

НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ПАДІННЯ ПРУЖНОЇ ХВИЛІ НА ПОДАТЛИВЕ ВКЛЮЧЕННЯ У ФОРМІ ЕЛІПТИЧНОГО ДИСКА

Шляхом розв'язання граничних інтегральних рівнянь методом відображень у поєднанні з покроковим методом творення часових залежностей досліджено поведінку податливого дискового еліптичного включення у тривимірному полі імпульсних пружних хвиль. У випадку симетричної задачі та нестационарного збурення з профілем функції Гевісайда встановлено вплив на коефіцієнт інтенсивності динамічних напружень в околі включення його ексцентриситету та співвідношення між пружними модулями матричного середовища і включення.

На прикладах тривимірних нестационарних задач поширення пружних хвиль у тілах з тріщинами і жорсткими дисковими включеннями показано [9, 11–13], що їх ефективний числовий аналіз досягається через зведення до граничних інтегральних рівнянь у часовій області. Переваги такого підходу у порівнянні з розглядом відповідних рівнянь у спектральній області перетворень Фур'є чи Лапласа за часом обґрунтовуються можливістю безпосереднього отримання часових залежностей без переходу до комплексних трансформант і відшукування оригіналів функцій. Тоді розв'язки вдається побудувати шляхом апроксимації інерційних складових рівнянь на введених рівномірних і нерівномірних сітках часових інтервалів [3, 4, 8, 10]. Нижче покроковий часовий алгоритм застосовано для вивчення інерційних ефектів у тривимірній пружній матриці з еліптичним дисковим включенням малої жорсткості, яке моделюється умовами пропорційного зв'язку між напруженнями та стрибками переміщень на його серединній поверхні. Відмітимо, що аналогічну задачу для дискового податливого включення кругової у плані форми розв'язано у роботі [2] із використанням інтегрального перетворення Фур'є за часом.

Розглянемо безмежну ізотропну пружну матрицю, що містить ідеально сконтактоване еліптичне у плані дискове включення з товщиною h і півосями a і b , $a \geq b$, $b \gg h$. Середина поверхня S включення лежить у площині x_1Ox_2 , тоді його контур L описується співвідношенням $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0$.

Позначимо через ν , G , ρ коефіцієнт Пуассона, модуль зсуву і густину матеріалу матриці, а через ν_0 , G_0 , ρ_0 – відповідні величини для матеріалу включення, податливість якого забезпечується умовою $G_0 \ll G$. На включення набігає пружна хвиля із заданим розподілом у просторі $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ і часі t компонент тензора напружень σ_{ij}^{in} , $i, j = 1, 2, 3$.

Поле розсіяних включенням у матрицю нестационарних переміщень $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ описується векторним рівнянням руху у вигляді

$$c_1^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - c_2^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

де ∇ – тривимірний набла-оператор; $c_2 = \sqrt{G/\rho}$ і $c_1 = c_2/\gamma$ – швидкості поширення у матриці відповідно поперечної і поздовжньої пружних хвиль, $\gamma = \sqrt{(1 - 2\nu)/2(1 - \nu)}$.

На основі принципу спряження із урахуванням пружних властивостей включення його наявність у матриці змодельовано такими зв'язками між напруженнями σ_{j3} , $j = 1, 2, 3$, у розсіяних хвилях і стрибками переміщень

$\Delta u_j = (u_j^- - u_j^+)/4\pi$, $j = 1, 2, 3$, на серединній поверхні S :

$$\sigma_{j3}(\mathbf{x}, t) = -\sigma_{j3}^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) - 4\pi G_0 \Delta u_j(\mathbf{x}, t)/h, \quad j = 1, 2,$$

$$\sigma_{33}(\mathbf{x}, t) = -\sigma_{33}^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) - 8\pi(1 - \nu_0)G_0 \Delta u_3(\mathbf{x}, t)/[(1 - 2\nu_0)h], \quad \mathbf{x} \in S. \quad (2)$$

Слід зазначити, що застосування умов вигляду (2) у нестационарному випадку передбачає також згасання модулів часових Фур'є-трансформант зовнішнього збурення зі спектральним параметром ω поза інтервалом $\omega h/c_2 < 1$ [7]. За відліковий прийmemo час $t = 0$ перетину фронту падаючої хвилі з включенням, у цей момент переміщення і швидкості точок матриці від розсіяної хвилі покладаємо нульовими.

Для сформульованої вище початково-крайової задачі, використавши формули Соміліано, отримаємо інтегральні подання переміщень у матриці з податливим дисковим включенням

$$\begin{aligned} u_j(\mathbf{x}, t) &= 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{\gamma}^1 \tau P_k^{\tau} d\tau - \frac{\partial P_j^1}{\partial x_3} - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(1 - 2\gamma^2) P_3^{\gamma} - 2 \int_{\gamma}^1 \tau P_3^{\tau} d\tau \right], \quad j = 1, 2, \\ u_3(\mathbf{x}, t) &= 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{\gamma}^1 \tau P_k^{\tau} d\tau - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[P_1^1 - 2 \int_{\gamma}^1 \tau P_1^{\tau} d\tau \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[P_2^1 - 2 \int_{\gamma}^1 \tau P_2^{\tau} d\tau \right] - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_3} \left[(1 - 2\gamma^2) P_3^{\gamma} + 2P_3^1 - 4 \int_{\gamma}^1 \tau P_3^{\tau} d\tau \right], \end{aligned} \quad (3)$$

де P_j^{τ} ($\tau \in [\gamma, 1]$) – хвильові потенціали, що виражаються через стрибки переміщень на включенні формулою

$$P_j^{\tau}(\mathbf{x}, t) = \iint_S \frac{\Delta u_j(\boldsymbol{\xi}, t - \tau |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|/c_2)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} dS_{\boldsymbol{\xi}}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Шляхом визначення відповідних до переміщень (3) напружень і задоволення умов (2) отримаємо наступну систему трьох граничних інтегральних рівнянь (ГІР) другого роду з ядром хвильового потенціалу відносно функцій Δu_j , $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} &\frac{8\pi G_0(1 - \nu_0)}{G(1 - 2\nu_0)h} \Delta u_3(\mathbf{x}, t) - \iint_S \frac{\mathbf{A}_3^{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} [\Delta u_3(\boldsymbol{\xi}, t)]}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} dS_{\boldsymbol{\xi}} = \\ &= -\frac{1}{G} \sigma_{33}^{\text{in}}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(x_1, x_2) \in S, \quad t > 0, \\ &\frac{4\pi G_0}{Gh} \Delta u_j(\mathbf{x}, t) - \iint_S \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^3} \left\{ \mathbf{A}_1^{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} [\Delta u_j(\boldsymbol{\xi}, t)] - \right. \\ &\quad - \frac{(x_{3-j} - \xi_{3-j})^2}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2} \mathbf{A}_2^{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} [\Delta u_j(\boldsymbol{\xi}, t)] + \\ &\quad \left. + \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2} \mathbf{A}_2^{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} [\Delta u_{3-j}(\boldsymbol{\xi}, t)] \right\} dS_{\boldsymbol{\xi}} = -\frac{1}{G} \sigma_{j3}^{\text{in}}(\mathbf{x}, t), \\ &\quad \mathbf{x}(x_1, x_2) \in S, \quad t > 0, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (5)$$

де $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ – відстань між точкою джерела $\mathbf{x}(x_1, x_2)$ та точкою інтегрування $\boldsymbol{\xi}(\xi_1, \xi_2)$; \mathbf{A}_k^r – оператори часового запізнення, введені як

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k^r[\Delta u_j(\boldsymbol{\xi}, t)] &= a_{k1} \int_{\gamma}^1 \Delta u_j(\boldsymbol{\xi}, t - \tau r/c_2) \tau d\tau + a_{k2} \Delta u_j(\boldsymbol{\xi}, t - r/c_2) + \\ &+ a_{k3} \Delta u_j(\boldsymbol{\xi}, t - \gamma r/c_2) + \frac{r}{c_2} \frac{\partial}{\partial t} [a_{k4} \Delta u_j(\boldsymbol{\xi}, t - r/c_2) + \\ &+ a_{k5} \Delta u_j(\boldsymbol{\xi}, t - \gamma r/c_2)] + \frac{r^2}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [a_{k6} \Delta u_j(\boldsymbol{\xi}, t - r/c_2) + \\ &+ a_{k7} \Delta u_j(\boldsymbol{\xi}, t - \gamma r/c_2)], \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (6)$$

У співвідношеннях (6) на основі принципу причинності слід покладати $\Delta u_j(\boldsymbol{\xi}, t) \equiv 0$, коли $t \leq 0$, постійні a_{kj} утворюють матрицю

$$\begin{aligned} \|a_{kj}\| &= \\ &= \left\| \begin{array}{ccccccc} 48 & -21 & 20\gamma^2 & -5 & 4\gamma^3 & -1 & 0 \\ 60 & -27 & 24\gamma^2 & -7 & 4\gamma^3 & -1 & 0 \\ -36 & 16 & 4 - 20\gamma^2 & 4 & 4\gamma(1 - 2\gamma^2) & 0 & -(1 - 2\gamma^2)^2 \end{array} \right\|. \end{aligned} \quad (7)$$

Система ГРП (5) належить до гіперсингулярних з порядком особливості $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^{-3}$ і розщеплюється на дві підсистеми. Перше рівняння описує реакцію дискового податливого включення на нормальне щодо серединної поверхні нестационарне навантаження (симетрична задача) і служить для визначення функції Δu_3 . Система двох інших рівнянь щодо функцій Δu_1 , Δu_2 описує нестационарне дотичне навантаження включення (антисиметрична задача). Характерним для ГРП (5) є те, що часове запізнення у аргументах шуканих функцій охоплюється часом, необхідним поперечній хвилі для проходження діаметра $2a$ включення. Із системи ГРП (5) у частковому випадку $G_0 = 0$ отримуються інтегральні рівняння першого роду для еліптичної тріщини у полі нестационарних пружних хвиль [9].

Для спрощення подальших викладок методики розв'язання введених ГРП у часовій області розглядатимемо симетричну задачу, коли $\sigma_{13}^{\text{in}} = \sigma_{23}^{\text{in}} = 0$. Перенесення підходу на антисиметричну задачу не викликає суттєвих відмінностей і додаткових ускладнень. З метою регуляризації та подальшого розв'язання першого рівняння системи (5) здійснимо бієктивне відображення області включення S на кругову область \tilde{S} одиничного радіуса заміною змінних $x_1 = ay_1$, $x_2 = by_2$, $\xi_1 = a\eta_1$, $\xi_2 = b\eta_2$.

Після введення функцій з новим аргументом $\mathbf{y}(y_1, y_2)$ у формі

$$\Delta \tilde{u}(\mathbf{y}, t) = ab \Delta u_3(ay_1, by_2, t), \quad \tilde{\sigma}^{\text{in}}(\mathbf{y}, t) = \sigma_3^{\text{in}}(ay_1, by_2, t) \quad (8)$$

рівняння (6) можна записати так:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi G_0(1 - \nu_0)}{G(1 - 2\nu_0)abh} \Delta \tilde{u}(\mathbf{y}, t) + \iint_{\tilde{S}} \frac{[\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})]^3}{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|^3} \mathbf{B}^{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|} [\Delta \tilde{u}(\boldsymbol{\eta}, t)] dS_{\boldsymbol{\eta}} &= -\frac{\tilde{\sigma}^{\text{in}}(\mathbf{y}, t)}{4G}, \\ \mathbf{y} \in \tilde{S}, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут оператор $\mathbf{B}^{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|}$ має вигляд

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^r [\Delta \tilde{u}(\boldsymbol{\eta}, t)] &= 9 \int_{\gamma}^1 \Delta \tilde{u} \left(\boldsymbol{\eta}, t - \frac{\tau r}{c_2 \beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})} \right) \tau d\tau - 4 \Delta \tilde{u} \left(\boldsymbol{\eta}, t - \frac{r}{c_2 \beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})} \right) - \\
&- (1 - 5\gamma^2) \Delta \tilde{u} \left(\boldsymbol{\eta}, t - \frac{\gamma r}{c_2 \beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})} \right) - \frac{r}{c_2 \beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})} \times \\
&\times \frac{\partial}{\partial t} \left[\Delta \tilde{u} \left(\boldsymbol{\eta}_1, t - \frac{r}{c_2 \beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})} \right) + (1 - 2\gamma^2) \gamma \Delta \tilde{u} \left(\boldsymbol{\eta}, t - \frac{\gamma r}{c_2 \beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})} \right) \right] + \\
&+ \frac{(1 - 2\gamma^2)^2}{[\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})]^2} \frac{r^2}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \tilde{u} \left(\boldsymbol{\eta}, t - \frac{\gamma r}{c_2 \beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})} \right),
\end{aligned}$$

функція β характеризує відношення між точками \mathbf{y} та $\boldsymbol{\eta}$ і їх прообразами

$$\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - q^2 \frac{(\eta_2 - y_2)^2}{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|^2}}}, \quad q = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Інтегральні рівняння (5) і (9) мають особливість однакового порядку в ядрі, але відрізняються тим, що у рівнянні (9) невідомі функції і права частина визначені у круговій області. Для виділення особливості у рівнянні (9) здійснимо таке його тотожне перетворення:

$$\begin{aligned}
f \Delta \tilde{u}(\mathbf{y}, t) &+ \iint_{\tilde{S}} \frac{[\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})]^3}{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|^3} \Delta \tilde{u}(\boldsymbol{\eta}, t) dS_{\boldsymbol{\eta}} + \frac{A}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint_{\tilde{S}} \frac{\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})}{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|} \Delta \tilde{u}(\boldsymbol{\eta}, t) dS_{\boldsymbol{\eta}} - \\
&- 4(1 - \nu) \iint_{\tilde{S}} \frac{[\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})]^3}{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|^3} \left\{ \mathbf{B}^{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|} [\Delta \tilde{u}(\boldsymbol{\eta}, t)] + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{4(1 - \nu)} \left[\Delta \tilde{u}(\boldsymbol{\eta}, t) + \frac{A}{c_2^2} \frac{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|^2}{[\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})]^2} \frac{\partial^2 \Delta \tilde{u}(\boldsymbol{\eta}, t)}{\partial t^2} \right] \right\} dS_{\boldsymbol{\eta}} = \\
&= \frac{1 - \nu}{G} \tilde{\sigma}^{\text{in}}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y} \in \tilde{S}, \quad t > 0, \quad (10)
\end{aligned}$$

де

$$f = - \frac{8\pi G_0 (1 - \nu_0)(1 - \nu)}{G(1 - 2\nu_0)abh}, \quad A = \frac{12\nu - 8\nu^2 - 7}{8(1 - \nu)}.$$

У лівій частині рівняння (10) останній інтеграл існує в звичайному сенсі, що впливає з аналізу підінтегрального виразу, коли $\boldsymbol{\eta} \rightarrow \mathbf{y}$. З точки зору числової реалізації це забезпечує обчислення цього інтегралу через звуження області інтегрування до \tilde{S}^0 виключенням малої області навколо точки \mathbf{y} з \tilde{S} .

Враховавши, що образом контуру включення є одиничне коло, за припущення згладженої кромки неоднорідності [2] розв'язок $\Delta \tilde{u}$ подамо у формі

$$\Delta \tilde{u}(\mathbf{y}, t) = \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2} \tilde{\alpha}(\mathbf{y}, t), \quad (11)$$

де $\tilde{\alpha}$ – невідома гладка функція. Тоді співпадіння характеристичної частини рівняння (10) з характеристичною частиною рівняння стосовно еліптичної тріщини дозволяє побудувати його регулярний аналог за схемою, описаною у роботі [9]. У кінцевому результаті матимемо

$$\begin{aligned}
& [f\sqrt{1-y_1^2-y_2^2} + J_{00}(\mathbf{y})]\tilde{\alpha}(\mathbf{y}, t) + J_{10}(\mathbf{y})\frac{\partial\tilde{\alpha}(\mathbf{y}, t)}{\partial y_1} + J_{01}(\mathbf{y})\frac{\partial\tilde{\alpha}(\mathbf{y}, t)}{\partial y_2} + \\
& + \frac{1}{2}J_{20}(\mathbf{y})\frac{\partial^2\tilde{\alpha}(\mathbf{y}, t)}{\partial y_1^2} + \frac{1}{2}J_{02}(\mathbf{y})\frac{\partial^2\tilde{\alpha}(\mathbf{y}, t)}{\partial y_2^2} + \\
& + J_{11}(\mathbf{y})\frac{\partial^2\tilde{\alpha}(\mathbf{y}, t)}{\partial y_1\partial y_2} + \frac{A}{c_2^2}P(\mathbf{y})\frac{\partial^2\tilde{\alpha}(\mathbf{y}, t)}{\partial t^2} - \\
& - 4(1-\nu)\iint_{\tilde{S}^0}\sqrt{1-\eta_1^2-\eta_2^2}\frac{[\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})]^3}{|\mathbf{y}-\boldsymbol{\eta}|^3}\mathbf{B}^{|\mathbf{y}-\boldsymbol{\eta}|}[\tilde{\alpha}(\boldsymbol{\eta}, t)]dS_{\boldsymbol{\eta}} = \\
& = \frac{1-\nu}{G}\tilde{\sigma}^{\text{in}}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y} \in \tilde{S}, \quad t > 0, \quad (12)
\end{aligned}$$

де регулярні коефіцієнти J_{ij} , P при невідомій функції та її просторових і часових похідних виражаються через еліптичні інтеграли першого $\mathbf{K}(q)$ і другого $\mathbf{E}(q)$ роду як

$$\begin{aligned}
J_{ij}(\mathbf{y}) &= I_{ij}(\mathbf{y}) - \iint_{\tilde{S}^0}\sqrt{1-\eta_1^2-\eta_2^2}\frac{[\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})]^3}{|\mathbf{y}-\boldsymbol{\eta}|^3}(\eta_1-y_1)^i(\eta_2-y_2)^j dS_{\boldsymbol{\eta}}, \\
I_{00} &= -\frac{2\pi}{a^3(1-q^2)}\mathbf{E}(q), \\
I_{10}(\mathbf{y}) &= -\frac{2\pi y_1}{a^3 q^2}[\mathbf{K}(q) - \mathbf{E}(q)], \\
I_{01}(\mathbf{y}) &= -\frac{2\pi y_2}{a^3 q^2}\left[\frac{\mathbf{E}(q)}{1-q^2} - \mathbf{K}(q)\right], \\
I_{20}(\mathbf{y}) &= \frac{\pi}{a^3 q^2}\left\{\mathbf{K}(q) - \mathbf{E}(q) - \frac{y_1^2}{q^2}[(2-q^2)\mathbf{K}(q) - 2\mathbf{E}(q)] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{y_2^2}{q^2}[(2-q^2)\mathbf{E}(q) - 2(1-q^2)\mathbf{K}(q)]\right\}, \\
I_{02}(\mathbf{y}) &= \frac{\pi}{a^3 q^2}\left\{\frac{\mathbf{E}(q)}{1-q^2} - \mathbf{K}(q) - \frac{y_1^2}{q^2}\left[\frac{2-q^2}{1-q^2}\mathbf{E}(q) - 2\mathbf{K}(q)\right] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{y_2^2}{q^2}[(2-q^2)\mathbf{K}(q) - 2\mathbf{E}(q)]\right\}, \\
I_{11}(\mathbf{y}) &= \frac{2\pi y_1 y_2}{a^3 q^4}[(2-q^2)\mathbf{K}(q) - 2\mathbf{E}(q)], \\
P(\mathbf{y}) &= \frac{\pi}{aq^2}\left\{q^2\mathbf{K}(q) - y_1^2[\mathbf{K}(q) - \mathbf{E}(q)] - y_2^2[\mathbf{E}(q) - (1-q^2)\mathbf{K}(q)]\right\} - \\
& \quad - \iint_{\tilde{S}^0}\sqrt{1-\eta_1^2-\eta_2^2}\frac{\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})}{|\mathbf{y}-\boldsymbol{\eta}|}dS_{\boldsymbol{\eta}}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Числове розв'язання рівняння (12) базується на методі просторової колокації у поєднанні з покровою алгоритмізацією за часом. Для цього роз-

ділимо область \tilde{S} на Q граничних елементів \tilde{S}_q , $\tilde{S} = \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2 \dots \cup \tilde{S}_Q$, шляхом рівномірної дискретизації уздовж радіальної і полярної координат. Часовий інтервал $[0, T]$ розділимо рівномірно на K підінтервалів з часовим приростом Δt таким чином, що $t_r = r\Delta t$, $r = 1, 2, \dots, K$, визначає момент часу на r -му часовому кроці.

Невідому функцію $\tilde{\alpha}$ апроксимуємо таким інтерполяційним многочленом:

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{y}, t) = \sum_{q=1}^Q \sum_{r=1}^K \tilde{\alpha}_{qr} \theta_q(\mathbf{y}) \vartheta_r(t), \quad (14)$$

де $\tilde{\alpha}_{qr} = \tilde{\alpha}(\mathbf{y}_q, t_r)$ – значення невідомої функції у центрі $\mathbf{y}_q(y_{1q}, y_{2q})$ q -го елемента в момент часу $t_r = r\Delta t$, функції θ_q та ϑ_r задовольняють умови

$$\theta_q(\mathbf{y}_i) = \delta_{qi}, \quad \vartheta_r(t_j) = \delta_{rj}, \quad (15)$$

тут δ_{ij} – символ Кронекера.

Підставивши подання (14) у рівняння (12) та задовольнивши його у кожній точці колокації $\mathbf{y}_i(y_{1i}, y_{2i})$, $i = 1, 2, \dots, Q$, і на кожному часовому кроці t_r , отримаємо рекурентну за часовим індексом систему лінійних алгебраїчних рівнянь у формі

$$\sum_{q=1}^Q (c_{iq} + d_{iqrr}) \tilde{\alpha}_{qr} = \frac{1-\nu}{G} \tilde{\sigma}^{\text{in}}(\mathbf{y}_i, t_r) - \sum_{q=1}^Q \sum_{\ell=1}^{r-1} d_{iqr\ell} \tilde{\alpha}_{q\ell}. \quad (16)$$

Матриця системи рівнянь (16) внаслідок принципу причинності характеризується придіагональною стрічковою структурою, її коефіцієнти c_{iq} , $d_{iqr\ell}$ мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} c_{iq} = & [f \sqrt{1 - y_{1i}^2 - y_{2i}^2} + J_{00}(\mathbf{y}_i)] \delta_{iq} + J_{10}(\mathbf{y}_i) \left. \frac{\partial \theta_q(\mathbf{y})}{\partial y_1} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_i} + \\ & + J_{01}(\mathbf{y}_i) \left. \frac{\partial \theta_q(\mathbf{y})}{\partial y_2} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_i} + \frac{1}{2} J_{20}(\mathbf{y}_i) \left. \frac{\partial^2 \theta_q(\mathbf{y})}{\partial y_1^2} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_i} + \\ & + \frac{1}{2} J_{02}(\mathbf{y}_i) \left. \frac{\partial^2 \theta_q(\mathbf{y})}{\partial y_2^2} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_i} + J_{11}(\mathbf{y}_i) \left. \frac{\partial^2 \theta_q(\mathbf{y})}{\partial y_1 \partial y_2} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}_i}, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{iqr\ell} = & \frac{A}{c_2^2} \delta_{iq} P(\mathbf{y}_i) \left. \frac{\partial^2 \vartheta_\ell(t)}{\partial t^2} \right|_{t=t_r} - \\ & - 4(1-\nu) \iint_{\tilde{S}^0} \frac{\sqrt{1 - \eta_1^2 - \eta_2^2}}{|\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\eta}|^3} [\beta(\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\eta})]^3 \theta_q(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{B}^{|\mathbf{y}-\boldsymbol{\eta}|} [\vartheta_\ell(t)] \Big|_{t=t_r, \mathbf{y}=\mathbf{y}_i} dS_{\boldsymbol{\eta}}. \end{aligned}$$

Для обчислення цих коефіцієнтів застосовано різницеві схеми апроксимації просторових і часових похідних з урахуванням вибору кусково-сталої просторової функції форми та лінійної часової функції форми:

$$\theta_q(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{y} \in \tilde{S}_q, \\ 0, & \mathbf{y} \notin \tilde{S}_q, \end{cases}$$

$$\vartheta_r(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t - r\Delta t|}{\Delta t}, & |t - r\Delta t| \leq \Delta t, \\ 0, & |t - r\Delta t| > \Delta t. \end{cases} \quad (18)$$

Шляхом поступового нарощування часу з нульовими умовами на початковому кроці та послідовного розв'язання добре обумовленої системи рівнянь (16) отримуємо покрокові залежності функції $\tilde{\alpha}$ від часу у вузлових точках \mathbf{y}_i на образі включення. Запропонований маршовий алгоритм має ряд особливостей, що полегшують його реалізацію: внаслідок незалежності матриці розрахункової системи рівнянь за наближень (18) від номера часового кроку ітераційному перерахунку підлягають лише праві частини цієї системи; для обчислення слід залучати значення функції $\tilde{\alpha}$ на обмеженому часовому проміжку $[t_r - 2a/c_2, t_r]$, що стабілізує об'єм обчислень з просуванням углиб часу. Для числової верифікації матриці системи рівнянь (16) використовуємо те, що у границі $\Delta t \rightarrow \infty$ вона повинна збігатись до матриці дискретного аналога ГІР статичних задач для тіла з податливим включенням [6].

Відновлення розв'язку у реальній області включення досягається підстановкою знайдених із рівнянь (16) значень функції $\tilde{\alpha}$ у співвідношення (11) і (8). Так отримуємо часові залежності стрибка переміщень на включенні у точках-прообразах вузлів дискретизації області \tilde{S} . За ним визначаємо коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) відриву K_1 в околі включення як функцію часу t і полярного кута φ точки контуру неоднорідності за формулою

$$K_1(\varphi, t) = -\frac{2G}{(1-\nu)a} \left(\frac{\pi}{b}\right)^{3/2} \left[\frac{(b/a)^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi^*}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi^*} \right]^{1/4} \tilde{\alpha}(\varphi^*, t), \quad (19)$$

де φ^* – кутова координата образу цієї точки, зв'язана з φ співвідношенням $\varphi = \arctg(b \operatorname{tg} \varphi^*/a)$.

Числові результати стосуються падіння по нормалі до включення товщини $h = 0.01a$ плоскої поздовжньої пружної хвилі з часовим розподілом напружень $\sigma_{33}^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = \sigma_0 H(c_1 t - x_3)$, де $H(t)$ – функція Гевісайда, σ_0 – постійна амплітуда хвилі. Обчислено нормований коефіцієнт інтенсивності напружень $\bar{K}_1 = K_1/K_1^{\text{st}}$ (тут $K_1^{\text{st}} = \sigma_0 \sqrt{\pi b}/E(q)$ – максимальний КІН в точці контуру на малій півосі еліптичної тріщини під нормальним статичним навантаженням σ_0) у залежності від безрозмірного часу $\bar{t} = tc_2/(2a)$. Область \tilde{S} розділяли на 264 елементи, крок за часом вибирали як $\Delta t = 0.06a/c_2$. Коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці і включення прирівнювали до 0.3, контраст між ними забезпечувався різними модулями зсуву з параметром $\bar{G} = G_0/G$.

На рис. 1, рис. 2 показано історію КІН для еліптичного включення зі співвідношенням півосей $b/a = 0.5$ та різною податливістю щодо матричного середовища, криві 1–3 обчислено для значень $\bar{G} = 0.005, 0.01, 0.05$; штрихові криві відповідають тріщині, коли $\bar{G} = 0$. Рис. 1 стосується точки А контуру на меншій півосі включення, рис. 2 – точки В на більшій. Рис. 3 демонструє аналогічну залежність у точці А включення з параметром податливості $\bar{G} = 0.005$ для різних ексцентриситетів неоднорідності: криві 1 – відповідають $b/a = 1$ (кругове включення); 2 – $b/a = 0.8$; 3 – $b/a = 0.6$.

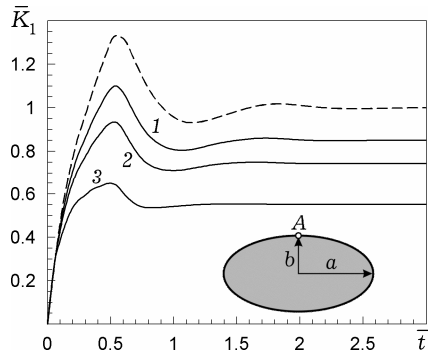


Рис. 1

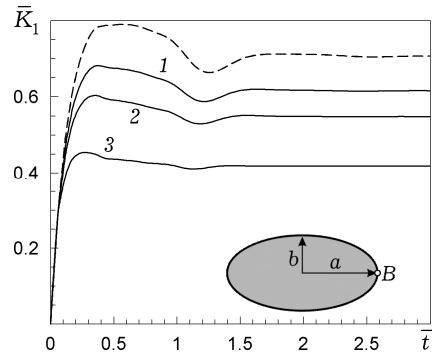


Рис. 2

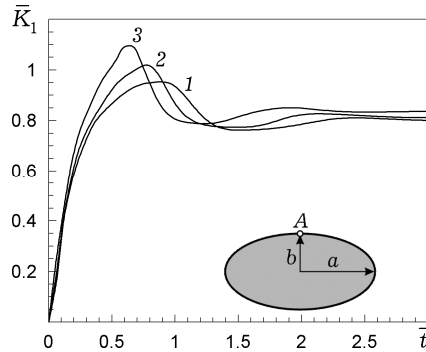


Рис. 3

Закономірністю нестационарної поведінки КІН є стрімке зростання на початковій стадії до пікових значень з подальшим спаданням і коливним виходом на статичні відповідники. Максимальні КІН на всьому часовому проміжку, як і в статичному випадку, фіксуються в околі точки контуру включення на меншій півосі. Включення характеризується меншими КІН порівняно із тріщиною, спостерігається також зменшення КІН та монотонність їх зміна у часі для більш жорстких включень. Ці ефекти є визначальними з точки зору можливості зниження динамічних напружень у пошкоджених тріщинами конструкціях шляхом «заліковування» дефектів ін'єкційними технологіями [1, 5]. Зменшення ексцентриситету включення приводить до згасання амплітуди коливань КІН. У випадку кругового включення маємо добру узгодженість числових результатів з даними роботи [2], отриманими методом інтегрального перетворення Фур'є за часом.

Робота виконана за фінансової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект № Ф 40.1/018).

1. Маруха В. І., Панасюк В. В., Силованюк В. П. Ін'єкційні технології відновлення робоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації. – Львів: Сполом, 2009. – 261 с.
2. Михаськів В. В., Кунець Я. І., Міщенко В. О. Напруження у тривимірному тілі з тонким податливим включенням за фронтом імпульсних хвиль // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 3. – С. 63–68.
Te same: Mykhas'kiv V. V., Kunets' Ya. I., Mishchenko V. O. Stresses in a three-dimensional body with thin compliant inclusion behind the front of pulsed waves // Mater. Sci. – 2003. – **39**, No. 3. – P. 377–384.
3. Мойсеєнок А. П., Попов В. Г. Взаємодія плоских нестационарних волн с тонким упругим включением при условии гладкого контакта // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 4. – С. 152–164.
Te same: Moiseenok A. P., Popov V. G. Interaction of plane nonstationary waves with a thin elastic inclusion under smooth contact conditions // Mech. Solids (J. Rus. Acad. Sci.). – 2009. – **44**, No. 4. – P. 621–631.

4. *Саврук М. П.* Новый метод развязывания динамических задач теории упругости та механики руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 4. – С. 7–11.
Te same: *Savruk M. P.* New method for the solution of dynamic problems of the theory of elasticity and fracture mechanics // Mater. Sci. – 2003. – **39**, No. 4. – P. 465–471.
5. *Силованюк В. П., Галазюк О. В.* Розрахункова модель тіла із тріщиною, «залікованою» в результаті ін'єктування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 2. – С. 88–92.
Te same: *Sylovanjuk V. P., Halazyuk O. V.* Numerical model of a body containing a crack «healed» by injection // Mater. Sci. – 2011. – **47**, No. 2. – P. 211–216.
6. *Хай М. В.* Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1993. – 253 с.
7. *Boström A., Bönvik P., Olsson P.* A comparison of exact first order and spring boundary conditions for scattering by thin layers // J. Nondestruct. Eval. – 1992. – **11**, No. 3–4. – P. 175–184.
8. *Mykhas'kiv V. V.* Transient response of a plane rigid inclusion to an incident wave in an elastic solid // Wave Motion. – 2005. – **41**, No. 2. – P. 133–144.
9. *Sladek J., Sladek V., Mykhas'kiv V. V., Stankevych V. Z.* Application of mapping theory to boundary integral formulation of 3D dynamic crack problems // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2003. – **27**, No. 3. – P. 203–213.
10. *Wünsche M., Zhang Ch., Garsía-Sánchez F., Sáez A., Sladek V., Sladek J.* On two hypersingular time-domain BEM for dynamic crack analysis in 2D anisotropic elastic solids // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2009. – **198**, No. 33–36. – P. 2812–2824.
11. *Xiao Z. M., Luo J.* Three-dimensional dynamic stress analysis on a penny-shaped crack interacting with a suddenly transformed spherical inclusion // Int. J. Fract. – 2003. – **123**, No. 1. – P. 29–47.
12. *Yoshikawa H., Nishimura M.* An improved implementation of time domain elastodynamic BIEM in 3D for large scale problems and its application to ultrasonic NDE // Electr. J. Bound. Elem. – 2003. – **1**, No. 2. – P. 201–217.
13. *Zhang Ch., Savaidis A.* 3-D transient dynamic crack analysis by a novel time-domain BEM // Comput. Model. Eng. Sci. – 2003. – **4**, No. 5. – P. 603–618.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ПАДЕНИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ПОДАТЛИВОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ В ФОРМЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИСКА

Путем решения граничных интегральных уравнений методом отражений в сочетании с пошаговым методом построения временных зависимостей исследовано поведение податливого дискового эллиптического включения в трехмерном поле импульсных упругих волн. В случае симметричной задачи и нестационарного возмущения с профилем функции Гевисайда установлено влияние на коэффициент интенсивности динамических напряжений в окрестности включения его эксцентриситета и соотношения между упругими модулями матричной среды и включения.

NONSTATIONARY PROBLEM OF ELASTIC WAVE INCIDENCE ON COMPLIANT DISK-SHAPED ELLIPTIC INCLUSION

Solving the boundary integral equations by the mapping method in conjunction with the marching in time method the behavior of compliant disk-shaped elliptic inclusion in 3D impulse elastic wave field is investigated. In the case of symmetric problem and nonstationary disturbance with the Heaviside function profile the influence of inclusion eccentricity and matrix-inclusion rigidity ratio on the mode-I dynamic stress intensity factor in the inclusion vicinity is analyzed.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

Одержано

² Львів. факультет Дніпропетр.
нац. ун-ту залізн. транспорту, Львів

27.12.11