1, $\beta \varepsilon f^{\nu(\beta)}(\alpha)$, то $\beta \varepsilon_g f^{\nu(\beta)}(\alpha)$, поэтому

$$g(\beta) = g\,f^{\nu(\beta)}(\alpha) = f^{\nu(\beta)}g(\alpha) = f^{\nu(\beta)}(\gamma) \in [\gamma]. \qquad \blacklozenge$$

Идемпотент $e \in E(A)$ будем называть r*-минимальным*, если для всех $e' \in E(A)$ выполняется условие:

из $ee' = e'$ *следует, что* $e = e'$.

Равенство $ee' = e'$ равносильно включению $e'(A) \subset e(A)$, поэтому условие r-минимальности идемпотента влечет следующее:

из $e'(A) \subset e(A)$ *следует, что* $e'(A) = e(A)$.

Утверждение 3. *Для идемпотента* $e \in E(A)$ *следующие условия эквивалентны:*

(***i***) *идемпотент* e *–* r*-минимальный;*

(***ii***) *существует такой элемент* $\alpha \in A$*, что* $e(A) = [\alpha]$;

(***iii***) *существует такой элемент* $\alpha \in A_1$*, что* $e(A) = [\alpha]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эквивалентность (***iii***) и (***ii***) очевидна.

(***i***) $\Rightarrow$ (***iii***). Пусть e – r-минимальный идемпотент в $End(A)$ и пусть $\alpha_0 \in A_1$, а $e(\alpha_0) = \alpha$. По следствию 3, $\nu(\alpha_0) = \nu(\alpha) = 0$ и поэтому $\alpha \in A_1$. Следовательно, $[\alpha]$ – моногенная подалгебра максимальной высоты. По теореме 1, существует идемпотент $e' \in End(A)$ такой, что $e'(A) = [\alpha]$. Так как $e(A)$ образует подалгебру в (A, f) и $\alpha \in e(A)$, то $[\alpha] \subset e(A)$. Поэтому $e'(A) \subset e(A)$. Тогда $ee' = e'$. Поскольку e – r-минимальный идемпотент, то $e = e'$. Таким образом, $e(A) = [\alpha]$ – моногенная подалгебра максимальной высоты алгебры (A, f).

(***ii***) $\Rightarrow$ (***i***). Пусть $e' \in E(A)$ и $ee' = e'$. Тогда $e'(A) \subset [\alpha]$, поэтому $e'(A) = [\alpha']$ для некоторого элемента $\alpha' \in [\alpha]$. По теореме 1, $e' = \hat{\alpha}'$ и $\nu(\alpha') = 0$. Поэтому $\nu(\alpha) = \nu(\alpha') = 0$ и $\alpha = \alpha'$. Опять по теореме 1, $e = e' = \hat{\alpha}$. ♦

Лемма 1. *Пусть* e *и* e' *–* r*-минимальные идемпотенты в* $End(A)$. *Тогда* $ee' = e$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По утверждению 3 и теореме 1, существуют элементы $\alpha, \alpha' \in A_1$ такие, что $e(\beta) = f^{\nu(\beta)}(\alpha)$ и $e'(\beta) = f^{\nu(\beta)}(\alpha')$ для всех $\beta \in A$. Тогда, по следствию 3, $ee'(\beta) = f^{\nu(e'(\beta))}(\alpha) = f^{\nu(\beta)}(\alpha) = e(\beta)$ для всех $\beta \in A$. ♦

Для моноунарной алгебры (A, f) класса $\mathfrak{F}$ положим $\hat{A} = \{\hat{\gamma} : \gamma \in A\}$. По теореме 1, элемент $g \in End(A)$ принадлежит множеству $\hat{A}$ тогда и только тогда, когда существует элемент $\gamma \in A$ такой, что $g(A) = [\gamma]$. Это множество играет ключевую роль в последующих рассуждениях.

Утверждение 4. *Пусть* (A, f) *– моноунарная алгебра из класса* $\mathfrak{F}$. *Множество* $\hat{A}$ *является двусторонним идеалом в* $End(A)$ *и* $\hat{A} = End(A)e$ *для любого* r*-минимального идемпотента* $e \in End(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\gamma \in A$, $g, h \in End(A)$. Тогда множество $g\hat{\gamma}h(A)$ является подалгеброй моногенной моноунарной алгебры $[g(\gamma)]$, то есть тоже моногенной моноунарной подалгеброй алгебры (A, f). Тогда $g\hat{\gamma}h \in \hat{A}$, поэтому множество $\hat{A}$ является двусторонним идеалом в $End(A)$.

Пусть $e \in End(A)$ − r-минимальный идемпотент. По утверждению 3, $e \in \hat{A}$. Поэтому $End(A)e \subset \hat{A}$. С другой стороны, пусть $\beta, \gamma \in A$. По теореме 1, $\hat{\gamma}(\beta) = f^{\nu(\beta)}(\gamma)$. По следствию 3, $\hat{\gamma}e(\beta) = f^{\nu(e(\beta))}(\gamma) = f^{\nu(\beta)}(\gamma) = \hat{\gamma}(\beta)$. Следовательно, $\hat{\gamma}e = \hat{\gamma}$. Поэтому $\hat{A} = \{\hat{\gamma} : \gamma \in A\} \subset End(A)e$. ♦

Поскольку множество $\hat{A}$ является идеалом полугруппы $End(A)$, то $f\hat{A} \subset \hat{A}$. Обозначим через $\hat{f}$ левый сдвиг полугруппы $\hat{A}$ на элемент $f \in End(A)$. Тогда можно рассматривать моноунарную алгебру $(\hat{A}, \hat{f})$, где $\hat{f}(\hat{\gamma}) = f\hat{\gamma} = \hat{\gamma}f$ для всех $\hat{\gamma} \in \hat{A}$.

Теорема 3. *Отображение* $\hat{\bullet} : A \to \hat{A}$ *является изоморфизмом моноунарных алгебр* (A, f) *и* $(\hat{A}, \hat{f})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 1, отображение $\hat{\bullet} : A \to \hat{A}$ биективно, а, по теореме 2, $\widehat{f(\gamma)} = f\hat{\gamma} = \hat{f}(\hat{\gamma})$ для всех $\gamma \in A$.

Для доказательства основной теоремы потребуется

Лемма 2 [8, 20]. *Пусть* (A, f) − *моноунарная алгебра, а* e − *произвольный идемпотент полугруппы* $End(A)$. *Множество* $End_e(A) = \{g \in \in End(A) \mid eg = ge = g\}$ *является полугруппой, изоморфной полугруппе всех эндоморфизмов подалгебры* $e(A)$ *моноунарной алгебры* (A, f).

Теорема 4. *Пусть* (A, f) *и* (A', f') − *произвольные моноунарные алгебры класса* $\mathfrak{F}$. *Полугруппы эндоморфизмов* $End(A)$ *и* $End(A')$ *изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны моноунарные алгебры* (A, f) *и* (A', f'). *Каждый изоморфизм* $\psi : End(A) \to End(A')$ *полугрупп* $End(A)$ *и* $End(A')$ *можно представить в виде* $\psi(g) = \varphi g \varphi^{-1}$, *где* $g \in End(A)$, *а* $\varphi : A \to A'$ − *некоторый изоморфизм алгебр* (A, f) *и* (A', f').

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если моноунарные алгебры (A, f) и (A', f') изоморфны, то, очевидно, что полугруппы эндоморфизмов $End(A)$ и $End(A')$ также изоморфны. Пусть теперь $\psi : End(A) \to End(A')$ − произвольный изоморфизм полугрупп $End(A)$ и $End(A')$. Пусть, далее, e − r-минимальный идемпотент в $E(A)$, то есть для всех $e_1 \in E(A)$ из равенства $ee_1 = e_1$ следует, что $e_1 = e$. Так как ψ − изоморфизм, то равенство $e'e_1' = e_1'$ влечет $e' = e_1'$ для всех $e_1' \in E(A')$. Поэтому $e' \in E(A')$ − r-минимальный идемпотент в полугруппе $End(A')$. Тогда $\psi(\hat{A}) = \psi(End(A)e) = = End(A')e' = \hat{A}'$. Поскольку ψ − изоморфизм, то отображение $\psi \mid \hat{A}$ является биекцией между $\hat{A}$ и $\hat{A}'$. Поэтому отображение $\varphi : A \to A'$ такое, что $\psi(\hat{\alpha}) = \widehat{\varphi(\alpha)}$ для всех $\alpha \in A$, является биекцией между A и A'.

По утверждению 3, множество $e(A)$ является моногенной подалгеброй максимальной высоты в алгебре (A, f). По лемме 2, полугруппа $End_e(A)$ − бесконечная моногенная подполугруппа полугруппы $End(A)$. Тогда fe − образующая полугруппы $End_e(A)$. Легко проверить, что $\psi(End_e(A)) = = End_{e'}(A')$. Поскольку ψ − изоморфизм, то подполугруппа $End_{e'}(A')$ будет бесконечной моногенной подполугруппой полугруппы $End(A')$, а $f'e'$ – ее образующей. Следовательно, $\psi(fe) = f'e'$. Пусть α – произвольный элемент из A и $\beta = f(\alpha)$. Тогда, по теореме 2, $\hat{\alpha}fe = f\hat{\alpha}e = f\hat{\alpha} = \widehat{f(\alpha)} = \hat{\beta}$. Следовательно, $\psi(\hat{\alpha})\psi(fe) = \psi(\hat{\beta})$, откуда, вновь по теореме 2,

$$\widehat{f'\varphi(\alpha)} = f'\widehat{\varphi(\alpha)} = f'\widehat{\varphi(\alpha)}e' = \widehat{\varphi(\alpha)}f'e' = \widehat{\varphi(\alpha)}\psi(fe) = \widehat{\psi(\alpha)}\psi(fe) = \widehat{\varphi(\beta)}.$$

Поскольку отображение $\hat{\bullet}$ – изоморфизм, то $f'\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. Таким образом, φ – изоморфизм моноунарных алгебр (A, f) и (A', f').

Пусть теперь g – произвольный эндоморфизм в $End(A)$, и α – любой элемент из A. С учетом теоремы 2 справедлива цепочка равенств

$$\widehat{\varphi g(\alpha)} = \psi(\widehat{g(\alpha)}) = \psi(g\hat{\alpha}) = \psi(g)\psi(\hat{\alpha}) = \psi(g)\widehat{\varphi(\alpha)} = \widehat{\psi(g)(\varphi(\alpha))}.$$

Поскольку отображение $\hat{\bullet}$ – изоморфизм, то

$$\varphi g\varphi^{-1}(\varphi(\alpha)) = \varphi g(\alpha) = \psi(g)(\varphi(\alpha)).$$

Поскольку $A' = \varphi(A)$, то $\psi(g) = \varphi g\varphi^{-1}$. ♦

Утверждение 5. Пусть (A, f) *и* (A', f') – *моноунарные алгебры класса* $\mathfrak{F}$ *и* $\psi : End(A) \to End(A')$ – *изоморфизм. Тогда* $\psi(f) = f'$.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы, существует изоморфизм $\varphi : A \to A'$ такой, что $\psi(f) = \varphi f\varphi^{-1}$. Поскольку φ – изоморфизм, то $f'\varphi = \varphi f$. Тогда $\psi(f) = \varphi f\varphi^{-1} = f'\varphi\varphi^{-1} = f'$. ♦

Утверждение 6. *Пусть* (A, f) – *произвольная моноунарная алгебра класса* $\mathfrak{F}$. *Тогда все автоморфизмы полугруппы* $End(A)$ *являются внутренними.*

Доказательство. В самом деле, если ψ – произвольный автоморфизм полугруппы $End(A)$, то $\psi(g) = \varphi g\varphi^{-1}$, где φ – некоторый автоморфизм моноунарной алгебры (A, f), но тогда $\varphi \in End(A)$. ♦

Определение 1 [**6**]. Пусть $\mathfrak{R}$ – некоторый класс полугрупп. Говорят, что подполугруппа S' полугруппы S *плотно вложена в* S относительно $\mathfrak{R}$, если выполнены следующие условия:

1°) всякий гомоморфизм S на какую-либо полугруппу из $\mathfrak{R}$, являющийся продолжением тождественного изоморфизма S', должен быть изоморфизмом;

2°) для любой полугруппы S'' из $\mathfrak{R}$, являющейся отличной от S надполугруппой S, должен существовать не являющийся изоморфизмом гомоморфизм S'' на некоторую полугруппу из $\mathfrak{R}$, который есть продолжением тождественного изоморфизма S'.

Теорема 5. *Пусть* (A, f) – *произвольная моноунарная алгебра класса* $\mathfrak{F}$. *Идеал* $\hat{A}$ *полугруппы плотно вложен в полугруппу* $End(A)$ *относительно класса полугрупп, имеющих полугруппу* S *своим левым идеалом.*

Доказательство. Пусть φ – гомоморфизмом полугруппы $End(A)$, не являющийся изоморфизмом. Тогда для некоторых $g, h \in$ $\in End(A)$ таких, что $h \neq g$, выполняется равенство $\varphi(h) = \varphi(g)$. Так как $h \neq g$, то $g(\alpha) \neq h(\alpha)$ для некоторого элемента $\alpha \in A$. Поэтому $\widehat{g(\alpha)} \neq \widehat{h(\alpha)}$.

Так как

$$\varphi(\widehat{g(\alpha)}) = \varphi(g\hat{\alpha}) = \varphi(g)\varphi(\hat{\alpha}) = \varphi(h)\varphi(\hat{\alpha}) = \varphi(h\hat{\alpha}) = \varphi(\widehat{h(\alpha)}),$$

то гомоморфизм φ не будет изоморфизмом полугруппы $\hat{A}$. Таким образом, любой гомоморфизм полугруппы $End(A)$, не являющийся изоморфизмом, не может быть продолжением тождественного изоморфизма полугруппы $\hat{A}$. Пусть S'' – произвольная надполугруппа полугруппы $End(A)$, содержащая полугруппу $\hat{A}$ в качестве левого идеала. Определим теперь отображение $\psi : S'' \to End(A)$ следующим образом. Для произвольного элемента $x \in S''$ и любого элемента $\alpha \in A$ положим

$$\psi(x)(\alpha) = \beta \;\Leftrightarrow\; x\hat{\alpha} = \hat{\beta}.$$

Убедимся, что $\psi(x) \in End(A)$. Пусть α – произвольный элемент множества A. С учетом теоремы 2 справедлива цепочка равенств

$$\widehat{f\psi(x)(\alpha)} = \widehat{f(\psi(x)(\alpha))} = f\widehat{\psi(x)(\alpha)} = fx\hat{\alpha} = x\hat{\alpha}f = xf\hat{\alpha} = x(f\hat{\alpha}) =$$

$$= x(\widehat{f(\alpha)}) = \widehat{\psi(x)f(\alpha)}.$$

Поэтому $f\psi(x) = \psi(x)f$ и, следовательно, $\psi(x) \in End(A)$.

Пусть $x, y \in S''$ и $\alpha \in A$ – произвольные элементы. С учетом теоремы 2 справедлива цепочка равенств

$$\widehat{(\psi(x)\psi(y))(\alpha)} = \widehat{\psi(x)(\psi(y)(\alpha))} = x\widehat{\psi(y)(\alpha)} = xy\hat{\alpha} = \widehat{\psi(xy)(\alpha)}.$$

Поэтому $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$, и, следовательно, отображение ψ является гомоморфизмом.

Для любого $x \in End(A)$ и любого $\alpha \in A$ имеем $\psi(x)(\alpha) = x(\alpha)$, так как $\widehat{x(\alpha)} = x\hat{\alpha}$. Поэтому $\psi(x) = x$, то есть ψ индуцирует на $End(A)$ тождественный изоморфизм. Но для полугруппы S'' гомоморфизм ψ не является тождественным, поскольку множество $\psi(S'') = End(A)$ является собственным подмножеством S''. ♦

1. *Глускин Л. М.* Полугруппы изотонных преобразований // Успехи мат. наук. – 1961. – **16**, вып. 5. – С. 157–162.
2. *Карташов В. К.* О некоторых результатах и нерешенных задачах в теории унарных алгебр // Чебышевский сб. – 2011. – **12**, вып. 2(38). – С. 18–26.
3. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – Т. 1. – Москва: Мир, 1972. – 285 с.
4. *Куринной Г. Ч.* Об определимости унара конгруэнциями // Изв. вузов. Математика. – 1981. – № 3. – С. 76–78.
5. *Курош А. Г.* Общая алгебра (лекции). – Москва: Моск. гос. ун-т, 1970. – 159 с.
6. *Ляпин Е. С.* Полугруппы. – Москва: Физматгиз, 1960. – 592 с.
7. *Попов Б.* В. О полугруппах эндоморфизмов рефлексивных бинарных отношений // VII Всесоюзн. коллоквиум по общей алгебре. Рез. сообщ. и докл. – Кишинев, 1965. – С. 84.
8. *Попов Б. В.* Полугруппы эндоморфизмов некоторых унарных алгебр // Вестн. Восточноукр. гос. ун-та. – 2000. – **5**(27) – С. 19–23.
9. *Салий В. Н.* Универсальная алгебра и автоматы: Учеб. пособие для студентов мех.-мат. фак. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. – 74 с.
10. *Araujo J., Konieczny J.* Dense relation are determined by their endomorphism monoid // Semigroup Forum. – 2005. – **70**. – P. 302–306.
11. *Bartol W.* Programy dynamiczne obliczen. – Warszawa: PAN, 1974. – 76 c.

12. *Chvalina J.* Functional graphs, quasiordered sets and commutative hypergroups. – Brno: Masaryk Univ., 1995. – 205 p.
13. *Jakubíková-Studenovská D.* Lattice of quasiorders of monounary algebras // Miskolc Math. Notes. – 2009. – **10**, No. 1. – P. 41–48.
14. *Jakubíková-Studenovská D.* On ideal extensions of partial monounary algebras // Czechoslovak Math. J. – 2008. – **58**, No. 2. – P. 331–344.
15. *Jakubíková-Studenovská D., Petrejčíková M., Pócs J.* Monounary algebras with same quasiorders or retracts // Demonstr. Math. – 2011. – **44**, No. 3. – P. 481–496.
16. *Jakubíková-Studenovská D., Pócs J.* Cardinality of retracts of monounary algebras // Czechoslovak Math. J. – 2008. – **58**, No. 2. – P. 469–479.
17. *Jakubíková-Studenovská D., Pócs J.* Lattice of retracts of monounary algebras // Math. Slovaca. – 2011. – **61**, No. 1. – P. 107–125.
18. *Jonsson B.* Topics in universal algebra. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1972. – 220 p.
19. *Novotný M.* Uber Abbildungen von Mengen // Pac. J. Math. – 1963. – **13**. – P. 1359–1369.
20. *Popov B. V., Kovaleva O. V.* On a characterization of monounary algebras by their endomorphism semigroups // Semigroup Forum. – 2006. – **73**. – P. 444–456.
21. *Skornjakov L. A.* Unars // Universal Algebra: Proc. Colloq. (Esztergom Hungary, 1977). Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai 29. – Amsterdam: North-Holland, 1982. – P. 735–743.

НАПІВГРУПИ ЕНДОМОРФІЗМІВ ДЕЯКИХ НЕСКІНЧЕННИХ МОНОУНАРНИХ АЛГЕБР

Розглядається деякий клас нескінченних моноунарних алгебр, які не містять циклічних і метамоногенних підалгебр. Показано, що моноунарна алгебра цього класу визначається з точністю до ізоморфізму своєю напівгрупою ендоморфізмів. Також доведено, що в напівгрупі ендоморфізмів кожної моноунарної алгебри цього класу існує щільно вкладений ідеал, потужність якого дорівнює порядку моноунарної алгебри, і який також визначає її.

SEMIGROUPS OF ENDOMORPHISMS OF SOME INFINITE MONOUNARY ALGEBRAS

Some class of infinite monounary algebras without cyclic and metamonogennyh subalgebras is considered. It is shown that monounary algebra of this class is determined up to isomorphism by its semigroup of endomorphisms. It is also proved that in the semigroup of endomorphisms of each monounary algebra of this class there is a dense embedded ideal cardinal number of which is equal to the order of the monounary algebra and which also defines it.

Луганск. нац. ун-т
имени Тараса Шевченко, Луганск

Получено
05.01.12