УДК 517.958:532.72

О. Ю. Чернуха, П. Р. Пелех

СТАЦІОНАРНІ ПРОЦЕСИ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ТІЛАХ ВИПАДКОВО НЕОДНОРІДНОЇ СТРУКТУРИ

Робота присвячена математичному моделюванню стаціонарних процесів теплопровідності у випадково неоднорідних багатофазних структурах. Крайовій задачі теплопровідності поставлено у відповідність інтегро-диференціальне рівняння з випадковим ядром, розв'язок якого побудовано у вигляді ряду Неймана. Встановлено умови абсолютної і рівномірної збіжності ряду, зокрема, умову обмеженості об'єму тіла. Показано, що для необмежених тіл для збіжності ряду Неймана необхідною є умова обмеженості області, яку займають включення.

Стохастичний характер теплових полів, як правило, спричинений недостатньою інформацією про неоднорідну внутрішню структуру середовища [14]. При дослідженні температурних полів у випадково неоднорідних тілах, в основному, розробляють методи, які в тій чи іншій формі використовують умову ергодичності (або квазіергодичності, коли поля є ергодичними лише в об'ємах, малих порівняно з характерними масштабами змін статистичних характеристик поля) досліджуваних процесів [3, 8], при постановці крайових задач записують рівняння, отримання яких вимагає введення фізично малого репрезентативного елемента тіла, що, у свою чергу, накладає обмеження на відповідні випадкові поля. Наприклад, при розробці методів гомогенізації гетерогенного середовища [15, 17, 18] у багатьох випадках використовують перехід від усереднення за ансамблем конфігурацій фаз до усереднення за об'ємом тіла. При цьому накладаються умови малості розмірів включень тільки окремих фаз [2, 10, 11], що часто є недостатнім. У праці [16] використано мікро-макро підхід до опису фізичних процесів, для чого накладено обмеження можливості опису для цього гетерогенного матеріалу еквівалентним гомогенним середовищем. Мікро-макро підхід реалізується шляхом розгляду множини функцій, параметризованих певним масштабним параметром, який відповідає типовому розміру пор. Макроскопічний опис отримано через означення границі при спрямуванні цього параметра до нуля і встановленням диференціальних рівнянь, які задовольняють таку границю.

У статтях [12, 13] досліджувались нестаціонарні процеси теплопровідності у випадково неоднорідних тілах. Випадкове поле температури знайдено у вигляді інтегрального ряду Неймана і доведено теорему про абсолютну та рівномірну його збіжності за умов обмеженості всіх коефіцієнтів. Проте при такому поданні розв'язку не існує граничного переходу до стаціонарного випадку. Тому у цій роботі в стаціонарному режимі досліджується процес теплопровідності у випадково неоднорідних тілах, коли джерела тепла описуються детермінованою функцією, а структура тіла є стохастичною. Встановлюються умови збіжності ряду Неймана для поля температури у стаціонарному випадку.

Об'єкт дослідження. Постановка задачі. Нехай в багатофазному тілі з випадково розташованими неоднорідностями (див. рис. 1) протікають процеси теплопровідності.

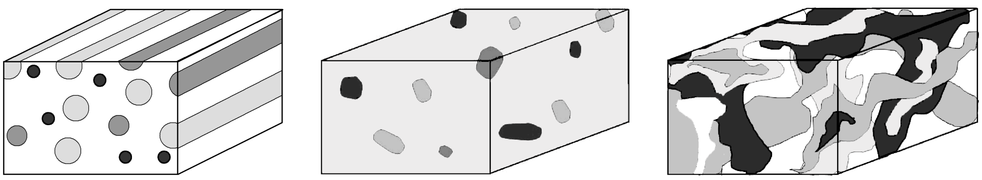

Рис. 1

Тіло складається з N твердих різних за густиною фаз (матриці та включень), у яких теплофізичні властивості можуть істотно відрізнятися. При цьому точна геометрична конфігурація фаз в області тіла невідома. Матеріал тіла розглядаємо як середовище, фізичні характеристики якого є випадковими функціями координат простору. Розподіл випадкового температурного поля $T(\mathbf{r})$ в такому тілі у стаціонарному випадку описує рівняння теплопровідності [7]

$$L(\mathbf{r})T(\mathbf{r}) \equiv \nabla\big(\lambda(\mathbf{r})\nabla T(\mathbf{r})\big) = f(\mathbf{r}), \tag{1}$$

де $L(\mathbf{r})$ – випадковий оператор рівняння теплопровідності; $\mathbf{r}$ – радіус-вектор біжучої точки, $\mathbf{r} = (x, y, z)$; $T(\mathbf{r})$ – випадкове поле температури у стаціонарному випадку; ∇ – оператор Гамільтона; $\lambda(\mathbf{r})$ – випадковий коефіцієнт теплопровідності; $f(\mathbf{r})$ – густина джерел тепла (детермінована функція).

Нехай на поле температури $T(\mathbf{r})$ накладено детерміновані крайові умови. Наприклад, якщо задано умови I-го роду, тоді маємо

$$T(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}\in(\partial V)} = T_*(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}\in(\partial V)}, \tag{2}$$

де T_* – відома функція, (∂V) – границя тіла (V).

Інтегро-диференціальні рівняння, еквівалентні крайовій задачі. Введемо у розгляд випадкову функцію $\eta_{ij}(\mathbf{r})$ типу одиничної східчастої функції Гевісайда [8, 9], яка визначає конфігурацію (розташування) фаз в області тіла та означена таким чином:

$$\eta_{ij}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in (V_i^{(j)}), \\ 0, & \mathbf{r} \notin (V_i^{(j)}), \end{cases} \qquad \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_j} \eta_{ij}(\mathbf{r}) = 1, \tag{3}$$

де $(V_i^{(j)})$ – однозв'язна область з об'ємом $V_i^{(j)}$, яка займає i-те включення j-ї фази; i – номер включення (в рамках однієї фази), $i = 1, \ldots, n_j$; n_j – кількість включень сорту j, де j – номер фази, $j = 1, \ldots, N$.

Зазначимо, що в одновимірному випадку (шарувате тіло) функція η_{ij} є різницею двох випадкових одиничних функцій Гевісайда. Друга умова зі співвідношень (3) означає, що в будь якій точці тіла знаходиться якась фаза, тобто це є умова суцільності тіла.

Тоді випадковий коефіцієнт теплопровідності через функцію $\eta_{ij}(\mathbf{r})$ можна подати так:

$$\lambda(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_j} \lambda_j \eta_{ij}(\mathbf{r}), \tag{4}$$

де $\lambda_j \equiv \mathrm{const}$ для $\forall j$. Зазначимо, що індекс j при коефіцієнтах λ_j рівняння (4) позначає відповідні значення коефіцієнта теплопровідності j-ї фази. Тобто тут прийнято обмеження, що коефіцієнт теплопровідності є сталим в області кожної фази. Таке обмеження не є обов'язковим, проте спрощує подальші викладки. У загальному випадку співвідношення (4) має вигляд

$$\lambda(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_j} \lambda_{ij}(\mathbf{r})\eta_{ij}(\mathbf{r}).$$

Підставимо подання коефіцієнтів (4) у рівняння (1) [1]:

$$L(\mathbf{r})T(\mathbf{r}) \equiv \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_j}\left\{\lambda_j \eta_{ij}(\mathbf{r})\Delta T(\mathbf{r}) - [\![\lambda(\mathbf{r})]\!]_{\Gamma_{ij}}\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\Gamma_{ij}})\nabla T(\mathbf{r})\right\} = f(\mathbf{r}), \tag{5}$$

де $[\lambda(\mathbf{r})]_{\Gamma_{ij}}$ – вектор-функція стрибка коефіцієнта теплопровідності на міжфазних границях; $\mathbf{r}_{\Gamma_{ij}}$ – радіус-вектор точок міжфазної границі; Γ_{ij} – границя i-ї однозв'язної області j-ї фази; Δ – оператор Лапласа.

У рівнянні (5) додамо і віднімемо невипадковий оператор стаціонарної теплопровідності $\bar{L}(\mathbf{r}) = \bar{\lambda}\Delta$. Тут $\bar{\lambda} = \overline{\lambda(\mathbf{r})}$ – усереднений за ансамблем реалізацій структури тіла коефіцієнт теплопровідності (у випадку рівномірного розподілу фаз співпадає із середнім за об'ємом тіла). Тоді з урахуванням другого зі співвідношень (3) перетворене рівняння набуде вигляду

$$\bar{L}(\mathbf{r})T(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = \left(\bar{L}(\mathbf{r}) - L(\mathbf{r})\right)T(\mathbf{r}). \tag{6}$$

Розв'язок крайової задачі (6), (2) шукатимемо у вигляді нескінченного інтегрального ряду Неймана [5]. Вважаємо праву частину рівняння (6) джерелом, тобто неоднорідність середовища розглядаємо як внутрішні джерела для процесу теплопровідності у випадково неоднорідному N-фазному тілі. Тоді розв'язок неоднорідної крайової задачі можна подати у вигляді

$$T(\mathbf{r}) = T_0(\mathbf{r}) + \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')L_s(\mathbf{r}')T(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}', \tag{7}$$

де $T_0(\mathbf{r})$ – розв'язок «однорідної» задачі

$$\bar{L}(\mathbf{r})T_0(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = 0,$$

$$T_0(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}\in(\partial V)} = T_*(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}\in(\partial V)}, \tag{8}$$

$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ – функція Ґріна задачі (6), (2) (детермінована функція), тобто $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ є розв'язком такої крайової задачі:

$$\bar{L}(\mathbf{r})G(\mathbf{r},\mathbf{r}') - f(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\big|_{\mathbf{r}\in(\partial V)} = 0, \tag{9}$$

$L_s(\mathbf{r})$ – випадковий оператор вигляду

$$L_s(\mathbf{r}) \equiv \bar{L}(\mathbf{r}) - L(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_j}(\bar{\lambda}-\lambda_j)\eta_{ij}(\mathbf{r})\Delta + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n_j}[\lambda(\mathbf{r})]_{\Gamma_{ij}}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\Gamma_{ij}})\nabla. \tag{10}$$

Таким чином, вихідну крайову задачу (1), (2) зведено до еквівалентного їй інтегро-диференціального рівняння (7). Зауважимо, що рівняння (7) є рівнянням Гаммерштейна [5] з випадковим ядром.

Рівняння (6) можна записати у вигляді

$$\bar{L}(\mathbf{r})T(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) + \left(\bar{L}(\mathbf{r}) - L(\mathbf{r})\right)T(\mathbf{r}).$$

Тоді інтегро-диференціальне рівняння (7) набуде вигляду

$$\begin{aligned} T(\mathbf{r}) &= \tilde{T}_0(\mathbf{r}) + \int\limits_{(V)} \tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\left[f(\mathbf{r}') + \left(\bar{L}(\mathbf{r}') - L(\mathbf{r}')\right)T(\mathbf{r}')\right]d\mathbf{r}' = \\ &= \tilde{T}_0(\mathbf{r}) + \int\limits_{(V)} \tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' + \\ &+ \int\limits_{(V)} \tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\left(\bar{L}(\mathbf{r}') - L(\mathbf{r}')\right)T(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'. \end{aligned} \tag{7′}$$

Тут $\tilde{T}_0(\mathbf{r})$ є розв'язком такої однорідної крайової задачі:

$$\bar{L}(\mathbf{r})\tilde{T}_0(\mathbf{r}) = 0,$$

$$\tilde{T}_0(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}\in(\partial V)} = \tilde{T}_*(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}\in(\partial V)}. \tag{8′}$$

Детермінована функція Ґріна $\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ повинна задовольняти наступні рівняння і нульові крайові умови:

$$\bar{L}(\mathbf{r})\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$

$$\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\Big|_{\mathbf{r}\in(\partial V)} = 0.$$

Зауважимо, що перші два доданки правої частини рівняння (7′) є детерміновані, а третій − випадковий.

Розв'язок інтегро-диференціального рівняння (7) будуємо методом послідовних наближень [5], вибираючи за нульове наближення розв'язок $T_0(\mathbf{r})$ задачі (8). Тоді отримаємо рекурентні співвідношення для послідовних наближень:

$$T^{(0)}(\mathbf{r}) = T_0(\mathbf{r}),$$

$$T^{(1)}(\mathbf{r}) = T_0(\mathbf{r}) + \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')L_s(\mathbf{r}')T^{(0)}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}',$$

$$T^{(2)}(\mathbf{r}) = T_0(\mathbf{r}) + \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')L_s(\mathbf{r}')T^{(1)}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$T^{(n)}(\mathbf{r}) = T_0(\mathbf{r}) + \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')L_s(\mathbf{r}')T^{(n-1)}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

У побудованій послідовності функцій $T^{(0)}(\mathbf{r})$, $T^{(1)}(\mathbf{r})$, …, $T^{(n)}(\mathbf{r})$, … загальний член можна подати так:

$$T^{(n)}(\mathbf{r}) = T_0(\mathbf{r}) + \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')L_s(\mathbf{r}')T_0(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' + \ldots +$$
$$+ \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')L_s(\mathbf{r}') \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')L_s(\mathbf{r}'')\ldots L_s(\mathbf{r}^{(n-2)}) \times$$
$$\times \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r}^{(n-2)},\mathbf{r}^{(n-1)})L_s(\mathbf{r}^{(n-1)})T_0(\mathbf{r}^{(n-1)})\,d\mathbf{r}^{(n-1)}\ldots d\mathbf{r}' + R_n(\mathbf{r}),$$

де різниця $R_n(\mathbf{r})$ між n-м та $(n-1)$-м членами, $n = 1,2\ldots$, має вигляд

$$R_n(\mathbf{r}) = \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')L_s(\mathbf{r}') \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')L_s(\mathbf{r}'')\ldots L_s(\mathbf{r}^{(n-1)}) \times$$
$$\times \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r}^{(n-1)},\mathbf{r}^{(n)})L_s(\mathbf{r}^{(n)})T_0(\mathbf{r}^{(n)})\,d\mathbf{r}^{(n)}\ldots d\mathbf{r}''\,d\mathbf{r}'. \tag{11}$$

Побудованій послідовності функцій $\{T^{(n)}(\mathbf{r})\}$ ставимо у відповідність ряд

$$T(\mathbf{r}) = T_0(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\mathbf{r}), \tag{12}$$

який є рядом Неймана [4, 5].

Теорема 1. *Якщо дія оператора* $L_s(\mathbf{r})$ *на функцію Ґріна* $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ *і поле температури в однорідному середовищі є обмеженою, то ряд Неймана* (12) *є абсолютно і рівномірно збіжним.*

Д о в е д е н н я. Обмеженість дії оператора L_s на функцію Ґріна та поле температури в однорідному тілі означає, що існують такі константи $C_1 \ge 0$ і $C_2 \ge 0$, що

$$|L_s(\mathbf{r})G(\mathbf{r},\mathbf{r}')| \le C_1 \equiv \text{const}\,,$$

$$|L_s(\mathbf{r})T_0(\mathbf{r})| \le C_2 \equiv \text{const}\,. \tag{13}$$

З урахуванням другої з нерівностей (13) для $R_n(\mathbf{r})$ одержимо

$$R_n(\mathbf{r}) = C_2 \left| \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')L_s(\mathbf{r}') \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')L_s(\mathbf{r}'')\ldots L_s(\mathbf{r}^{(n-1)}) \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r}^{(n-1)},\mathbf{r}^{(n)})\,d\mathbf{r}^{(n)}\ldots d\mathbf{r}''\,d\mathbf{r}' \right|.$$

Внесемо оператор $L_s(\mathbf{r}^{(n-1)})$ під знак останнього інтеграла за $d\mathbf{r}^{(n)}$, розглядаючи змінну $\mathbf{r}^{(n-1)}$ як параметр, і скористаємось першою із нерівностей (13). Тоді отримаємо [6]

$$|R_n| \le C_1C_2 \left| \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')L_s(\mathbf{r}') \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r}'\mathbf{r}'')L_s(\mathbf{r}'')\ldots L_s(\mathbf{r}^{(n-2)}) \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r}^{(n-2)},\mathbf{r}^{(n-1)}) \left\{ \int\limits_{(V)} d\mathbf{r}^{(n)} \right\} d\mathbf{r}^{(n-1)}\ldots d\mathbf{r}''\,d\mathbf{r}' \right| =$$

$$= C_1C_2V \left| \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')L_s(\mathbf{r}') \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')L_s(\mathbf{r}'')\ldots L_s(\mathbf{r}^{(n-2)}) \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r}^{(n-2)},\mathbf{r}^{(n-1)})\,d\mathbf{r}^{(n-1)}\ldots d\mathbf{r}''\,d\mathbf{r}' \right|.$$

Послідовно застосовуючи першу із нерівностей (13), на $(n-1)$-му кроці отримаємо

$$|R_n| \le C_1^{n-1}C_2V^{n-1} \left| \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,d\mathbf{r} \right|.$$

Якщо тіло має скінченні розміри і $V < \infty$, то функція, визначена та неперервна або кусково-неперервна в (V) зі скінченною множиною точок розриву, є інтегровною в цій області [6]. А якщо функція інтегровна у деякій області (V), то вона обмежена в цій області [6], тобто існує $C = \text{const}$, що

$$\left| \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' \right| \le |CV|.$$

Тоді

$$|R_n| \le CC_1^{n-1}C_2V^n\,. \tag{14}$$

Для того щоб мажорантний ряд (14) з додатним загальним членом був збіжним при $n \to \infty$ для довільних значень C, C_1, C_2, необхідно і достатньо за ознакою Даламбера [4]:

$$\frac{|R_{n+1}|}{|R_n|} \le \frac{C_1^nC_2V^{n+1}}{C_1^{n-1}C_2V^n} = C_1V < 1\,,$$

щоб виконувалась умова

$$C_1V < 1 \quad \Rightarrow \quad V < \frac{1}{C_1}\,. \tag{14'}$$

Зауважимо, що застосування «радикальної» ознаки Коші [4] приводить до тієї ж нерівності (14′).

Оскільки константа C_1 обмежує функцію $\left|L_s(\mathbf{r})G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right|$ в області (V), то

$$C_1 = \sup_{\mathbf{r},\mathbf{r}'\in(V)} \left|L_s(\mathbf{r})G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right|,$$

звідки відповідно маємо

$$\frac{1}{C_1} = \inf_{\mathbf{r},\mathbf{r}'\in(V)} \frac{1}{\left|L_s(\mathbf{r})G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right|}.$$

Нерівність (14′) означає виконання умови

$$V < \inf_{\mathbf{r},\mathbf{r}'\in(V)} \left|L_s(\mathbf{r})G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\right|. \tag{15}$$

Тоді послідовність часткових сум ряду (11) $\{T^{(n)}(\mathbf{r})\}$ за ознакою Вейєрштрасса [6] є абсолютно і рівномірно збіжною при $n \to \infty$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} T^{(n)}(\mathbf{r}) = T(\mathbf{r}).$$

Таким чином, теорему доведено. ♦

Теорема 2. *Функція* $T(\mathbf{r}) = T_0(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\mathbf{r})$ *є розв'язком інтегро-диференціального рівняння* (7).

Д о в е д е н н я. Подіявши зліва оператором $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')L_s(\mathbf{r}')$ на обидві частини співвідношення (12) і проінтегрувавши почленно по всій області визначення (V), одержимо

$$\begin{aligned}
\int\limits_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')L_s(\mathbf{r}')T(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' = \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')L_s(\mathbf{r}')\Bigg[T_0(\mathbf{r}') &+ \\
+ \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')L_s(\mathbf{r}'')T_0(\mathbf{r}'')\,d\mathbf{r}'' &+ \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')L_s(\mathbf{r}'')\times \\
\times \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r}'',\mathbf{r}''')L_s(\mathbf{r}''')T_0(\mathbf{r}''')\,d\mathbf{r}'''\,d\mathbf{r}'' &+ \ldots\Bigg]d\mathbf{r}' = \\
= \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')L_s(\mathbf{r}')T_0(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}' &+ \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')L_s(\mathbf{r}')\times \\
\times \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')L_s(\mathbf{r}'')T_0(\mathbf{r}'')\,d\mathbf{r}''\,d\mathbf{r}' &+ \ldots = T(\mathbf{r}) - T_0(\mathbf{r}).
\end{aligned}$$

Таким чином показали, що функція $T(\mathbf{r})$ у вигляді ряду (12) задовольняє інтегро-диференціальне рівняння (7). Теорему 2 доведено. ♦

Зауваження 1. За теоремою 1 ряд Неймана (12) є збіжним, якщо об'єм тіла випадково неоднорідної структури, в якому відбувається процес теплопровідності, є обмеженим. При цьому повинна виконуватись умова (15). Розглянемо випадок необмежених тіл (півпростір, простір, смуга тощо). Позначимо через $j = 1$ базову фазу. Тоді випадковий коефіцієнт теплопровідності $\lambda(\mathbf{r})$ у рівнянні (1) можна подати у вигляді

$$\lambda(\mathbf{r}) = \lambda_1(\mathbf{r}) + \tilde{\lambda}(\mathbf{r}),$$

де $\lambda_1(\mathbf{r})$ – коефіцієнт теплопровідності базової фази (матриці), $\tilde{\lambda}(\mathbf{r})$ – збурення коефіцієнта теплопровідності, випадкова величина.

Тоді рівняння (1) можна подати у вигляді

$$\nabla\big([\lambda_1(\mathbf{r}) + \tilde{\lambda}(\mathbf{r})]\nabla T(\mathbf{r})\big) = f(\mathbf{r}).$$

Якщо врахувати, що $\lambda_1(\mathbf{r}) = \lambda_1 \equiv \mathrm{const}$, одержимо

$$\lambda_1 \Delta T(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = \tilde{\lambda}(\mathbf{r})\Delta T(\mathbf{r}) + \nabla\tilde{\lambda}(\mathbf{r})\nabla T(\mathbf{r}). \tag{16}$$

Розглядаючи праву частину рівняння (16) як джерело, з урахуванням крайових умов отримаємо таке інтегро-диференціальне рівняння для температурного поля:

$$T(\mathbf{r}) = T_0(\mathbf{r}) + \int\limits_{(V)} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\tilde{L}_s(\mathbf{r}')T(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}', \tag{17}$$

де $T_0(\mathbf{r})$ – розв'язок такої «однорідної» задачі:

$$\lambda_1 \Delta T_0(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = 0, \tag{18}$$

$$T_0(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}\in(\partial V)} = T_*(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r}\in(\partial V)},$$

$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ – детермінована функція Ґріна, яка є розв'язком задачі з точковим джерелом:

$$\lambda_1 \Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}') - f(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\big|_{\mathbf{r}\in(\partial V)} = 0, \tag{19}$$

а $\tilde{L}_s(\mathbf{r}')$ – випадковий оператор вигляду

$$\tilde{L}_s(\mathbf{r}') = \tilde{\lambda}(\mathbf{r}')\Delta_{\mathbf{r}'} + \nabla\tilde{\lambda}(\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}'}. \tag{20}$$

Оператор (20) відмінний від нуля тоді й тільки тоді, коли $\tilde{\lambda}(\mathbf{r}) \neq 0$ або $\nabla\tilde{\lambda}(\mathbf{r}) \neq 0$. За означенням $\tilde{\lambda}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r}\in(V_1), \\ \neq 0, & \mathbf{r}\in(V_j),\ j = 2,\dots,N, \end{cases}$ тобто збурення $\tilde{\lambda}(\mathbf{r})$ є ненульовими тільки в області включень. Оскільки приймаємо, що коефіцієнт теплопровідності є сталим в межах кожної однозв'язної області, то $\nabla\tilde{\lambda}(\mathbf{r}) \neq 0$ тільки на міжфазних границях, які можна розглядати як границі включень. Отже, оператор $\tilde{L}_s(\mathbf{r}) \neq 0$ для $\mathbf{r}\in(V_j)\cup(\partial V_j)$, $j = 2,\dots,N$.

Тоді рівняння (17) можна подати таким чином:

$$T(\mathbf{r}) = T_0(\mathbf{r}) + \int\limits_{\bigcup_{j=2}^{N}\{(V_j)\cup(\partial V_j)\}} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\tilde{L}_s(\mathbf{r}')T(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'. \tag{21}$$

За теоремою 1 ряд Неймана, побудований ітеруванням рівняння (21), буде абсолютно й рівномірно збіжним, якщо область, яку займають включення з урахуванням міжфазних границь, тобто $\bigcup_{j=2}^{N}\{(V_j)\cup(\partial V_j)\}$, є обмеженою, а її об'єм задовольняє умову (15).

Зауваження 2. Взагалі кажучи, інтегро-диференціальне рівняння, еквівалентне вихідній крайовій задачі, і відповідний ряд Неймана можна будувати у вигляді (17). У цьому випадку будуть справджуватись як теореми 1 і 2, так і всі викладки, які базуються на побудові ряду Неймана. Проте подання коефіцієнта теплопровідності через його середнє значення не вимагає виділення базової фази, а також може значно покращити збіжність ряду Неймана.

Зауваження 3. Якщо не виконується умова сталості коефіцієнта теплопровідності в межах фази, то це приводить до ускладнення операторів рівнянь (18) і (19):

$$\lambda_1(\mathbf{r})\Delta T_0(\mathbf{r}) + \nabla\lambda_1(\mathbf{r})\nabla T_0(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = 0\,,$$

$$\lambda_1(\mathbf{r})\Delta_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \nabla\lambda_1(\mathbf{r}')\nabla_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r},\mathbf{r}') - f(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,,$$

тут $\lambda_1(\mathbf{r})$ – відома детермінована функція.

У цьому випадку $\bar{\lambda}$ може бути як константою, так і функцією просторових координат, залежно від процедури (способу) усереднення.

Висновки. Отже, розглянуто математичне моделювання стаціонарних процесів теплопровідності в тілах випадково неоднорідної структури. Крайовій задачі поставлено у відповідність еквівалентне інтегро-диференціальне рівняння, розв'язок якого побудовано ітеруванням у вигляді ряду Неймана. Встановлено умови і доведено теорему про абсолютну і рівномірну збіжність цього ряду. На відміну від нестаціонарного випадку, коли для збіжності ряду Неймана для випадкового поля температури достатньо умови обмеженості теплофізичних коефіцієнтів фаз та відмінності від нуля параметрів матриці, для стаціонарної теплопровідності необхідна додаткова умова на обмеженість об'єму тіла або обмеженість об'єму, які займають включення. Також сформульовано і доведено теорему існування розв'язку інтегро-диференціального рівняння.

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1976. – 527 с.
2. *Гамбин Б., Назаренко Л. В., Телега Е.* Стохастическая гомогенизация уравнений стационарной термоупругости // Доп. НАН України. – 2002. – № 10. – С. 37–44.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – Москва: Наука, 1977. – 568 с.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1984. – 831 с.
5. *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1975. – 300 с.
6. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа: В 2 т. – Москва: Высш. шк., 1981. – Т. 1. – 576 с.; Т. 2. – 584 с.
7. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 599 с.
8. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. – Ч. II. Случайные поля. – Москва: Наука, 1978. – 436 с.
9. *Справочник* по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
10. *Хорошун Л. П.* Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных тел // Прикл. механика. – 1978. – **14**, № 2. – С. 3–17.

    Те саме: *Khoroshun L. P.* Methods of theory of random functions in problems of macroscopic properties of microinhomogeneous media // Int. Appl. Mech. – 1978. – **14**, No. 2. – P. 113–124.
11. *Хорошун Л. П., Солтанов Н. С.* Термоупругость двухкомпонентных смесей. – Киев: Наук. думка, 1984. – 112 с.
12. *Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю., Пелех П. Р.* Математичне моделювання процесів теплопровідності у випадково неоднорідних тілах з використанням діаграм Фейнмана // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 1. – С. 178–184.

    Те саме: *Chaplya E. Ya., Chernukha O. Yu., Pelekh P. R.* Mathematical modeling of heat-conduction processes in randomly inhomogeneous bodies using Feynman diagrams // J. Math. Sci. – 2009. – **160**, No. 4. – P. 503–510.
13. *Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю., Пелех П. Р.* Нелокальне рівняння теплопровідності для багатофазних стохастично неоднорідних тіл // Доп. НАН України. – 2007. – № 7. – С. 49–54.
14. *Fu W. S., Wang K.-N., Ke W.-W.* Heat transfer of porous medium with random porosity model in a laminar channel flow // J. Chinese Inst. Engrs. – 2001. – **24**, No. 4. – P. 431–438.

15. *Heida M.* Stochastic homogenization of heat transfer in polycrystals with nonlinear contact conductivities // Appl. Anal. – 2011. – P. 1–22.
16. *Lidzba D.* Homogenisation theories applied to porous media mechanics // J. Theor. Appl. Mech. – 1998. – **36**, No. 3. – P. 657–679.
17. *Pieper M., Klein P.* Application of simple, periodic homogenization techniques of non-linear heat conduction problems in non-periodic, porous media // Heat Mass Transfer. – 2012. – **48**. – P. 291–300.
18. *Qi C., Wu J.* Stochastic heat transfer equation and its application in the permafrost region // Heat Transfer Res. – 2011. – **42**, No. 5. – P. 433–449.

СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ТЕЛАХ СЛУЧАЙНО НЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРЫ

Работа посвящена математическому моделированию стационарных процессов теплопроводности в случайно неоднородных многофазных структурах. Краевой задаче теплопроводности поставлено в соответствие интегро-дифференциальное уравнение со случайным ядром, решение которого построено в виде ряда Неймана. Установлены условия абсолютной и равномерной сходимости ряда, в частности, условие ограниченности объема тела. Показано, что для неограниченных тел для сходимости ряда Неймана необходимо условие ограниченности области, которую занимают включения.

STATIONARY PROCESSES OF HEAT CONDUCTION IN BODIES OF RANDOMLY INHOMOGENEOUS STRUCTURE

The work is devoted to mathematical modeling of stationary processes of heat conduction in randomly inhomogeneous multiphase structures. An integro-differential equation with random kernel, which solution is constructed in terms of Neumann series, is obtained in accordance with the boundary value problem of heat conduction. The conditions of absolute and uniform convergence of the series are established, in particular, the condition of boundedness of the body volume. It is shown that the condition of boundedness of the inclusion volume is necessary for convergence of the Neumann series for unbounded bodies.

Центр мат. моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.06.11