

НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЮВАННЯ ДЛЯ ПЛОСКОЇ ДІЕЛЕКТРИЧНОЇ СТРУКТУРИ З ІДЕАЛЬНО ПРОВІДНОЮ ОСНОВОЮ

Запропоновано підхід до знаходження наближеного розв'язку оберненої задачі розсіювання плоскої електромагнітної хвилі на плоскій шаруватій діелектричній структурі з ідеально провідною підкладкою в основі. Показано, що така обернена задача є ідентичною до оберненої задачі для чисто діелектричної структури, якщо за вихідні дані вибрати значення імпульсної характеристики на інтервалі часу, впродовж якого фронт хвилі розповсюджується у діелектрику і не зазнає впливу ідеально провідної основи. Параметри апроксимаційних моделей імпульсної характеристики визначено методами спектрального аналізу за заданими в обмеженому частотному діапазоні значеннями коефіцієнта відбиття.

Визначення електричних параметрів і товщини покриттів, що застосовуються для електричної ізоляції та захисту від корозії металічних поверхонь, є однією з найважливіших задач неруйнівного контролю. Висока проникна здатність, компактність вимірювальної апаратури та помірна ціна вказує на перспективність радіохвильового неруйнівного контролю діелектриків. Запорукою підвищення ефективності такого контролю є впровадження нових методів обробки результатів вимірювань розсіяного поля, які дозволяють визначати параметри ізоляційного покриття з високою точністю. Доцільність використання теорії обернених задач для оцінювання невідомих параметрів діелектриків за вимірними даними є безсумнівною, що не раз підтверджено на практиці.

Як правило, нанесення ізоляційних покриттів приводить до формування шаруватої структури, поверхні розділу матеріалів якої є плоско-паралельними, а електричні характеристики постійними для кожного шару. Очевидно, що кусково-стала функція діелектричної проникності є найбільш простою і водночас прийнятною моделлю такого шаруватого діелектрика (рис. 1).

Наявність у досліджуваній структурі діелектричної частини і металічної основи, що має високу провідність і характеризується значним загасанням електромагнітного поля у провідному матеріалі основи, не дозволяє застосувати безпосередньо інструменти класичної теорії обернених задач [1, 4, 10, 12, 16], які розвинуті за умови відсутності втрат у середовищі розповсюдження. З іншої сторони, математичній моделі такого процесу розсіювання не відповідає самоспряжений оператор, що суттєво ускладнює загальний розв'язок обернених задач із втратами [13, 15]. Тому розглянемо модельну задачу, у якій металічна основа має ідеально провідну плоску поверхню з відповідними граничними умовами для складових електромагнітного поля на ній. Обернені задачі для схожих структур сформульовано в роботах [11, 18, 20].

Таким чином, задачу неруйнівного контролю шаруватих ізоляційних покриттів на металічній основі зведено до оберненої задачі розсіювання електромагнітних хвиль на плоских шаруватих діелектриках з ідеально провідною основою. Тому метою роботи є створення математично обґрунтованого методу визначення товщини шарів і діелектричних проникностей покриттів як основних електричних параметрів ізоляційних матеріалів.

1. Формулювання оберненої задачі розсіювання. Розсіювання нормально падаючої плоскої електромагнітної хвилі на плоску діелектричну структуру зі змінною діелектричною проникністю описується рівнянням Гельмгольца, записаним відносно напруженості електричного поля:

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} + \omega^2 \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon(x) E(x) = 0, \quad (1)$$

де ε_0 і μ_0 – діелектрична та магнітна проникності вакууму; $\varepsilon(x)$ – відносна діелектрична проникність; μ – відносна магнітна проникність, яку, приймаючи матеріали покриття немагнітними, надалі вважатимемо рівною одиниці; ω – кругова частота.

Наявність ідеально провідної підкладки, яка обмежує діелектричну структуру, приводить до того, що напруженість електричного поля $E(x)$ задовольняє додаткову граничну умову $E(x_N) = 0$, крім умов неперервності електричної

$$E(x_j - 0) = E(x_j + 0)$$

і магнітної

$$\left. \frac{dE(x)}{dx} \right|_{x=x_j-0} = \left. \frac{dE(x)}{dx} \right|_{x=x_j+0}$$

складових поля на всіх поверхнях розділу шарів для кожного $j = 0, \dots, N$.

Розв'язок рівняння (1) у вільному просторі зліва від діелектричної структури ($x \leq x_0$) можна записати у вигляді

$$E(x) = a_0(\omega) \exp(ix\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}) + b_0(\omega) \exp(-ix\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}), \quad (2)$$

де $a_0(\omega)$ та $b_0(\omega)$ – коефіцієнти, які визначають співвідношення між хвилями частоти ω , що розповсюджуються у протилежних напрямках. Їх відношення безпосередньо дорівнює коефіцієнту відбиття $\tilde{L}(\omega) := b_0(\omega)/a_0(\omega)$.

Аналогічні до виразу (2) залежності між амплітудами хвиль, які розповсюджуються у протилежних напрямках, справджуються для будь-якого шару. Так, у точці x_N напруженість поля $E(x_N) = a_N(\omega) \exp(i\omega t_N) + b_N(\omega) \exp(-i\omega t_N)$, де час проходження хвилі t_N визначається товщинами шарів $d_j = x_j - x_{j-1}$: $t_N = \sum_{j=0}^N d_j \sqrt{\varepsilon_j \varepsilon_0 \mu_0}$.

Як показано в [6], співвідношення між $a_0(\omega)$ і $b_0(\omega)$ та $a_N(\omega)$ і $b_N(\omega)$ задає матриця

$$\begin{bmatrix} a_0(\omega) \\ b_0(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\omega) & B(-\omega) \\ B(\omega) & A(-\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_N(\omega) \\ b_N(\omega) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

коефіцієнти якої є скінченними тригонометричними рядами

$$A(\omega) = \sum_{p=1}^M \alpha_p \exp(iv_p \omega) \quad (4)$$

та

$$B(\omega) = \exp(id_0 \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}) \sum_{p=1}^M \beta_p \exp(iv_p \omega). \quad (5)$$

Тут α_p , β_p та v_p є дійсними коефіцієнтами, що залежать від параметрів середовища ε_j та d_j , причому $0 < v_0 < v_1 < \dots < v_M$ [6]. Значення M визна-

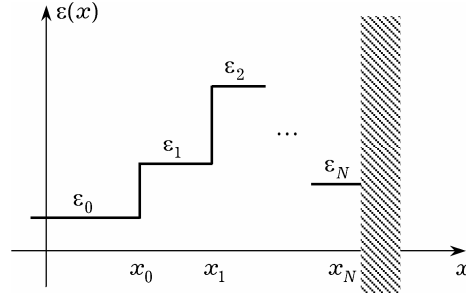


Рис. 1. Функція діелектричної проникності шаруватого діелектрика на ідеально провідній основі.

чається кількістю шарів у структурі та співвідношенням між їх параметрами. Зокрема, для попарно неспівмірних оптичних товщин шарів $d_j \sqrt{\varepsilon_j}$ виконується рівність $M = 2^N$.

У випадку, коли діелектрична шарувата структура розглядається без ідеально провідної підкладки, коефіцієнт відбиття можна встановити з (3) як відношення $L(\omega) = b_0(\omega)/a_0(\omega) = B(\omega)/A(\omega)$, припустивши, що з правої сторони від структури ($x \geq x_N$) відсутня падаюча хвиля, тобто $b_N(\omega) = 0$.

Розглядаючи пряму задачу розсіювання для діелектричної структури з металічною основою (рис. 1), з граничної умови $E(x_N) = 0$ на поверхні ідеального провідника можна встановити співвідношення коефіцієнтів розсіювання в точці x_N як $a_N(\omega) = -b_N(\omega) \exp(-2i\omega t_N)$. Звідси випливає, що значення коефіцієнтів розсіювання в точці реєстрації поля мають вигляд

$$\begin{bmatrix} a_0(\omega) \\ b_0(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_N(\omega) \exp(-2i\omega t_N) A(\omega) + b_N(\omega) B(-\omega) \\ -b_N(\omega) \exp(-2i\omega t_N) B(\omega) + b_N(\omega) A(-\omega) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

а коефіцієнти відбиття $\tilde{L}(\omega)$ від усієї діелектричної структури з ідеально провідною підкладкою визначаються як

$$\tilde{L}(\omega) = -\frac{\exp(i\omega t_N) A(-\omega) - \exp(-i\omega t_N) B(\omega)}{\exp(-i\omega t_N) A(\omega) - \exp(i\omega t_N) B(-\omega)}. \quad (7)$$

Якщо вираз (7) дає розв'язок прямої задачі розсіювання, то відповідна обернена задача полягає у визначенні параметрів ε_j та d_j діелектричної структури за заданою частотною залежністю коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$.

Запис коефіцієнта відбиття у вигляді виразу (7) є зручним для подальшого аналізу оберненої задачі розсіювання. Її можна трактувати як задачу Рімана – Гільберта [3] та шукати розв'язок оберненої задачі через виділення з коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$ окремо коефіцієнтів $A(\omega)$ та $B(\omega)$.

У цій роботі для знаходження розв'язку оберненої задачі та доведення його однозначності вибрано іншу стратегію: запропоновано метод зведення оберненої задачі до стандартної задачі без екрану. Для цього показано, що на інтервалі часу $[0, 2t_N)$ перетворення Фур'є від коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$ співпадає з перетворенням Фур'є від коефіцієнта відбиття $L(\omega)$ для безвтратної задачі. Результат такого перетворення – визначена на інтервалі $[0, 2t_N)$ імпульсна характеристика – містить достатні вихідні дані для розв'язання оберненої задачі відносно функції $\tilde{\varepsilon}(\tau) := \varepsilon(x)$ з інтервалу $\tau \in$

$$\in [0, t_N), \text{ де } \tau(x) = \int_0^x \sqrt{\varepsilon(x') \varepsilon_0 \mu_0} dx' \quad [10, 12, 16].$$

2. Оцінка часу проходження хвилі крізь діелектрик. Наступна теорема слугуватиме теоретичною базою для створення методу оцінювання часу t_N розповсюдження хвилі від джерела випромінювання до ідеально провідної підкладки у досліджуваній багатошаровій структурі.

Теорема 1. *Коефіцієнт відбиття $\tilde{L}(\omega) = |\tilde{L}(\omega)| \exp(i\varphi(\omega)) = \exp(i\varphi(\omega))$ хвилі від шаруватої діелектричної структури на ідеально провідному плоскому екрані має фазову характеристику у вигляді*

$$\varphi(\omega) = 2\omega t_N - 2 \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(\vartheta_n \omega) + \pi. \quad (8)$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо функцію

$$F(\omega) := -\tilde{L}(\omega) \exp(-2i\omega t_N) = \frac{A(-\omega) - \exp(-2i\omega t_N)B(\omega)}{A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)}, \quad (9)$$

яка є відношенням деякої функції $A(-\omega) - \exp(-2i\omega t_N)B(\omega)$ до спряженої до неї. Для того щоб окреслити розташування нулів функції (9), факторизуємо функцію $A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)$:

$$A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega) = A(\omega) \left(1 - \exp(2i\omega t_N) \frac{B(-\omega)}{A(\omega)} \right) = A(\omega)g(\omega). \quad (10)$$

Спектральні властивості самоспряжених операторів дозволяють стверджувати, що $A(\omega)$ не має нулів у верхній півплощині $\omega \in \mathbb{C}^+$ та на дійсній осі $\omega \in \mathbb{R}$ [4]. Аналіз функції $g(\omega) = 1 - \exp(2i\omega t_N) \frac{B(-\omega)}{A(\omega)}$ проведемо, оцінюючи окремо поведінку її на дійсній осі $\omega \in \mathbb{R}$ та на безмежності у верхній комплексній півплощині $\omega \in \mathbb{C}^+$.

Функцію $g(\omega)$ можна виразити через коефіцієнт відбиття $L(\omega)$ для безвтратної структури:

$$g(\omega) = 1 - \exp(2i\omega t_N) \frac{B(-\omega)}{A(-\omega)} \frac{A(-\omega)}{A(\omega)} = 1 - \exp(2i\omega t_N)L(-\omega) \exp(i\sigma(\omega)). \quad (11)$$

Як відомо, коефіцієнт відбиття для безвтратного шаруватого діелектрика завжди менший від одиниці, $|L(\omega)| < 1$, на дійсній осі $\omega \in \mathbb{R}$, а функція $\sigma(\omega)$ є дійснозначною, тобто множники $\exp(i\sigma(\omega))$ та $\exp(2i\omega t_N)$ не перевищують одиниці за модулем. Звідси можна зробити висновок, що функція $g(\omega)$ на $\omega \in \mathbb{R}$ не перетворюється в нуль.

З другого боку, у верхній комплексній півплощині $\omega \in \mathbb{C}^+$ функція $g(\omega)$ має границю

$$\lim_{\text{Im } \omega \rightarrow +\infty} \left(1 - \exp(2i\omega t_N) \frac{B(-\omega)}{A(\omega)} \right) = 1, \quad (12)$$

оскільки функція $\exp(2i\omega t_N)$ зникає значно швидше, ніж функція $B(-\omega)$ зростає. Останнє випливає з нерівності $d_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} + v_M < 2t_N$ для аргументів тригонометричних рядів (5).

При встановленні границі (12) використано також властивість, що функція $A(\omega)$ не перетворюється в нуль у верхній півплощині $\omega \in \mathbb{C}^+$, включаючи дійсну вісь $\omega \in \mathbb{R}$. Відповідно функцію $1/A(\omega)$ можна розвинути в ряд, скориставшись формулою

$$\frac{1}{1-r(\omega)} = 1 + r(\omega) + r^2(\omega) + r^3(\omega) + \dots \quad (13)$$

Для ряду (13) виконується умова $|r(\omega)| < 1$, а функцію $A(\omega)$ можна виразити як $A(\omega) = C(1-r(\omega))$, де C – деяка стала. Звідси отримуємо, що шукана функція $1/A(\omega)$ є нескінченним тригонометричним рядом

$$\frac{1}{A(\omega)} = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \exp(i\omega \eta_n), \quad (14)$$

в якому всі коефіцієнти в аргументах експонент є додатними: $\eta_n > 0$.

Очевидно, що у верхній комплексній півплощині $\omega \in \mathbb{C}^+$ функція $1/A(\omega)$ прямує до константи $1/\alpha_1$ при $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$.

Для завершення доведення теореми треба встановити характер аргументу $\lambda(\omega)$ функції

$$A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega) = |A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)| \exp(i\lambda(\omega)).$$

З виразів (4), (5) і (10) бачимо, що така функція є аналітичною, а відсутність нулів у верхній півплощині вказує на можливість однозначного відновлення її фази за модулем $|A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)|$:

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathbf{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log |A(\omega') - \exp(2i\omega' t_N)B(-\omega')|}{\omega - \omega'} d\omega', \quad (15)$$

де $\mathbf{P} \int d\omega$ – головне значення інтеграла типу Коші [3]. Очевидно, що

$$|A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)|^2 = u_0 + \sum_{p=1}^P u_p \cos(\gamma_p \omega)$$

є скінченим тригонометричним рядом, який не перетворюється в нуль на дійсній осі. Тому логарифм такої функції можна розвинути в ряд згідно з формулою

$$\log(1 + \tilde{r}(\omega)) = \tilde{r}(\omega) - \frac{\tilde{r}(\omega)^2}{2} + \frac{\tilde{r}(\omega)^3}{3} - \frac{\tilde{r}(\omega)^4}{4} + \dots \quad (16)$$

Отже, функція

$$\log(|A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)|^2) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\vartheta_n \omega)$$

є нескінченим тригонометричним рядом з постійним коефіцієнтом c_0 .

З огляду на властивості головного значення інтеграла типу Коші (15) можна стверджувати, що аргумент функції $A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)$ матиме вигляд $\lambda(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(\vartheta_n \omega)$, де $\vartheta_n > 0$. Звідси робимо висновок, що дослід-

жувана функція $F(\omega)$, означена відношенням $\frac{A(-\omega) - \exp(-2i\omega t_N)B(\omega)}{A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)}$ у виразі (9), матиме фазу $\arg F(\omega) = -2\lambda(\omega) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(\vartheta_n \omega)$. З добутку

$L(\omega) = -F(\omega) \exp(2i\omega t_N)$ випливає, що

$$\varphi(\omega) = 2\omega t_N - 2 \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(\vartheta_n \omega) + \pi.$$

Теорему доведено. \blacklozenge

Зуваження. На основі твердження теореми 1 можна побудувати конструктивний алгоритм знаходження оптичної товщини шаруватої структури $t_N / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ або часу проходження t_N хвилі крізь діелектрик, оцінивши параметр t_N за відомою функцією $\varphi(\omega)$.

З формули (8) випливає, що друга похідна функції $\varphi(\omega)$ є тригонометричним рядом з нульовим сталим коефіцієнтом: $\frac{d^2\varphi(\omega)}{d\omega^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \hat{s}_n \vartheta_n^2 \sin(\hat{\vartheta}_n \omega)$.

Параметри \hat{s}_n та $\hat{\vartheta}_n$ цього ряду можна оцінити методами спектрального аналізу з великою роздільною здатністю [19]. Таким чином, задачу знаходження t_N зводимо до стандартної задачі регресивного аналізу [14]. За відомою функцією $y(\omega) = \varphi(\omega) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \hat{s}_n \sin(\hat{\vartheta}_n \omega)$ знаходження оцінок \hat{t}_N для моделі у вигляді лінійної частотної залежності $2\omega \hat{t}_N + \pi + \xi = y(\omega)$ не становить

труднощів. Тут використовуємо припущення, що ξ є випадковою величиною з нульовим середнім, а функція $y(\omega)$ є заданою функцією, оскільки її отримуємо перерахунком вихідних даних оберненої задачі розсіювання, а саме – значень фази коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$.

3. Особливості імпульсної характеристики. Відмінність між системами координат, в яких задаємо вихідні дані та шукаємо розв'язок оберненої задачі вказує на те, що при розв'язанні оберненої задачі неминучим є перехід до спільної системи координат. У теорії одновимірних задач [1, 4, 15–17], де коефіцієнт відбиття задають частотною залежністю (або залежністю від енергії у квантовій теорії розсіювання [1, 4, 17]) і для встановлення імпульсної характеристики використовують перетворення Фур'є. Ця імпульсна характеристика, як і параметри середовища, в якому відбувається розсіювання, є функцією часу запізнення хвилі вздовж шляху свого розповсюдження.

Позначимо через \mathcal{F}^{-1} оператор оберненого перетворення Фур'є $\mathcal{F}^{-1}(R(\omega))(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$ та введемо імпульсну характеристику $\tilde{h}(t) := \mathcal{F}^{-1}(\tilde{L}(\omega))(t)$ діелектричної структури на ідеально провідній підкладці, а також імпульсну характеристику $h(t) := \mathcal{F}^{-1}(L(\omega))(t)$ чисто діелектричної шаруватої структури, що не обмежена ідеальною провідною площиною справа. Наступною теоремою встановимо ідентичність цих функцій на певному інтервалі часу.

Теорема 2. *Імпульсна характеристика діелектричної структури за умови повного відбиття у правому півпросторі від ідеально провідної підкладки співпадає на інтервалі $[0, 2t_N)$ з імпульсною характеристикою такої ж діелектричної структури у вільному просторі:*

$$\tilde{h}(t) = h(t), \quad t \in [0, 2t_N).$$

Д о в е д е н н я. Твердження про ідентичність імпульсних характеристик на початковому інтервалі передбачає, що для будь-якого значення часу $t \in (-\infty, +\infty)$ справджується рівність

$$\tilde{h}(t) = h(t) - \delta(t - 2t_N) * k(t), \quad (17)$$

де $*$ – оператор згортки; $\delta(t)$ – дельта-функція Дірака; $k(t)$ – деяка дійснозначна функція, для якої $k(t) = 0$ при $t \leq 0$.

Подальше доведення спрямоване на підтвердження тотожності, яка є перетворенням Фур'є від виразу (17):

$$\tilde{L}(\omega) = L(\omega) - \exp(2i\omega z)K(\omega), \quad (18)$$

де $K(\omega) := \mathcal{F}(k(t))(\omega)$ – пряме перетворення Фур'є від функції $k(t)$ і при цьому функцію $K(\omega)$ можна подати нескінченним тригонометричним рядом

$$K(\omega) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \exp(i\gamma_n \omega), \text{ в якому } \gamma_n > 0, \text{ а } x_n - \text{дійсні коефіцієнти.}$$

Використовуючи позначення коефіцієнта відбиття від шаруватого діелектрика у вільному просторі $L(\omega) = B(\omega)/A(\omega)$, перепишемо формулу (7) для коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$ від структури на ідеально провідній основі у вигляді

$$\tilde{L}(\omega) = L(\omega) - \exp(2i\omega t_N) \frac{1}{A(\omega)(A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega))} \quad (19)$$

і позначимо

$$K(\omega) = \frac{1}{A(\omega)(A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega))}. \quad (20)$$

Залишається довести, що функцію $K(\omega)$ можна розвинути у нескінченний тригонометричний ряд із додатними коефіцієнтами $\gamma_n > 0$ в аргументах комплексних експонент. Для цього використаємо властивість відсутності нулів на дійсній осі у функції $A(\omega)$ і $A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)$, що складають знаменник виразу (20). Аналогічно до функції $1/A(\omega)$, функцію $1/(A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega))$ також можна розвинути у нескінченний тригонометричний ряд згідно з формулою (13). Про додатність всіх аргументів у комплексних експонентах цих рядів можна судити з того, що $A(\omega)$ та $A(\omega) - \exp(2i\omega t_N)B(-\omega)$ є скінченними тригонометричними поліномами, в яких всі комплексні експоненти мають додатні коефіцієнти в аргументах, і перемноження таких поліномів не змінює зазначеної властивості.

Крім того, можна показати, що імпульсна характеристика має властивість $\tilde{h}(t) = 0$ при $t < 0$, оскільки $h(t) = 0$, що безпосередньо впливає з властивостей добутку спектрального коефіцієнта $B(\omega)$, записаного у вигляді ряду (5), та функції $1/A(\omega)$, яку подано виразом (14). Теорему доведено. \blacklozenge

Теорема 2 пояснює фізичний ефект розсіювання плоскої хвилі у шаруватому діелектрику на інтервалі часу $[0, 2t_N)$. Для більших значень часу розсіяне поле міститиме складові як від розсіювання хвилі на поверхнях розділу шарів діелектрика, так і від взаємодії хвилі з ідеально провідною поверхнею основи.

4. Розв'язання оберненої задачі розсіювання. У теорії обернених задач прийнято розділяти дискретне [9, 12] та неперервне [15, 16] формулювання одновимірних задач розсіювання електромагнітних хвиль залежно від характеру функції діелектричної проникності, яку необхідно знайти за частотною залежністю коефіцієнта відбиття. Наприклад, підхід Рімана – Гільберта покладено в основу знаходження неперервних функцій як розв'язку оберненої потенціальної задачі [2, 8, 13]. Цей підхід показав свою ефективність при пошуку наближених розв'язків задачі для розривних функцій діелектричної проникності [5] в електродинамічному формулюванні. Дискретний варіант задачі Захарова – Шабата [9] і метод пошарового зрізання [7, 12] працюють за умови, що розриви шуканої кусково-сталлої функції діелектричної проникності розташовані у вузлах деякої регулярної сітки. Наближений розв'язок неперервної задачі також можна отримати методами, що базуються на дискретній моделі.

Спільним для згаданих неперервного та дискретного підходів є те, що реконструкцію функції діелектричної проникності на інтервалі $[0, t_N)$ можна здійснити, знаючи імпульсну характеристику на інтервалі $[0, 2t_N)$. Така властивість дає можливість застосувати отримані у попередніх теоремах результати для створення методу визначення кусково-сталлої функції діелектричної проникності на ідеально провідній основі.

Оскільки значення коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$ як вихідні дані задачі розсіювання задаємо в обмеженому діапазоні частот $\omega \in [\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$, то його імпульсну характеристику можна знайти лише наближено. Тому розглянемо окремо два випадки, застосувавши неперервний і дискретний підходи до знаходження наближеного розв'язку оберненої задачі.

У першому випадку за вихідними даними в обмеженому діапазоні частот знайдемо наближення імпульсної характеристики в класі неперервних функцій:

$$\tilde{h}_{\text{cont}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_{\min}}^{\Omega_{\max}} \tilde{L}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega, \quad \tau \in [0, 2t_N]. \quad (21)$$

Взаємозв'язок між рівняннями Гельмгольца (1) та системою Захарова – Шабата дозволяє застосувати розв'язок однієї оберненої задачі до іншої при однакових спектральних даних, якими у розглядуваному випадку є значення коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$. Для системи Захарова – Шабата обернена задача розсіювання зводиться до розв'язання інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} Z_2(v, w) &= \int_{-w}^v \tilde{h}_{\text{cont}}(w + t') Z_1(v, t') dt', \\ Z_1(v, w) &= \tilde{h}_{\text{cont}}(w + v) + \int_{-w}^v \tilde{h}_{\text{cont}}(w + t') Z_2(v, t') dt'. \end{aligned} \quad (22)$$

Потенціал $Q(v) = -2Z_1(v, v)$ системи Захарова – Шабата, знайдений за розв'язком $Z_1(v, v)$ системи (22), дозволяє безпосередньо визначити шукану функцію діелектричної проникності:

$$\hat{\varepsilon}(\tau) = \exp\left(-4 \int_{-\infty}^{\tau} Q(v) dv\right), \quad \tau \in [0, t_N]. \quad (23)$$

Розв'язок оберненої задачі у дискретному випадку базується на тому, що імпульсна характеристика шаруватої діелектричної структури є нескінченною сумою дельта-функцій. Таку особливість можна виявити за допомогою коефіцієнта відбиття без ідеально провідної підкладки $L(\omega) = B(\omega)/A(\omega)$. Розвинувши функцію $1/A(\omega)$ в ряд (14), помноживши її на $B(\omega)$ та застосувавши обернене перетворення Фур'є, отримаємо

$$\tilde{h}_{\text{disc}}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta(\tau - \tau_n), \quad (24)$$

де c_n – коефіцієнти деякого збіжного ряду.

З використанням методів спектрального аналізу [19] коефіцієнти c_n ряду (24) і τ_n можна оцінити за відомою в обмеженому частотному діапазоні функцією коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$. Оскільки кількість членів цього ряду є нескінченною, то розв'язок такої задачі можна знайти лише наближено.

З іншого боку, розв'язок дискретної оберненої задачі, як еквівалентної до неперервної оберненої задачі Захарова – Шабата, встановлено для випадку, коли всі значення τ_n належать деякій регулярній сітці [9]. Введення незначних поправок з метою зведення значень τ_n до вузлів регулярної сітки ($c_n \neq 0$, $|\tau_n - n\Delta| < \epsilon$, де ϵ – задана похибка, Δ – крок сітки) вказує на наближений характер отриманого таким підходом розв'язку. Як показано в роботі [7], зведення до регулярної сітки з коректно вибраним кроком Δ не вносить суттєвих похибок у розв'язок, що дає можливість застосовувати метод пошарового зрізання до розв'язування оберненої задачі для чисто діелектричної шаруватої структури з довільними параметрами шарів.

У дискретному випадку також маємо аналогію між системою Захарова – Шабата та рівнянням Гельмгольца. Нехай імпульсна характеристика визначена лише в точках, які відповідають вузлам регулярної сітки з кроком Δ . Відповідно система рівнянь (22) у цьому випадку набуває скінченновимірної форми:

$$z_{\ell,m}^2 = \sum_{n=1}^{\ell} c_n z_{m+n,\ell-n}^1, \quad z_{\ell,m}^1 = c_{\ell} + \sum_{n=1}^{\ell} c_n z_{m+n,\ell-n}^2, \quad (25)$$

де $\ell, m \in \mathbb{Z}$ – цілі числа, а $z_{\ell,m}^1$ та $z_{\ell,m}^2$ – елементи скінченновимірних матриць.

Особливістю такого підходу та важливою його відмінністю від класичного методу дискретизації інтегральних рівнянь при переході від (22) до (25) є залежність між шуканим дискретним потенціалом системи Захарова – Шабата та кусково-сталою діелектричною проникністю. У роботі [9] встановлено, що значення діелектричної проникності в околі розривів у вузлах регулярної сітки можна визначити з розв'язку системи (25) за допомогою формули

$$\varepsilon(t_j + 0) = \varepsilon(t_j - 0) \left(\frac{1 + z_{2j,0}^1}{1 - z_{2j,0}^1} \right)^2. \quad (26)$$

Як бачимо, такий розв'язок не впливає безпосередньо з тотожності (23).

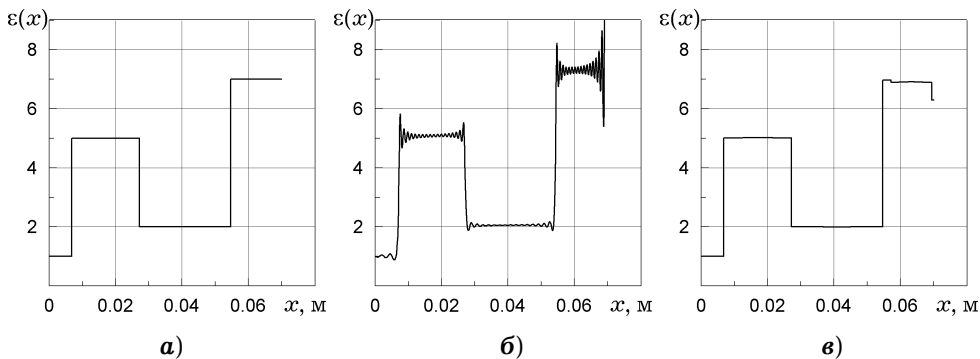


Рис. 2. Функція діелектричної проникності: а) – оригінал; б) – розв'язок оберненої задачі методом інтегральних рівнянь; в) – розв'язок дискретної оберненої задачі.

Описані неперервний і дискретний підходи до наближеного визначення діелектричної проникності за імпульсною характеристикою реалізовано чисельно. Для порівняння з точним розв'язком результати реконструкції подано на рис. 2. На рис. 2б зображено розв'язок, який отримано з використанням неперервного підходу (22) та (23). При цьому вихідні дані – значення коефіцієнта відбиття $\tilde{L}(\omega)$, задано у діапазоні ω від 0 до $2\pi \cdot 6 \cdot 10^{10}$ рад/с для дискретних значень з кроком $2\pi \cdot 1 \cdot 10^7$ рад/с. На відміну від неперервного підходу, дискретний випадок дозволяє знаходити розв'язок без низькочастотної складової коефіцієнта відбиття, що є більш прийнятним з точки зору практичного застосування. Так, на рис. 2в подано розв'язок дискретної оберненої задачі (25) для вихідних даних, заданих дискретно в діапазоні частот ω від $2\pi \cdot 2 \cdot 10^{10}$ до $2\pi \cdot 6 \cdot 10^{10}$ рад/с з кроком $5\pi \cdot 10^7$ рад/с.

Висновок. Аналіз прямої задачі розсіювання плоскої електромагнітної хвилі на шаруватій діелектричній структурі з ідеально провідним шаром в основі показав, що обернену задачу для встановлення параметрів такого діелектрика за частотною залежністю коефіцієнта відбиття можна звести до стандартної одновимірної оберненої задачі розсіювання. Для цього математично обґрунтовано підхід до визначення інтервалу часу розповсюдження електромагнітної хвилі у шаруватому діелектрику без втрат. Визначену на цьому інтервалі імпульсну характеристику досліджуваної структури –

значення перетворення Фур'є від коефіцієнта відбиття, можна вважати достатніми даними для розв'язання оберненої задачі. Для підтвердження достовірності теоретичних положень цю ж обернену задачу чисельно розв'язано методом інтегральних рівнянь Захарова – Шабата та його дискретним варіантом, які розвинуті в теорії обернених задач розсіювання. Отримані розв'язки є наближеними, оскільки за вихідні дані вибрано різні апроксимації імпульсної характеристики, які обчислено, виходячи з дискретно заданих комплексних значень коефіцієнта відбиття на обмеженому діапазоні частот.

1. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1951. – **15**, № 4. – С. 309–360.
2. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки в одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // Журн. exper. и теорет. физики. – 1971. – **61**, вып. 1. – С. 118–134.
Te same: Zakharov V. E., Shabat A. B. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of wave in nonlinear media // J. Exp. Theor. Phys. – 1972. – **34**, No. 1. – P. 62–69.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1973. – 749 с.
4. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 332 с.
5. Назарчук З. Т., Синявський А. Т. Апроксимація розв'язку оберненої задачі розсіювання електромагнітних хвиль на плоских діелектриках // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 1. – С. 7–17.
Te same: Nazarchuk Z. T., Synyavskiy A. T. Approximation of the solution of inverse problem of scattering of electromagnetic waves on plane dielectrics // Mater. Sci. – 2011. – **47**, No. 1. – С. 1–13.
6. Назарчук З. Т., Синявський А. Т. Визначення характеристик шаруватої структури за реконструйованою з коефіцієнтів відбиття матрицею розсіювання // Радиофизика и радиоастрономия. – 2010. – **15**, № 3. – С. 295–313.
Te same: Nazarchuk Z. T., Synyavskiy A. T. Determination of multilayer structure parameters by means of reconstruction of scattering matrix from known reflection coefficients // Radio Phys. and Radio Astron. – 2010. – **15**, No. 3. – С. 295–313.
7. Синявський А. Т., Шахін М. Високороздільне відновлення розривів функції діелектричної проникності за вимірюваннями коефіцієнта відбиття в обмеженому спектральному діапазоні // Відбір і обробка інформації. – 2008. – Вип. 29(105). – С. 10–20.
8. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems // Stud. Appl. Math. – 1974. – **53**, No. 4. – P. 249–315.
9. Albeverio S., Hryniv R., Mykytyuk Ya. Inverse scattering for discontinuous impedance Schrödinger operators: a model example // J. Phys. A: Math. Theor. – 2011. – **44**, No. 34. – doi:10.1088/1751-8113/44/34/345204. – 8 pp.
10. Burridge R. The Gelfand–Levitan, the Marchenko, and the Gopinath–Sondhi integral equations of inverse scattering theory, regarded in the context of inverse impulse-response problems // Wave Motion. – 1980. – **2**, No. 4. – P. 305–323.
11. Gilbert R. P., Hackl K., Xu Y. Inverse problem for wave propagation in a perturbed layered half-space // Math. Comput. Model. – 2007. – **45**, No. 1-2. – P. 21–33.
12. Gladwell G. M. L. Inverse problems in scattering: An introduction. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 380 p.
13. Jaulent M. The inverse scattering problem for LCRG transmission lines // J. Math. Phys. – 1982. – **23**, No. 12. – P. 2286–2290.
14. Kay S. M. Fundamentals of statistical signal processing. Estimation theory. – Prentice Hall, 1993. – 595 p.
15. Khruslov E. Ya., Shepelsky D. G. Inverse scattering method in electromagnetic sounding theory // Inverse Probl. – 1994. – **10**, No. 1. – P. 1–37.
16. Newton R. G. Inversion of reflection data for layered media: a review of exact methods // Geophys. J. Roy. Astr. Soc. – 1981. – **65**, No. 1. – P. 191–215.

17. Pike R., Sabatier P. Scattering and inverse scattering in pure and applied science. – San Diego: Acad. Press, 2002. – 1831 p.
18. Solimene R, Barresi R, Leone G. Localizing a buried planar perfect electric conducting interface by multi-view data // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2008. – **10**, No. 1. – P. 1–11.
19. Stoica P., Moses R. Spectral analysis of signals. – Prentice Hall, 2005. – 480 p.
20. Zhang H., Tan S. Y., Tan H. S. An improved method for microwave nondestructive dielectric measurement of layered media // Prog. Electromagn. Res. B. – 2008. – **10**. – P. 145–161.

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
РАССЕИВАНИЯ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ
С ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ОСНОВОЙ**

Предложен подход к нахождению приближенного решения обратной задачи рассеивания плоской электромагнитной волны на плоской слоистой диэлектрической структуре с идеально проводящей подложкой в основе. Показано, что такая обратная задача является идентичной обратной задаче для чисто диэлектрической структуры, если в качестве исходных данных выбрать значения импульсной характеристики на интервале времени, в течение которого фронт волны распространяется в диэлектрике и не подвергается влиянию идеально проводящей основы. Параметры аппроксимационных моделей импульсной характеристики определены методами спектрального анализа по заданным в ограниченном частотном диапазоне значениям коэффициента отражения.

**APPROXIMATE SOLUTION OF AN INVERSE
SCATTERING PROBLEM FOR A PLAIN DIELECTRIC STRUCTURE
WITH PERFECTLY CONDUCTING BASE**

An approach to define an approximate solution of inverse scattering problem is proposed for plane electromagnetic wave incidence on a plane layered dielectric with the perfectly conducting substrate at the base. It is shown that the inverse scattering problem is identical to the one for pure dielectric layered structure when the values of impulse response over a limited interval are taken as initial data. This interval corresponds to time of plane wave propagation in dielectric media without interaction with the perfectly conducting substrate. Parameters of approximated models of the impulse response are estimated applying spectral analysis techniques to reflection coefficient, which is defined in a limited frequency range.

Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка
НАН України, Львів

Одержано
30.06.11