УДК 517.51

С. А. Іліка, І. М. Черевко

АПРОКСИМАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Досліджено апроксимацію елемента запізнення в $\mathbb{R}^n$ *у випадку неперервної вхідної функції. Побудовано та обґрунтовано схему наближення розв'язків початкової задачі для нелінійного диференціально-функціонального рівняння розв'язками задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. Обчислення, виконані для модельного прикладу на основі запропонованої схеми апроксимації, узгоджуються з відомими результатами в літературі.*

Вступ. Диференціально-функціональні рівняння є математичними моделями багатьох фізичних і технічних процесів, еволюція яких залежить від передісторії [1, 9, 15, 17]. На відміну від звичайних диференціальних рівнянь, ці рівняння досліджені менше, зокрема на даний час немає універсальних методів їх розв'язання.

Числові методи розв'язування початкових задач для диференціально-функціональних рівнянь розвивались в роботах [10–14]. При цьому в основному методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь адаптуються на різні класи диференціально-функціональних рівнянь і диференціально-різницевих рівнянь.

Особливий інтерес становлять дослідження, що дозволяють використовувати методи теорії звичайних диференціальних рівнянь для аналізу диференціально-функціональних рівнянь.

Наближена заміна диференціально-різницевих рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь вперше розглядалась у працях [3, 8]. Аналіз схем апроксимації систем із запізненням у різних функціональних просторах здійснено в працях [2, 4, 6, 16]. Схема апроксимації лінійних диференціально-функціональних рівнянь запропонована в роботі [5]. Зазначимо, що точність наближення досягається за рахунок підвищення розмірності апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь.

1. Постановка задачі. Означення та допоміжні твердження. Нехай $\mathbb{R}^n$ – n-вимірний дійсний евклідів простір з деякою векторною нормою $|\cdot|$. Для $b > a$ через $C([a,b],\ \mathbb{R}^n)$ позначимо банаховий простір неперервних функцій, що відображають $[a,b]$ в $\mathbb{R}^n$, з топологією рівномірної збіжності. Простір $C([-\tau,0],\ \mathbb{R}^n)$, де τ – додатна стала, будемо позначати через C.

Якщо $\sigma \in \mathbb{R}$, $A \ge 0$, $x \in C([\sigma-\tau,\sigma+A],\ \mathbb{R}^n)$, то для довільного $t \in [\sigma,\sigma+A]$ функцію $x_t \in C$ означимо співвідношенням $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-\tau,0]$ [9].

Нехай Ω – підмножина $\mathbb{R} \times C$; $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – задана функція; $\dot{x} :\equiv \dfrac{dx(t)}{dt}$ – правостороння похідна від функції $x(s)$ при $s = t$. Рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x_t) \tag{1}$$

називатимемо диференціально-функціональним рівнянням із запізненням на множині Ω.

Означення **[9].** Для заданих $\sigma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$ функцію $x(\sigma,\varphi,f)$ називатимемо *розв'язком рівняння* (1) з початковим значенням φ в момент σ (або, простіше, розв'язком, що починається в (σ,φ)), якщо $x(\sigma,\varphi,f)$ є розв'язком рівняння (1) на $[\sigma-\tau,\sigma+A]$ і $x_\sigma(\sigma,\varphi,f) \equiv \varphi$.

Рівняння (1) − загальний тип рівняння, який охоплює, зокрема, включає звичайні диференціальні рівняння (при $\tau = 0$) вигляду

$$\dot{x}(t) = F(x(t)),$$

диференціально-різницеві рівняння

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1(t)), \ldots, x(t-\tau_p(t))), \quad 0 \le \tau_j(t) \le \tau, \quad j = 1, \ldots, p,$$

а також інтегро-диференціальні рівняння

$$\dot{x}(t) = \int_{-\tau}^{0} g(t, \theta, x(t+\theta))\, d\theta.$$

Знаходження розв'язку рівняння (1) з початковою умовою (σ, φ), $\sigma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$ є еквівалентним розв'язанню інтегрального рівняння

$$x(t) = \varphi(\sigma) + \int_{\sigma}^{t} f(s, x_s)\, ds, \qquad t \ge \sigma, \qquad x_\sigma = \varphi. \tag{2}$$

Теорема 1 [**9, 17**]. *Нехай* Ω *− відкрита множина в* $\mathbb{R} \times C$, *функція* $f(t, \varphi)$ *неперервна і ліпшицева за* φ *на кожному компакті з* Ω. *Якщо* $(\sigma, \varphi) \in \Omega$, *то існує єдиний розв'язок рівняння* (1) *з початковою умовою* (σ, φ).

Надалі розглядатимемо початкову задачу для диференціально-функціонального рівняння вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = L(t, x_t) + f(t, x_t), \qquad t \in [0, T], \qquad x_0 = \varphi, \tag{3}$$

де T − додатна стала, $\varphi \in C$,

$$L(t, \varphi) = \sum_{k=0}^{p} A_k(t) \varphi(t - \tau_k) + \int_{-\tau}^{0} D(t, \theta) \varphi(\theta)\, d\theta$$

− лінійний функціонал, що найчастіше зустрічається в застосуваннях; $A_k(t)$, $k = 0, \ldots, p$, − $(n \times n)$-неперервні функції при $t \in [0, T]$; $D(t, \theta)$ − $(n \times n)$-матрична функція, компоненти $d_{ij}(t, \theta)$ якої неперервні за сукупністю змінних на $[0, T] \times [-\tau, 0]$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p = \tau$; $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$ − неперервна функція, яка задовольняє умову Ліпшиця за φ:

$$|f(t, \varphi_1) - f(t, \varphi_2)| \le \mathcal{L} |\varphi_1 - \varphi_2|, \qquad \mathcal{L} > 0.$$

Метою роботи є поширення схеми апроксимації Красовського − Рєпіна [3, 5, 8] для наближення розв'язків початкової задачі для нелінійного диференціально-функціонального рівняння (3).

2. Апроксимація елемента запізнення. Розглянемо $m \in \mathbb{N}$ елементів запізнення, які породжені деякою вхідною функцією $x(t)$ і послідовно з'єднані між собою:

$$y_1(t) = x\big(t - \frac{\tau}{m}\big), \; y_2(t) = x\big(t - \frac{2\tau}{m}\big), \; \ldots, \; y_m(t) = x(t - \tau), \; x \in \mathbb{R}^n, \; t \in [0, T].$$

Поставимо їм у відповідність послідовність аперіодичних ланок, що описуються для системи звичайних диференціальних рівнянь [8]

$$\frac{\tau}{m} \frac{dz_1(t)}{dt} + z_1(t) = x(t),$$

$$\frac{\tau}{m} \frac{dz_j(t)}{dt} + z_j(t) = z_{j-1}(t), \qquad j = 2, \ldots, m, \qquad t \in [0, T], \tag{4}$$

$$z_j(0) = x\big(-\frac{j\tau}{m}\big), \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

де $x(t)$ − вхідна функція першого елемента запізнення. Будемо досліджувати відхилення між функціями $y_j(t)$ та $z_j(t)$, $t \in [0, T]$, $j = 1, \ldots, m$, залежно від гладкості функції $x(t)$.

Зазначимо, що система (4), (5) досліджена в [8] у випадку, коли функція $x(t)$ є скалярною і задовольняє умову Ліпшиця з константою $\mathcal{K}_1$ або має обмежену похідну на $[-\tau, T]$. При цьому встановлено нерівності

$$\left|z_j(t) - y_j(t)\right| \le \frac{4\mathcal{K}_1 \tau}{\sqrt{m}}, \qquad t \in [0, T], \qquad j = 1, \ldots, m\,. \tag{6}$$

Випадок, коли $x(t) \in C[-\tau, T]$, розглянуто в роботі [6]. Встановлено, що в цьому випадку справджуються нерівності

$$\left|z_j(t) - y_j(t)\right| \le 2\left(\frac{\mathcal{K}\tau}{\sqrt{m}} + \omega\left(x, \frac{\tau}{\sqrt{m}}\right)\right), \qquad t \in [0, T], \qquad j = 1, \ldots, m\,, \tag{7}$$

де стала $\mathcal{K} > 0$ не залежить від m, а $\omega\left(x, \frac{\tau}{m}\right) = \max\limits_{\substack{|t'-t''|<\frac{\tau}{m},\\ t', t'' \in [-\tau, T]}} \left|x(t') - x(t'')\right|$ – модуль неперервності функції $x(t)$ на $[-\tau, T]$ [7].

Дослідимо точність апроксимації векторного елемента запізнення у випадку, коли вхідна функція $x : [-\tau, T] \to \mathbb{R}^n$ в системі (4), (5) є неперервною.

Нехай $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $z_j(t) = (z_{j1}(t), \ldots, z_{jn}(t))$, $j = 1, \ldots, m$. Тоді система (4), (5) в координатній формі набуде вигляду

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1i}(t)}{dt} + z_{1i}(t) = x_i(t)\,,$$

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ji}(t)}{dt} + z_{ji}(t) = z_{j-1,i}(t), \quad j = 2, \ldots, m, \quad i = 1, \ldots, n, \quad t \in [0, T]\,, \tag{8}$$

$$z_{ji}(0) = x_i\left(-\frac{j\tau}{m}\right), \qquad j = 1, \ldots, m, \qquad i = 1, \ldots, n\,. \tag{9}$$

Розглянемо згладжені функції

$$x_i^{(1)}(t) = \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} x_i(s)\,ds, \quad t \in [-\tau, T], \qquad i = 1, \ldots, n\,. \tag{10}$$

Функції $x_i^{(1)}(t)$ продовжимо на відрізок $[T, T+h]$ за неперервністю, поклавши $x_i^{(1)}(t) = \text{const}$, $i = 1, \ldots, n$, при $t \in [T, T+h]$.

Оцінимо різницю $x_i^{(2)}(t) = x_i(t) - x_i^{(1)}(t)$:

$$\left|x_i^{(2)}(t)\right| = \left|x_i(t) - \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} x_i(s)\,ds\right| = \left|x_i(t) - x_i(\xi)\right| \le \omega(x_i, h), \ t \in [-\tau, T]. \tag{11}$$

Якщо тепер у системі (8), (9) вважати, що $x_i(t) = x_i^{(1)}(t) + x_i^{(2)}(t)$, то, з огляду на її лінійність, розв'язок буде сумою функцій, які є розв'язками таких систем:

$$\frac{\tau}{m} z_{1i}'^{(1)}(t) + z_{1i}^{(1)}(t) = x_i^{(1)}(t), \qquad i = 1, \ldots, n\,,$$

$$\frac{\tau}{m} z_{ji}'^{(1)}(t) + z_{ji}^{(1)}(t) = z_{j-1,i}^{(1)}(t), \qquad j = 2, \ldots, m, \quad i = 1, \ldots, n, \quad t \in [0, T]\,,$$

$$z_{ji}^{(1)}(0) = y_{ji}^{(1)}(0), \qquad j = 1, \ldots, m, \qquad i = 1, \ldots, n\,,$$

$$\frac{\tau}{m} z_{1i}'^{(2)}(t) + z_{1i}^{(2)}(t) = x_i^{(2)}(t), \qquad i = 1, \ldots, n\,,$$

$$\frac{\tau}{m} z_{ji}'^{(2)}(t) + z_{ji}^{(2)}(t) = z_{j-1,i}^{(2)}(t), \qquad j = 2, \ldots, m, \quad i = 1, \ldots, n, \quad t \in [0, T]\,,$$

$$z_{ji}^{(2)}(0) = y_{ji}^{(2)}(0), \qquad j = 1, \ldots, m, \qquad i = 1, \ldots, n\,.$$

Таким чином,

$$\left|z_{ji}(t)-y_{ji}(t)\right| = \left|z_{ji}^{(1)}(t)+z_{ji}^{(2)}(t)-y_{ji}^{(1)}(t)-y_{ji}^{(2)}(t)\right| \le$$
$$\le \left|z_{ji}^{(1)}(t)-y_{ji}^{(1)}(t)\right| + \left|z_{ji}^{(2)}(t)\right| + \left|y_{ji}^{(2)}(t)\right|.$$

Очевидно, що $\left|y_{ji}^{(2)}(t)\right| = \left|x_i^{(2)}\left(t-\frac{j\tau}{m}\right)\right| \le \omega(x_i,h)$. Така нерівність справджується і для $\left|z_{ji}^{(2)}(t)\right|$. Для оцінки величини $\left|z_{ji}^{(1)}(t)-y_{ji}^{(1)}(t)\right|$ можна застосувати нерівність (7), оскільки $x_i^{(1)}(t)$ задовольняє умову Ліпшиця із деякою сталою K_i. Отже,

$$\left|z_{ji}(t)-y_{ji}(t)\right| \le 2\left(K_i\frac{\tau}{\sqrt{m}}+\omega(x_i,h)\right).$$

Покладаючи $h=\frac{\tau}{\sqrt{m}}$ в $\omega(x_i,h)$, маємо

$$\left|z_{ji}(t)-y_{ji}(t)\right| \le 2\left(K_i\frac{\tau}{\sqrt{m}}+\omega\left(x_i,\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right)\right). \tag{12}$$

Підсумовуючи нерівності (12) за $i=1,\dots,n$, одержуємо оцінку

$$\sum_{i=1}^{n}\left|z_{ji}(t)-y_{ji}(t)\right| \le 2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}K_i+\omega\left(x_i,\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right)\right)=\gamma\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right). \tag{13}$$

Наведені вище міркування про апроксимацію елемента запізнення сформулюємо у вигляді такого твердження.

Теорема 2. *Нехай вхідна функція* $x(t)$ *в системі* (4) *є неперервною при* $t\in[-\tau,T]$. *Тоді для розв'язків задачі Коші* (4), (5) *справджуються нерівності* $\sum_{i=1}^{n}\left|z_{ji}(t)-y_{ji}(t)\right| \le \gamma\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right)$, *де* $\gamma(\delta)$ *– монотонно зростаюча функція, причому* $\lim_{\delta\to 0}\gamma(\delta)=0$.

Лема 1. *Нехай функція* $x(t)$ *в системі* (4), (5) *задовольняє нерівність*

$$\|x(t)\| = \sup_{-\tau\le t\le T}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i(t)\right| < \varepsilon, \qquad \varepsilon>0.$$

Тоді для розв'язків $z_j(t)$, $j=1,\dots,m$, *системи* (4), (5) *справджується співвідношення*

$$\left\|z_j(t)\right\| \le \varepsilon, \qquad j=1,\dots,m, \qquad t\in[0,T]. \tag{14}$$

Д о в е д е н н я. Нерівності (14) доведемо методом математичної індукції. Застосовуючи формулу варіації сталих до (4), для $n=1$ дістаємо

$$z_1(t) = x\left(-\frac{\tau}{m}\right)e^{-\frac{m}{\tau}t}+\frac{m}{\tau}\int_0^t e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}x(s)\,ds,$$

звідки

$$\|z_1(t)\| \le \left\|x\left(-\frac{\tau}{m}\right)\right\|e^{-\frac{m}{\tau}t}+\frac{m}{\tau}\int_0^t e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}\|x(s)\|\,ds \le$$
$$\le \varepsilon\left(e^{-\frac{m}{\tau}t}+\frac{m}{\tau}\int_0^t e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}\,ds\right) \le \varepsilon.$$

Нехай нерівність (14) справджується для $n=j$. Покажемо, що тоді вона буде виконуватись при $n=j+1$:

$$\left\|z_{j+1}(t)\right\| \le \left\|x\left(-\frac{j+1}{m}\tau\right)\right\|e^{-\frac{m}{\tau}t}+\frac{m}{\tau}\int_0^t e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}\left\|z_j(s)\right\|ds \le$$
$$\le \varepsilon\left(e^{-\frac{m}{\tau}t}+\frac{m}{\tau}\int_0^t e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}\,ds\right) \le \varepsilon. \qquad \blacklozenge$$

3. Обґрунтування схеми апроксимації диференціально-функціональних рівнянь. Нехай $m,\ p \in \mathbb{N}$. Поставимо у відповідність рівнянню (3) систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dz_0(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{p} A_i(t) z_{\ell_i}(t) + \frac{\tau}{m}\sum_{i=0}^{m-1} D\Big(t, -\frac{m-i}{m}\tau\Big) z_{m-i}(t) + f\left(t, \sum_{i=1}^{m} z_i \chi_i\right),$$

$$\frac{dz_j(t)}{dt} = \frac{m}{\tau}(z_{j-1}(t) - z_j(t)), \qquad j = 1,\dots,m, \qquad t \in [0,T], \tag{15}$$

з початковими умовами

$$z_j(0) = \varphi\Big(-\frac{j}{m}\tau\Big), \qquad j = 0,\dots,m, \tag{16}$$

де $\ell_i = \left[m\frac{\tau_i}{\tau}\right]$, $\chi_i = \begin{cases} 1, & \theta \in \left[-\frac{i\tau}{m}, -\frac{(i-1)\tau}{m}\right], \\ 0, & \theta \notin \left[-\frac{i\tau}{m}, -\frac{(i-1)\tau}{m}\right]. \end{cases}$

Другий доданок у першому рівнянні системи (15) одержано внаслідок заміни інтеграла у (3) за формулою лівих прямокутників з кроком $h = \frac{\tau}{m}$.

Будемо говорити, що система звичайних диференціальних рівнянь (15) апроксимує систему нелінійних диференціально-функціональних рівнянь (3), якщо справджуються співвідношення

$$\left\| x\Big(t - \frac{j\tau}{m}\Big) - z_j(t) \right\| \to 0, \quad m \to \infty, \qquad j = 0,\dots,m, \quad t \in [0,T].$$

Дослідимо питання про близькість розв'язків початкової задачі для рівняння (3) та розв'язків задачі Коші (15), (16).

Запишемо $z_j(t)$ у вигляді суми $z_j(t) = z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t)$, де $z_j^{(1)}(t)$ та $z_j^{(2)}(t)$ – розв'язки таких задач Коші:

$$\frac{\tau}{m} z_1'^{(1)}(t) + z_1^{(1)}(t) = x(t),$$

$$\frac{\tau}{m} z_j'^{(1)}(t) + z_j^{(1)}(t) = z_{j-1}^{(1)}(t), \qquad j = 2,\dots,m, \qquad t \in [0,T],$$

$$z_j^{(1)}(0) = x\Big(-\frac{j\tau}{m}\Big), \qquad j = 1,\dots,m, \tag{17}$$

$$\frac{\tau}{m} z_1'^{(2)}(t) + z_1^{(2)}(t) = z_0(t) - x(t),$$

$$\frac{\tau}{m} z_j'^{(2)}(t) + z_j^{(2)}(t) = z_{j-1}^{(2)}(t), \qquad j = 2,\dots,m, \qquad t \in [0,T],$$

$$z_j^{(2)}(0) = 0, \qquad j = 1,\dots,m. \tag{18}$$

Оцінимо різниці $z_j(t) - x\Big(t - \frac{j\tau}{m}\Big)$, $j = 1,\dots,m$:

$$\left\| z_j(t) - x\Big(t - \frac{j\tau}{m}\Big) \right\| \le \left\| z_j^{(1)}(t) - x\Big(t - \frac{j\tau}{m}\Big) \right\| + \left\| z_j^{(2)}(t) \right\|.$$

Враховуючи позначення $z_j(t) = (z_{j1}(t),\dots,z_{jn}(t))$, $x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$, подамо $z_{ji}(t)$, $j = 1,\dots,m$, $i = 1,\dots,n$, у вигляді суми $z_{ji}^{(1)}(t) + z_{ji}^{(2)}(t)$, де $z_{ji}^{(1)}(t)$ і $z_{ji}^{(2)}(t)$ є розв'язками таких задач Коші:

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1i}^{(1)}(t)}{dt} + z_{1i}^{(1)}(t) = x_i(t), \qquad i = 1,\dots,n,$$

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ji}^{(1)}(t)}{dt} + z_{ji}^{(1)}(t) = z_{j-1,i}^{(1)}(t), \quad j = 2,\dots,m, \quad i = 1,\dots,n \quad t \in [0,T], \tag{19}$$

$$z_{ji}^{(1)}(0) = x_i\left(-\frac{j\tau}{m}\right), \qquad j = 1,\dots,m, \qquad i = 1,\dots,n, \tag{20}$$

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1i}^{(2)}(t)}{dt} + z_{1i}^{(2)}(t) = z_{0i}(t) - x_i(t), \qquad i = 1,\dots,n,$$

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ji}^{(2)}(t)}{dt} + z_{ji}^{(2)}(t) = z_{j-1,i}^{(2)}(t), \quad j = 2,\dots,m, \quad i = 1,\dots,n \quad t \in [0,T], \tag{21}$$

$$z_{ji}^{(2)}(0) = 0, \qquad j = 1,\dots,m, \qquad i = 1,\dots,n. \tag{22}$$

Нехай

$$N_j(t) = \max_{0\le s\le t}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\left(s - \frac{j\tau}{m}\right) - z_{ji}(s)\right|, \qquad j = 0,\dots,m, \qquad t \in [0,T]. \tag{23}$$

Враховуючи, що $z_j(t) = z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t)$, запишемо нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) - z_{ji}(t)\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|x_i\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) - z_{ji}^{(1)}(t)\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|z_{ji}^{(2)}(t)\right|. \tag{24}$$

Методом математичної індукції покажемо, що для другого доданка в правій частині (24) справджується оцінка

$$\sum_{i=1}^{n}\left|z_{ji}^{(2)}(t)\right| \le N_0(t), \qquad j = 1,\dots,m, \qquad t \in [0,T]. \tag{25}$$

Розв'язок рівняння $\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1i}^{(2)}(t)}{dt} + z_{1i}^{(2)}(t) = z_{0i}(t) - x_i(t)$ з початковою умовою $z_{1i}^{(2)}(0) = 0$ має вигляд

$$z_{1i}^{(2)}(t) = \frac{m}{\tau}\int_0^t (z_{0i}(\xi) - x_i(\xi))\exp\left(\frac{m(\xi - t)}{\tau}\right)d\xi.$$

Звідси

$$\sum_{i=1}^{n}\left|z_{1i}^{(2)}(t)\right| \le \frac{m}{\tau}\int_0^t\left(\max_{0\le s\le t}\sum_{i=1}^{n}\left|z_{0i}(s) - x_i(s)\right|\right)\exp\left(\frac{m(\xi - t)}{\tau}\right)d\xi \le N_0(t).$$

Припустимо, що нерівність (25) справджується при $j = k$: $\sum_{i=1}^{n}\left|z_{ki}^{(2)}(t)\right| \le N_0(t)$.

Покажемо, що ця нерівність виконується при $j = k + 1$:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|z_{k+1,i}^{(2)}(t)\right| = \frac{m}{\tau}\sum_{i=1}^{n}\left|\int_0^t z_{ki}^{(2)}(\xi)\exp\left(\frac{m(\xi - t)}{\tau}\right)d\xi\right| \le$$

$$\le \frac{m}{\tau}\int_0^t\left(\max_{0\le s\le t}\sum_{i=1}^{n}\left|z_{ki}^{(2)}(s)\right|\right)\exp\left(\frac{m(\xi - t)}{\tau}\right)d\xi \le N_0(t).$$

Отже, нерівність (25) виконується для всіх $j = 1,\dots,m$.

З огляду на властивості розв'язків початкової задачі диференціально-функціонального рівняння (3) [1, 9, 17] функції $x_i(t)$, $i = 1,\dots,n$, є неперервними на $C[-\tau,T]$. Застосовуючи теорему 2, для $\left|x_i\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) - z_{ji}^{(1)}(t)\right|$ одержимо оцінку

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) - z_{ji}^{(1)}(t)\right| \le \gamma\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right), \qquad j = 1,\dots,m, \qquad \lim_{\delta\to 0}\gamma(\delta) = 0. \tag{26}$$

Нерівність (26) справджується для всіх $t \in [0,T]$, тому, враховуючи позначення (23) і нерівність (24), отримаємо

$$N_j(t) \le \gamma\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) + N_0(t), \qquad j = 1,\dots,m. \tag{27}$$

Для оцінки різниці $\|x(t)-z_0(t)\|$ подамо рівняння (3) і (15) в еквівалентній інтегральній формі:

$$x(t)=\varphi(0)+\int_0^t\sum_{k=0}^{p}A_k(s)x(s-\tau_k)\,ds+\int_0^t\sum_{j=0}^{m-1}\int_{-\tau+j\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(j+1)\frac{\tau}{m}}D(s,\theta)x(s+\theta)\,d\theta\,ds+$$
$$+\int_0^t f(s,x_s)\,ds\,, \tag{28}$$

$$z_0(t)=\varphi(0)+\int_0^t\sum_{k=0}^{p}A_k(s)z_{\ell_k}(s)\,ds+\int_0^t\sum_{j=0}^{m-1}\int_{-\tau+\frac{j}{m}\tau}^{-\tau+(j+1)\frac{\tau}{m}}D\Big(s,-\frac{(m-j)\tau}{m}\Big)z_{m-j}(s)\,d\theta\,ds+$$
$$+\int_0^t f\left(s,\sum_{i=1}^{m}z_i\chi_i\right)ds\,. \tag{29}$$

Позначимо $\omega\big(\frac{\tau}{m}\big)=\max\limits_{i=1,\dots,n}\omega\big(x_i,\frac{\tau}{m}\big)$, $\omega\big(x_i,\frac{\tau}{m}\big)$ – модуль неперервності функцій $x_i(t)$ на $[-\tau,T]$; $\omega_1\big(\frac{\tau}{m}\big)=n\max\limits_{i,j}\omega\big(d_{ij},\frac{\tau}{m}\big)$, $\omega\big(d_{ij},\frac{\tau}{m}\big)$ – модуль неперервності функцій $d_{ij}(t,\theta)$, $i,j=1,\dots,n$, $t\in[0,T]$, $\theta\in[-\tau,0]$; $K_A=\max\limits_{k=0,\dots,p}\max\limits_{t}\|A_k(t)\|$, $K_D=\max\limits_{t,\theta}\|D(t,\theta)\|$, $K_f=\max\limits_{i=1,\dots,n}\max\limits_{t}|f_i(t,0)|$.

Встановимо деякі властивості розв'язків задачі Коші (15), (16). Нехай початкові умови для системи (15), (16) задовольняють нерівності $\sum\limits_{i=1}^{n}|z_{ji}(0)|<\delta,\ j=0,\dots,m$. Позначимо

$$M(t)=\max_{s\in[0,t]}\left[\delta,\sum_{i=1}^{n}|z_{0i}(s)|\right]. \tag{30}$$

Із векторного рівняння

$$\frac{dz_1}{dt}=\frac{m}{\tau}(z_0(t)-z_1(t))$$

одержимо

$$z_{1i}(t)=z_{1i}(0)\exp\left(-\frac{mt}{\tau}\right)+\frac{m}{\tau}\int_0^t z_{0i}(s)\exp\left(\frac{m(s-t)}{\tau}\right)ds,\qquad i=1,\dots,n\,,$$

звідки

$$\sum_{i=1}^{n}|z_{1i}(t)|\le M(t)\left(\exp\left(-\frac{mt}{\tau}\right)+\frac{m}{\tau}\int_0^t\exp\left(\frac{m(s-t)}{\tau}\right)ds\right)=M(t)\,.$$

Аналогічно одержуємо

$$\sum_{i=1}^{n}|z_{ji}(t)|\le M(t),\qquad\qquad j=1,\dots,m\,. \tag{31}$$

Враховуючи рівність (29), маємо

$$|z_{0i}(t)|\le|z_{0i}(0)|+K_A\int_0^t\sum_{k=0}^{p}\sum_{\ell=1}^{n}|z_{\ell_k,\ell}(s)|\,ds+\frac{\tau}{m}K_D\int_0^t\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{\ell=1}^{n}|z_{m-j,\ell}(s)|\,ds+$$
$$+\int_0^t\left(\left|f_i\left(s,\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}z_{j\ell}\chi_j\right)-f_i(s,0)\right|+|f_i(s,0)|\right)ds\le$$
$$\le|z_{0i}(0)|+[(p+1)K_A+\tau K_D]\int_0^t M(s)\,ds+\pounds\int_0^t M(s)\,ds+TK_f\,.$$

Підсумуємо отримані нерівності за $i = 1,\dots,n$:

$$\sum_{i=1}^{n} |z_{0i}(t)| \le \sum_{i=1}^{n} |z_{0i}(0)| + nTK_f + n[(p+1)K_A + \tau K_D + Ł]\int_0^t M(s)\,ds.$$

Отже,

$$M(t) \le \delta + nTK_f + n[(p+1)K_A + \tau K_D + Ł]\int_0^t M(s)\,ds.$$

Використовуючи лему Гронуолла − Беллмана і позначення (30), маємо

$$M(t) \le (\delta + nTK_f)e^{n((p+1)K_A+\tau K_D+Ł)T} \equiv K_z. \tag{32}$$

Із рівностей (28), (29), враховуючи властивості матриць $A_k(t)$, $k=0,\dots,p$, $D(t,\theta)$, функції f та нерівності (32), отримуємо

$$\|x(t) - z_0(t)\| \le \sum_{k=0}^{p} \|A_k(t)\| \int_0^t \|x(s-\tau_k) - z_{\ell_k}(s)\|\,ds +$$

$$+ \int_0^t \sum_{j=0}^{m-1} \int_{-\tau+j\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(j+1)\frac{\tau}{m}} \left\| \left(D(s,\theta)x(s+\theta) - D\left(s, -\frac{(m-j)\tau}{m}\right)\right) z_{m-j}(s) \right\| d\theta\,ds +$$

$$+ \int_0^t \left\| f(s,x_s) - f\left(s, \sum_{j=1}^{m} z_j(s)\chi_j\right)\right\| ds \le$$

$$\le (p+1)K_A \int_0^t \left[\gamma\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) + N_0(s) + n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right)\right] ds +$$

$$+ \int_0^t \sum_{j=0}^{m-1} \int_{-\tau+j\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(j+1)\frac{\tau}{m}} \Big\| D(s,\theta)(x(s+\theta) - z_{m-j}(s)) +$$

$$+ \left[D(s,\theta) - D\left(s, -\frac{(m-j)\tau}{m}\right)\right] z_{m-j}(s) \Big\| d\theta\,ds + \int_0^t Ł \left| x_s - \sum_{j=1}^{m} z_j(s)\chi_j \right| ds \le$$

$$\le (p+1)K_A \int_0^t \left[\gamma\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) + N_0(s) + n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right)\right] ds +$$

$$+ \int_0^t \sum_{j=0}^{m-1} \int_{-\tau+j\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(j+1)\frac{\tau}{m}} \Big[\|D(s,\theta)\| \Big(\left\| x(s+\theta) - x\left(s - \frac{(m-j)\tau}{m}\right)\right\| +$$

$$+ \left\| x\left(s - \frac{(m-j)\tau}{m}\right) - z_{m-j}(s)\right\| \Big) + \left\| D(s,\theta) - D\left(s, -\frac{(m-j)\tau}{m}\right)\right\| \|z_{m-j}(s)\| \Big] d\theta\,ds +$$

$$+ \int_0^t Ł \sum_{j=1}^{m} |x_s - z_j(s)|\chi_j\,ds \le (p+1)K_A \int_0^t \left[\gamma\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) + N_0(s) + n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right)\right] ds +$$

$$+ \int_0^t \sum_{j=0}^{m-1} \int_{-\tau+j\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(j+1)\frac{\tau}{m}} \left(K_D \left[n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right) + \gamma\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) + N_0(s)\right] + K_z\omega_1\left(\frac{\tau}{m}\right)\right) d\theta\,ds +$$

$$+ \int_0^t Ł \left(\sum_{j=1}^{m} \left| x_s - x\left(s - \frac{j\tau}{m}\right)\right| \chi_j + \sum_{j=1}^{m} \left| x\left(s - \frac{j\tau}{m}\right) - z_j(s)\right| \chi_j \right) ds \le$$

$$\le T\Big[(p+1)K_A\left[\gamma\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) + n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right)\right] + \tau K_D\left[n\omega\left(\frac{\tau}{m}\right) + \gamma\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right)\right] +$$

$$+ K_z\omega_1\Big(\frac{\tau}{m}\Big) + \mathcal{L}\Big(n\omega\Big(\frac{\tau}{m}\Big) + \gamma\Big(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\Big)\Big)\Big] +$$

$$+ \int_0^T [(p+1)K_A + \tau K_D + \mathcal{L}] N_0(s)\,ds\,.$$

Скориставшись тепер нерівністю Гронуолла − Беллмана, одержуємо

$$N_0(t) \le T\Big[((p+1)K_A + \tau K_D)\Big[\gamma\Big(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\Big) + n\omega\Big(\frac{\tau}{m}\Big)\Big] +$$

$$+ K_z\omega_1\Big(\frac{\tau}{m}\Big) + \mathcal{L}\Big] e^{T((p+1)K_A + \tau K_D + \mathcal{L})}\,.$$

Оскільки $\lim\limits_{m\to\infty} \omega\Big(\frac{\tau}{m}\Big) = 0$ і $\lim\limits_{m\to\infty} \omega_1\Big(\frac{\tau}{m}\Big) = 0$, то з останнього співвідношення випливає, що розв'язки задачі Коші (15), (16) апроксимують розв'язки початкової задачі (3) при $m \to \infty$. Сформулюємо одержаний результат у вигляді теореми.

Теорема 3. *Нехай* $A_k(t)$, $k = 0,\ldots,p$, $D(t,\theta)$ − *матричні функції, неперервні при* $t \in [0,T]$, $\theta \in [-\tau, 0]$, *функція* $f(t,\varphi)$ *неперервна і ліпшицева за* φ. *Тоді для розв'язків початкової задачі* (3) *і розв'язків задачі Коші* (15), (16) *справджуються співвідношення*

$$\Big\| x\Big(t - \frac{j\tau}{m}\Big) - z_j(t) \Big\| \to 0, \qquad j = 0,\ldots,m, \qquad t \in [0,T], \qquad m \to \infty\,.$$

4. *Приклад*. Розглянемо початкову задачу

$$x'(t) = -1.5x(t) - 1.25x(t-1) + x(t)\sin x(t)\,,$$

$$x(t) = 10t + 1, \qquad t \in [-1, 0]\,.$$

Відповідна їй апроксимуюча система звичайних диференціальних рівнянь має вигляд

$$z_0'(t) = -1.5z_0(t) - 1.25z_m(t) + z_0(t)\sin z_0(t)\,,$$

$$z_j'(t) = m(z_{m-j}(t) - z_j(t)), \qquad j = 1,\ldots,m\,,$$

$$z_j(0) = -10\frac{j}{m} + 1, \qquad j = 0,\ldots,m\,.$$

Обчислення значень $z_0(t)$ для $m = 8, 16, 32$, виконані з використанням різницевої схеми Гіра першого порядку, порівняли з розв'язком $x(t)$ вихідної задачі, знайденим в праці [11] за допомогою блочних методів четвертого порядку. Результати цього порівняння засвідчили, що з ростом розмірності m апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь похибка наближень $z_0(t)$ (по відношенню до $x(t)$) зменшується, що підтверджує теоретичні висновки з теореми 3.

Наведена в роботі методика наближення початкових задач для диференціально-функціональних рівнянь послідовністю задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь дозволяє поширити добре розвинуту теорію, а часто й технічні прийоми дослідження звичайних динамічних систем на диференціально-функціональні рівняння.

1. *Бекларян Л. А.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. − Москва: Факториал Пресс, 2007. − 288 с.
2. *Демиденко Г. В., Мельник И. А.* Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. − 2010. − **51**, № 3. − С. 528−546.

3. *Красовский Н. Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, № 4. – С. 716–724.
4. *Матвій О. В., Черевко І. М.* Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, № 2. – С. 208–216.
5. *Матвій О. В., Черевко І. М.* Про апроксимацію систем лінійних диференціально-функціональних рівнянь // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2006. – Вип. 314–315. – С. 125–128.
6. *Матвій О. В., Черевко І. М.* Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 3. – С. 328–335.
7. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. – Москва–Санкт-Петербург: Лань, 2008. – 560 с.
8. *Репин Ю. М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, № 2. – С. 226–235.
9. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1984. – 421 с.
10. *Bellen A., Zennaro M.* Numerical methods for delay differential equations. – New York: Oxford Univ. Press, 2003. – 395 p.
11. *Cryer C. W.* Numerical methods for functional differential equations // Delay and Functional Differential Equations and their Applications / Ed. K. Schmitt. – New York: Acad. Press, 1972. – P. 17–101.
12. *Deshmukh V.* Approximate stability analysis and computation of solutions of nonlinear delay differential algebraic equations with time periodic coefficients // J. Vib. Control. – 2010. – **16**, No. 7-8. – P. 1235–1260.
13. *Jackiewicz Z., Zubik-Kowal B.* Discrete variable methods for delay-differential equations with threshold-type delays // J. Comput. Appl. Math. – 2009. – **228**, No. 2. – P. 514–523.
14. *Kuang Jiaoxun, Cong Yuhao.* Stability of numerical methods for delay differential equations. – Elsevier, 2007. – 295 p.
15. *Kyrychko Y. N. Hogan S. J.* On the use of delay equations in engineering applications // J. Vib. Control. – 2010. – **16**, No. 7-8. – P. 943–960.
16. *Mocek W. T., Rudnicki R., Voit E. O.* Approximation of delays in biochemical systems // Math. Biosci. – 2005. – **198**, No. 2. – P. 190–216.
17. *Yang Kuang.* Delay differential equations: with applications in population dynamics. – Boston: Acad. Press, 1993. – 398 p.

АППРОКСИМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследована аппроксимация элемента запаздывания в $\mathbb{R}^n$ в случае непрерывной входной функции. Построена и обоснована схема приближения решений начальной задачи для нелинейного дифференциально-функционального уравнения решениями задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Вычисления, выполненные на основе предложенной схемы аппроксимации для модельного примера, согласуются с известными в литературе результатами.

APPROXIMATION OF NONLINEAR DIFFERENTIAL FUNCTIONAL EQUATIONS

The approximation of an element with delay in $\mathbb{R}^n$ in the case of continuous input function is investigated. An approximation scheme for solutions of an initial problem for a nonlinear differential-functional equation by solutions of the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations is constructed and justified. Calculation for the model example on the basis of the proposed approximation scheme are agreed with known results in the literature.

Чернів. нац. ун-т
імені Юрія Федьковича, Чернівці

Одержано
14.11.11