УДК 517.95+511.2

Б. Й. Пташник, І. Р. Тимків

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБЛАСТІ

Досліджено коректність задачі з багатоточковими умовами за часовою змінною та умовами типу Діріхле за просторовими координатами для одного класу параболічних за Петровським рівнянь зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами в обмеженій циліндричній області. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі. Доведено метричну теорему про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку.

1. Вступ. Задачі з багатоточковими умовами за часовою змінною і умовами періодичності або умовами типу Діріхле за просторовими координатами для рівнянь із частинними похідними є, взагалі, некоректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників.

Для гіперболічних і безтипних рівнянь такі задачі досліджено, наприклад, у роботах [1, 7, 8], для псевдодиференціальних рівнянь – у працях [11, 18]. Локальні багатоточкові задачі для деяких класів параболічних рівнянь високого порядку зі сталими та змінними коефіцієнтами вивчались у працях [9, 12]. Розв'язність нелокальних багатоточкових задач для параболічних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами вивчено у роботах [10, 17], для систем параболічних рівнянь – у праці [4], а для одного класу псевдопараболічних рівнянь третього порядку – в роботі [6].

У цій статті, яка є розвитком праці [9], в обмеженій циліндричній області досліджено коректну розв'язність задачі з локальними багатоточковими умовами за часом і умовами типу Діріхле за просторовими координатами для параболічного за Петровським рівняння зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами.

Надалі використовуватимемо такі позначення: $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$; $D = \{(t,x) : t \in (0,T),\ x \in Q \subset \mathbb{R}^p\}$, де Q – обмежена однозв'язна область з гладкою межею ∂Q; $\Gamma = \partial Q \times [0,T]$; $S = \{\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [0,T]^n : 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le T\}$; $C^{j,\sigma}$, $0 < \sigma < 1$, – клас функцій $w(x)$, визначених і неперервних разом із похідними j-го порядку в області $\bar{Q}$, j-ті похідні яких задовольняють в $\bar{Q}$ умову Гельдера з показником σ; $A^{j,\sigma}$ – клас замкнених областей $\bar{Q}$, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей, належать до класу $C^{j,\sigma}$; $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} B$ – міра Лебеґа в $\mathbb{R}^n$ множини $B \subset \mathbb{R}^n$.

2. Постановка задачі. В області D розглянемо задачу

$$\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{r=0}^{n-1} A_r \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^r L^{b(n-r)/2} u(t,x) = f(t,x), \qquad (t,x) \in D, \tag{1}$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} a_m \frac{\partial^m u(t_j,x)}{\partial t^m} = \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, n, \quad 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le T, \quad x \in \bar{Q}, \tag{2}$$

$$L^m u(t,x)\big|_\Gamma = 0, \qquad m = 0, 1, \ldots, (bn/2 - 1), \tag{3}$$

де $A_r \in \mathbb{R}$, $A_0 \ne 0$; $a_m \in \mathbb{C}$, $a_{n-1} \ne 0$; $b \in \mathbb{N}$ – парне число;

$L := \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(h_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - q(x)$ – самоспряжений еліптичний в $\bar{Q}$ диференціальний вираз, тобто для всіх $x \in \bar{Q}$ $h_{ij}(x) = h_{ji}(x)$ і для довільного $\eta \in \mathbb{R}^p$

$$\sum_{i,j=1}^{p} h_{ij}(x)\eta_i\eta_j \ge \beta\sum_{i=1}^{p}\eta_i^2, \qquad \beta > 0; \tag{4}$$

$L^q u = L(L^{q-1}u)$, $q = 1,\ldots,bn/2$, $L^0 u = u$; $f(t,x) \in C([0,T]; L_2(Q))$; $\varphi_j(x) \in L_2(Q)$, $j = 1,\ldots,n$.

Припустимо, що $\partial Q \in A^{bn,\sigma}$, $h_{ij}(x) \in C^{bn-1,\sigma}$, $i,j \in \{1,\ldots,p\}$, $q(x) \in C^{bn-2,\sigma}$, $1 < \sigma < 1$, $q(x) \ge 0$. Тоді задача

$$LX(x) = -\lambda X(x), \qquad X(x)\big|_{\partial Q} = 0 \tag{5}$$

має повну ортонормовану в $L_2(\bar{Q})$ систему власних функцій $\{X_k(x), k \in \mathbb{N}\}$ і нескінченну множину відповідних власних значень $\Lambda = \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$, причому $X_k(x) \in C^{bn}(\bar{Q})$, $k \in \mathbb{N}$, і справджуються такі оцінки [3, 5]:

$$C_0 k^{2/p} \le \lambda_k \le C_1 k^{2/p}, \qquad 0 < C_0 < C_1, \qquad \lambda_k \in \Lambda, \tag{6}$$

$$\max_{x \in Q}\left|\frac{\partial^{|s|}X_k(x)}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}\right| \le C_2\lambda_k^{p/4+|s|/2}, \quad C_2 > 0, \quad |s| = 0,1,\ldots,bn, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Нехай рівняння (1) є рівномірно параболічним за Петровським в області D, тобто для довільного $\eta \in \mathbb{R}^p$ і для довільного $x \in Q$ корені ξ рівняння

$$\xi^n + \sum_{r=0}^{n-1} A_r\left(-\sum_{i,j=1}^{p} h_{ij}(x)\eta_i\eta_j\right)^{b(n-r)/2}\xi^r = 0 \tag{8}$$

задовольняють нерівності

$$\operatorname{Re}\xi_j(x,\eta) \le -\delta\|\eta\|^b, \qquad \delta > 0, \qquad j = 1,\ldots,n. \tag{9}$$

Позначимо через $E_{\alpha,\gamma}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, – простір визначених в $\bar{Q}$ функцій $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k X_k(x)$, для яких є скінченною норма

$$\|\varphi; E_{\alpha,\gamma}\| = \sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|\exp(\alpha\lambda_k^{\gamma}),$$

а через $C^q([0,T]; E_{\alpha,\gamma})$ – простір визначених в $\bar{D}$ функцій $v(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)X_k(x)$ таких, що для кожного $t \in [0,T]$ функції $\frac{\partial^j v(t,x)}{\partial t^j} \in E_{\alpha,\gamma}$, $j = 0,1,\ldots,q$, і є неперервними за t в нормі цього простору:

$$\|v; C^q([0,T]; E_{\alpha,\gamma})\| = \sum_{j=0}^{q}\sum_{k=1}^{\infty}\max_{0\le t\le T}\left|v_k^{(j)}(t)\right|\exp(\alpha\lambda_k^{\gamma}).$$

3. Єдиність розв'язку. Розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)X_k(x). \tag{10}$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, є відповідно розв'язком багатоточкової задачі

$$\frac{d^n u_k(t)}{dt^n} + \sum_{r=0}^{n-1} A_r(-\lambda_k)^{b(n-r)/2} \frac{d^r u_k(t)}{dt^r} = f_k(t)\,, \tag{11}$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} a_m \frac{d^m u_k(t_j)}{dt^m} = \varphi_{jk}, \quad j = 1,\ldots,n, \quad 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le T\,, \tag{12}$$

де

$$f_k(t) = \int_Q f(t,x) X_k(x)\,dx\,,$$

$$\varphi_{jk} = \int_Q \varphi_j(x) X_k(x)\,dx, \qquad j = 1,\ldots,n.$$

Розглянемо відповідну до (11), (12) однорідну задачу

$$\frac{d^n u_k(t)}{dt^n} + \sum_{r=0}^{n-1} A_r(-\lambda_k)^{b(n-r)/2} \frac{d^r u_k(t)}{dt^r} = 0\,, \tag{13}$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} a_m \frac{d^m u_k(t_j)}{dt^m} = 0, \quad j = 1,\ldots,n, \quad 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le T\,. \tag{14}$$

Позначимо через $\mu_1(\lambda_k),\ldots,\mu_\ell(\lambda_k)$ різні корені рівняння

$$\mu^n + \sum_{r=0}^{n-1} A_r(-\lambda_k)^{b(n-r)/2} \mu^r = 0, \qquad \lambda_k \in \Lambda\,, \tag{15}$$

з кратностями $n_1,\ldots,n_\ell$ відповідно, $n_1 + \ldots + n_\ell = n$. Для простоти викладу вважаємо, що кратності коренів рівняння (15) не залежать від $\lambda_k \in \Lambda$. Зі структури рівняння (15) згідно з [15, с. 102] випливають такі оцінки:

$$\left|\mu_q(\lambda_k)\right| \le C_3 \lambda_k^{b/2}, \quad \lambda_k \in \Lambda, \quad q = 1,\ldots,\ell, \; C_3 = 2 \max_{1 \le m \le n} \left(|A_{n-m}|\right)^{1/m}. \tag{16}$$

При $\eta_r = \sqrt{\lambda_k}$, $r = 1,\ldots,p$, рівняння (8) можна записати у вигляді

$$\left(\frac{\xi}{(N(x))^{b/2}}\right)^n + \sum_{r=0}^{n-1} A_r(-\lambda_k)^{b(n-r)/2} \left(\frac{\xi}{(N(x))^{b/2}}\right)^r = 0\,, \tag{17}$$

де $N(x) = \sum_{i,j=1}^{p} h_{ij}(x)$. Поклавши в рівнянні (17) $\dfrac{\xi}{(N(x))^{b/2}} = \mu$, отримуємо рівняння (15). Отже, на підставі (4), (9) при $\eta_r = \sqrt{\lambda_k}$, $r = 1,\ldots,p$, маємо оцінки

$$\operatorname{Re}\mu_q(\lambda_k) = \frac{\operatorname{Re}\xi_q(x,\lambda_k)}{(N(x))^{b/2}} \le -\delta h_0 \lambda_k^{b/2}, \quad q = 1,\ldots,\ell, \; h_0 = \left(\frac{p}{(\max_{x \in Q} N(x))}\right)^{b/2}, \tag{18}$$

де $\xi_q(x,\lambda_k)$, $q = 1,\ldots,\ell$, − корені рівняння (17).

Для побудови фундаментальної системи розв'язків рівняння (13) використаємо поділені різниці функції $\exp(\mu t)$, $\mu \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ [16, § 24].

Означення. Нехай $M = (\underbrace{\mu_1,\ldots,\mu_1}_{n_1},\ldots,\underbrace{\mu_\ell,\ldots,\mu_\ell}_{n_\ell})$ − набір комплексних чисел. *Поділеною різницею порядку* $\chi = n_1 + \ldots + n_\ell$, яка відповідає набору M, функції $g(\mu,t)$ комплексної змінної μ, де t − дійсний параметр, називають функцію [16, § 24]

$$R_M(g(\mu,t)) = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{1}{(n_j-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^{n_j-1}\left(g(\mu,t)\prod_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{\ell}(\mu-\mu_i)^{-n_i}\right)\Bigg|_{\mu=\mu_j}. \quad (19)$$

Якщо функція $g(\mu,t)$ є аналітичною за μ в опуклій області $V\in\mathbb{C}$, що містить точки $\mu_1,\ldots,\mu_\ell$, то справджується така формула (в якій $\zeta_0=1$, $\zeta_\ell=0$):

$$R_M(g(\mu,t)) = \int_0^1\int_0^{\zeta_1}\ldots\int_0^{\zeta_{\ell-2}}\prod_{j=1}^{\ell}\frac{(\zeta_{j-1}-\zeta_j)^{n_j-1}}{(n_j-1)!}\times$$
$$\times\frac{\partial^{\chi-1}g(\mu,t)}{\partial\mu^{\chi-1}}\Bigg|_{\mu=\mu_1+\sum_{j=2}^{\ell}(\mu_j-\mu_{j-1})\zeta_{j-1}} d\zeta_{\ell-1}\ldots d\zeta_1. \quad (20)$$

Нехай

$$M_{qr_q} = (\underbrace{\mu_1(\lambda_k),\ldots,\mu_1(\lambda_k)}_{n_1},\ldots,\underbrace{\mu_{q-1}(\lambda_k),\ldots,\mu_{q-1}(\lambda_k)}_{n_{q-1}},\underbrace{\mu_q(\lambda_k),\ldots,\mu_q(\lambda_k)}_{r_q}),$$

де $r_q=1,\ldots,n_q$, $q=1,\ldots,\ell$, – набори, складені з коренів рівняння (15), і $\chi_{q,r_q}=n_1+\ldots+n_{q-1}+r_q$. Побудуємо функції

$$\{u_{k,q,r_q}(t) := R_{M_{qr_q}}(\exp(\mu t)),\ r_q=1,\ldots,n_q,\ q=1,\ldots,\ell\}, \quad (21)$$

які є поділеними різницями порядків χ_{q,r_q} функції $\exp(\mu t)$, що відповідають наборам M_{qr_q}.

На підставі (19), (21) отримуємо, що

$$u_{k,q,r_q}(t) = \sum_{j=1}^{q-1}\frac{1}{(n_j-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^{n_j-1}\times$$
$$\times\left(\exp(\mu t)\prod_{i=1,i\neq j}^{q-1}(\mu-\mu_i(\lambda_k))^{-n_i}(\mu-\mu_q(\lambda_k))^{-r_q}\right)\Bigg|_{\mu=\mu_j(\lambda_k)}+$$
$$+\frac{1}{(r_q-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^{r_q-1}\left(\exp(\mu t)\prod_{i=1}^{q-1}(\mu-\mu_i(\lambda_k))^{-n_i}\right)\Bigg|_{\mu=\mu_q(\lambda_k)},$$
$$r_q=1,\ldots,n_q,\qquad q=1,\ldots,\ell. \quad (22)$$

Безпосередньою перевіркою можна показати, що сукупність функцій (22) утворює фундаментальну систему розв'язків рівняння (13). Вибір такої фундаментальної системи розв'язків рівняння (13) дозволяє уникнути при побудові розв'язку задачі (1)–(3) таких малих знаменників: $\mu_j(\lambda_k)-\mu_i(\lambda_k)$, $1\le i<j\le\ell$, які виникають при побудові розв'язку задачі (1)–(3), коли за фундаментальну систему розв'язків рівняння (13) взяти систему функцій

$$\{t^{r_q-1}\exp(\mu_q(\lambda_k)t),\ r_q=1,\ldots,n_q,\ q=1,\ldots,\ell\},$$

яка використовувалась, наприклад, в [1, 7].

Характеристичний визначник задачі (11), (12) є таким:

$$\Delta(\lambda_k;\mathbf{t}) = \det\left\|\sum_{m=0}^{n-1}a_m\frac{d^m u_{k,q,r_q}(t_j)}{dt^m}\right\|_{\substack{j=1,\ldots,n,\\ r_q=1,\ldots,n_q}}^{q=1,\ldots,\ell}. \quad (23)$$

Враховуючи формули (22), (23), знаходимо, що

$$\Delta(\lambda_k;\mathbf{t}) = \tilde{\Delta}(\lambda_k;\mathbf{t})\prod_{q=1}^{\ell}\left(\sum_{m=0}^{n-1} a_m(\mu_q(\lambda_k))^m\right)^{n_q}, \tag{24}$$

де

$$\tilde{\Delta}(\lambda_k;\mathbf{t}) = \prod_{1\le i<j\le \ell}(\mu_j(\lambda_k)-\mu_i(\lambda_k))^{-n_i n_j}\times$$

$$\times \det\left\| t_j^{r_q-1}\exp(\mu_q(\lambda_k)t_j)\frac{\mathbf{1}}{(r_q-1)!}\right\|_{\substack{j=1,\dots,n,\\ r_q=1,\dots,n_q}}^{q=1,\dots,\ell}. \tag{25}$$

Відомо [14], що задача (13), (14) має лише тривіальний розв'язок тоді й тільки тоді, коли $\Delta(\lambda_k;\mathbf{t})\neq 0$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1)–(3) *у просторі* $C^n([0,T];E_{\alpha,b/2})$ *необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall\lambda_k\in\Lambda \qquad \Delta(\lambda_k;\mathbf{t})\neq 0. \tag{26}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 5.3 з [7, с. 82]. ◊

4. Існування розв'язку задачі. Нехай виконується умова (26). Тоді для кожного $\lambda_k\in\Lambda$ існує єдиний розв'язок задачі (11), (12), який є сумою розв'язку $w_k(t)$ задачі (12), (13) і розв'язку $v_k(t)$ задачі (11), (14):

$$u_k(t) = w_k(t)+v_k(t), \tag{27}$$

причому

$$w_k(t) = \sum_{q=1}^{\ell}\sum_{r_q=1}^{n_q}\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta_{qr_q}^{j}(\lambda_k;\mathbf{t})}{\Delta(\lambda_k;\mathbf{t})}\varphi_{jk}u_{k,q,r_q}(t), \tag{28}$$

де $\Delta_{qr_q}^{j}(\lambda_k;\mathbf{t})$ – алгебричне доповнення елемента

$$\sum_{m=0}^{n-1} a_m\frac{d^m u_{k,q,r_q}(t_j)}{dt^m}$$

у визначнику (23), а

$$v_k(t) = \int_0^T G(t,\tau;\lambda_k)f_k(\tau)\,d\tau, \tag{29}$$

де $G(t,\tau;\lambda_k)$ – функція Ґріна задачі (13), (14), визначена в квадраті

$$\mathcal{K} = \{(t,\tau): 0\le t\le T,\ 0\le\tau\le T\},$$

яка в області

$$\mathcal{K}_j = \{(t,\tau): 0\le t\le T,\ t_j<\tau<t_{j+1}\},\ j=0,1,\dots,n,\ t_0=0,\ t_{n+1}=T,$$

співпадає відповідно з функцією

$$G_j(t,\tau;\lambda_k) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2}u_{k,\ell,n_\ell}(t-\tau)+\sum_{s=1}^{j}(-1)^{s+1}F_s(t,\tau;\lambda_k)-$$

$$-\sum_{s=j+1}^{n}(-1)^{s+1}F_s(t,\tau;\lambda_k), \tag{30}$$

$$F_s(t,\tau;\lambda_k) = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{\ell}\sum_{r_q=1}^{n_q}\frac{\Delta_{qr_q}^{s}(\lambda_k;\mathbf{t})}{\Delta(\lambda_k;\mathbf{t})}u_{k,q,r_q}(t)\left(\sum_{m=0}^{n-1}a_m u_{k,\ell,n_\ell}^{(m)}(t_s-\tau)\right),$$

$$s=1,\dots,n. \tag{31}$$

При $\tau = t_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$, доозначуємо функцію $G(t, \tau; \lambda_k)$ за неперервністю по τ справа, а при $\tau = T$ – за неперервністю зліва.

На основі формул (10), (27)–(29) формальний розв'язок задачі (1)–(3) зображується у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^{\ell} \sum_{r_q=1}^{n_q} \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{qr_q}^{j}(\lambda_k; \mathbf{t}) \varphi_{jk} u_{k,q,r_q}(t)}{\Delta(\lambda_k; \mathbf{t})} + \right.$$

$$\left. + \int_0^T G(t, \tau; \lambda_k) f_k(\tau)\, d\tau \right) X_k(x). \tag{32}$$

Збіжність ряду (32), взагалі, пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки $|\Delta(\lambda_k; \mathbf{t})|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості $\lambda_k \in \Lambda$. Це видно на прикладі задачі

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - 2\frac{\partial}{\partial t} Lu(t,x) + 2L^2 u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in D,$$

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \quad u(T,x) = \varphi_2(x), \quad x \in \bar{Q}, \quad u(t,x)|_\Gamma = 0, \quad Lu(t,x)|_\Gamma = 0,$$

для якої $\Delta(\lambda_k) = \exp(-T\lambda_k)\sin(T\lambda_k)$.

Позначимо: $C_4 = \min\limits_{1 \le q \le \ell} \left(|A_0| / (C_3)^{n-n_q} \right)^{1/n_q}$, $C_5 = |a_{n-1}|(C_4)^{n-1}/2$, $a = \max\limits_{0 \le j \le n-2} |a_j / a_{n-1}|$, де C_3 – стала з оцінок (16).

Для доведення існування розв'язку задачі (1)–(3) нам знадобиться наступне твердження.

Лема 1. *Для довільних фіксованих* a_m, $m = 0, 1, \ldots, n-1$, *нерівності*

$$\left| \sum_{m=0}^{n-1} a_m (\mu_q(\lambda_k))^m \right| > C_5 \lambda_k^{b(n-1)/2}, \qquad q = 1, \ldots, \ell, \tag{33}$$

виконуються для всіх $\lambda_k \in \Lambda$, *таких, що* $\lambda_k > ((2a+1)/C_4)^{2/b}$.

Д о в е д е н н я. Очевидно, що

$$\left| \sum_{m=0}^{n-1} a_m (\mu_q(\lambda_k))^m \right| = |a_{n-1}| |\mu_q(\lambda_k)|^{n-1} \left| 1 + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{a_{n-1-m}}{a_{n-1}(\mu_q(\lambda_k))^m} \right| \ge$$

$$\ge |a_{n-1}| |\mu_q(\lambda_k)|^{n-1} \left| 1 - \left| \sum_{m=1}^{n-1} \frac{a_{n-1-m}}{a_{n-1}(\mu_q(\lambda_k))^m} \right| \right|, \quad q = 1, \ldots, \ell. \tag{34}$$

Із рівняння (15) згідно з теоремою Вієта та оцінками (16) знаходимо, що

$$|\mu_q(\lambda_k)| \ge C_4 \lambda_k^{b/2}, \qquad q = 1, \ldots, \ell. \tag{35}$$

Якщо $\lambda_k > ((2a+1)/C_4)^{2/b}$, то з (35) випливає, що $|\mu_q(\lambda_k)| > 2a+1$, $q = 1, \ldots, \ell$, і виконуються оцінки

$$\left| \sum_{m=1}^{n-1} \frac{a_{n-1-m}}{a_{n-1}(\mu_q(\lambda_k))^m} \right| \le a \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{|\mu_q(\lambda_k)|^m} \le a \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_q(\lambda_k)|^m} =$$

$$= \frac{a}{|\mu_q(\lambda_k)| - 1} < \frac{1}{2}. \tag{36}$$

На підставі (34)–(36) отримуємо

$$\left|\sum_{m=0}^{n-1} a_m(\mu_q(\lambda_k))^m\right| \ge \frac{|a_{n-1}|}{2}\left|\mu_q(\lambda_k)\right|^{n-1} \ge C_5\lambda_k^{b(n-1)/2}, \quad q = 1,\dots,\ell. \tag{37}$$

Лему доведено. ◊

Теорема 2. *Нехай справджується умова* (26) *та існує додатна стала* ν *така, що для всіх (крім скінченної кількості)* $\lambda_k \in \Lambda$ *виконується нерівність*

$$\left|\tilde{\Delta}(\lambda_k;\mathbf{t})\right| \ge \exp(-\nu\lambda_k^{b/2}). \tag{38}$$

Якщо $f \in C([0,T];E_{\alpha_1,b/2})$, $\alpha_1 > \alpha + \nu + (T - nt_1)\delta h_0$, $\varphi_j \in E_{\alpha_2,b/2}$, $\alpha_2 > \alpha + \nu - (n-1)\delta h_0 t_1$, $j = 1,\dots,n$, *то існує розв'язок задачі* (1)–(3) *з простору* $C^n([0,T];E_{\alpha,b/2})$, *який зображується рядом* (32) *і неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_j(x)$, $j = 1,\dots,n$, *де* δ *і* h_0 *– сталі з оцінок* (9), (18).

Д о в е д е н н я. Враховуючи (20)–(22), знаходимо, що

$$u_{k,1,r_1}(t) = t^{r_1-1}\frac{\exp(\mu_1(\lambda_k)t)}{(r_1-1)!}, \qquad r_1 = 1,\dots,n_1, \qquad t \in [0,T], \tag{39}$$

$$u_{k,q,r_q}(t) = \int_0^1\int_0^{\zeta_1}\dots\int_0^{\zeta_{q-2}} \frac{(1-\zeta_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}\prod_{j=2}^{q-1}\frac{(\zeta_{j-1}-\zeta_j)^{n_j-1}}{(n_j-1)!}\,\frac{\zeta_{q-1}^{r_q-1}}{(r_q-1)!}\,t^{\chi_{qr_q}-1} \times$$

$$\times\exp\left\{(\mu_1(\lambda_k) + \sum_{j=2}^{q}(\mu_j(\lambda_k) - \mu_{j-1}(\lambda_k))\zeta_{j-1})t\right\}d\zeta_{q-1}\dots d\zeta_1,$$

$$r_q = 1,\dots,n_q, \qquad q = 2,\dots,\ell, \qquad t \in [0,T]. \tag{40}$$

Із (39), (40) на підставі (16), (18) отримуємо, що

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u_{k,q,r_q}^{(s_0)}(t)\right| \le C_6\lambda_k^{bs_0/2}, \qquad s_0 = 0,1,\dots n, \tag{41}$$

$$\left|\sum_{m=0}^{n-1} a_m u_{k,q,r_q}^{(m)}(t_j)\right| \le C_7\lambda_k^{b(n-1)/2}\exp\{-\delta h_0 t_1\lambda_k^{b/2}\},$$

$$j = 1,\dots,n, \quad r_q = 1,\dots,n_q, \quad q = 1,\dots,\ell, \tag{42}$$

де $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n \le T$, $C_6 = C_6(n,T,C_3)$, $C_7 = nC_6\max_{0\le m\le n-1}|a_m|$.

З огляду на (23) і (42) отримуємо

$$\left|\Delta_{qr_q}^{j}(\lambda_k;\mathbf{t})\right| \le C_8\lambda_k^{b(n-1)^2/2}\exp\{-(n-1)\delta h_0 t_1\lambda_k^{b/2}\}, \tag{43}$$

де $j = 1,\dots,n$, $r_q = 1,\dots,n_q$, $q = 1,\dots,\ell$, $C_8 = (n-1)!(C_7)^{n-1}$.

На підставі формул (24), (30)–(32) і нерівностей (33), (38), (41)–(43) дістаємо оцінку

$$\left\|u;C^n([0,T];E_{\alpha,b/2})\right\| \le$$

$$\le \sum_{s_0=0}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sum_{q=1}^{\ell}\sum_{r_q=1}^{n_q}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left|\Delta_{qr_q}^{j}(\lambda_k;\mathbf{t})\right|}{|\Delta(\lambda_k;\mathbf{t})|}|\varphi_{jk}|\max_{t\in[0,T]}\left|u_{k,q,r_q}^{(s_0)}(t)\right| +\right.$$

$$+\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{\partial^{s_0}}{\partial t^{s_0}}\int_0^T G(t,\tau;\lambda_k)\,d\tau\right|\tilde f_k\Bigg\}\exp(\alpha\lambda_k^{b/2})\le$$

$$\le C_9\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}|\varphi_{jk}|\lambda_k^{b(n^2-n+1)/2}\exp\{(\alpha+\nu-(n-1)\delta h_0 t_1)\lambda_k^{b/2}\}+$$

$$+C_{10}\sum_{k=1}^{\infty}\tilde f_k\lambda_k^{b(n^2+1)/2}\exp\{(\alpha+\nu+(T-nt_1)\delta h_0)\lambda_k^{b/2}\}, \tag{44}$$

де $\tilde f_k = \max_{t\in[0,T]}|f_k(t)|$, $C_9 = n(n+1)C_6C_8\dfrac{1}{(C_5)^n}$, $C_{10} = n(n+1)^2TC_6C_7C_8\dfrac{1}{(C_5)^n}$.

Використовуючи елементарну нерівність

$$\lambda_k^{\theta}\le C(\theta)\exp(\rho\lambda_k),\qquad C(\theta)>0, \tag{45}$$

яка виконується для довільних $\theta>0$ і $\rho>0$, із (44) одержуємо

$$\|u;C^n([0,T];E_{\alpha,b/2})\|\le$$

$$\le C_{11}\Bigg(C_{10}\sum_{k=1}^{\infty}\tilde f_k\exp\{(\alpha+\nu+\rho_1+(T-nt_1)\delta h_0)\lambda_k^{b/2}\}+$$

$$+C_9\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{jk}|\exp\{(\alpha+\nu+\rho_2-(n-1)\delta h_0t_1)\lambda_k^{b/2}\}\Bigg)\le$$

$$\le C_{12}\left(\|(f;C([0,T];E_{\alpha_1,b/2})\|+\sum_{j=1}^{n}\|\varphi_j;E_{\alpha_2,b/2}\|\right),$$

де

$$\rho_1=\alpha_1-\alpha-\nu-(T-nt_1)\delta h_0,\qquad \rho_2=\alpha_2-\alpha-\nu+(n-1)\delta h_0t_1,$$

$$C_{11}=C_{11}(n,b),\qquad C_{12}=C_{11}\max\{C_9,C_{10}\}.$$

Із останньої нерівності випливає доведення теореми. ◊

5. Оцінки знизу малих знаменників. Проаналізуємо можливість виконання нерівності (38). Із (16) випливає, що величина

$$\gamma_0=-\inf_{\lambda_k\in\Lambda}\min_{1\le q\le\ell}\left\{\mathrm{Re}\frac{\mu_q(\lambda_k)}{\lambda_k^{b/2}}\right\}$$

є скінченною. Позначимо:

$$m_r=n_1+\ldots+n_r,\qquad r=1,\ldots,\ell,\qquad m_0=0,$$

$$g_q(t,\lambda_k):=t^{q-m_{j-1}-1}\exp(\mu_j(\lambda_k)t)\frac{1}{(q-m_{j-1}-1)!},\qquad q=1,\ldots,n,$$

$$P_q(\beta,\lambda_k):=\prod_{s=1}^{j-1}(\beta-\mu_s(\lambda_k))^{n_s}(\beta-\mu_j(\lambda_k))^{q-m_{j-1}},\qquad q=1,\ldots,n,$$

$$Z_q(\lambda_k):=1,\qquad q=1,\ldots,n_1,$$

$$Z_q(\lambda_k):=(\mu_j(\lambda_k)-\mu_1(\lambda_k))^{n_1}\ldots(\mu_j(\lambda_k)-\mu_{j-1}(\lambda_k))^{n_{j-1}},$$

$$q=n_1+1,\ldots,n,$$

де індекс $j=j(q)$ однозначно визначається з умови $m_{j-1}<q\le m_j$,

$$H(\lambda_k, \mathbf{t}) := \det \left\| g_r(t_j, \lambda_k) \right\|_{j,r=1}^{n},$$

$$\boldsymbol{\tau}_q := (t_1, \ldots, t_q), \qquad H_q(\lambda_k; \boldsymbol{\tau}_q) := \det \left\| g_r(t_j, \lambda_k) \right\|_{j,r=1}^{q}, \qquad q = 1, \ldots, n,$$

$$\sigma_q(\lambda_k) := \lambda_k^{-q(q-1)(p+b)/4 - \varepsilon(q-1)/(n-1)} \exp(-q\gamma_0 T \lambda_k^{b/2}) \prod_{j=1}^{q} \left| Z_j(\lambda_k) \right|,$$

$$q = 1, \ldots, n,$$

де ε – як завгодно мале додатне число.

Теорема 3. *Для майже всіх* (*стосовно міри Лебеґа в* $\mathbb{R}^n$) *векторів* $\mathbf{t} \in \in [0, T]^n$ *нерівність* (38) *виконується для всіх* (*крім скінченної кількості*) $\lambda_k \in \Lambda$ *при* $\nu > n\gamma_0 T$.

Д о в е д е н н я. Скористаємось схемою доведення теореми 3 з [8]. Враховуючи лему Бореля – Кантеллі [13, с. 13], для доведення теореми достатньо показати, що при $\nu = n\gamma_0 T + \rho_3$, $0 < \rho_3 < \nu - n\gamma_0 T$, є збіжним ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} W_\nu(\lambda_k), \tag{46}$$

де

$$W_\nu(\lambda_k) = \left\{ \mathbf{t} \in [0, T]^n : \left| \tilde{\Delta}(\lambda_k; \mathbf{t}) \right| < \exp(-\nu \lambda_k^{b/2}) \right\}.$$

Розглянемо множини

$$V(\lambda_k) = \left\{ \mathbf{t} \in [0, T]^n : \left| H(\lambda_k, \mathbf{t}) \right| < \sigma_n(\lambda_k) \right\},$$

$$V_q(\lambda_k) = \left\{ \mathbf{t} \in [0, T]^n : \left| H_q(\lambda_k; \boldsymbol{\tau}_q) \right| < \sigma_q(\lambda_k), \left| H_{q-1}(\lambda_k; \boldsymbol{\tau}_{q-1}) \right| \ge \sigma_{q-1}(\lambda_k) \right\},$$

$$q = 2, \ldots, n.$$

Із (25) випливає, що

$$\tilde{\Delta}(\lambda_k; \mathbf{t}) = H(\lambda_k; \mathbf{t}) \prod_{r=1}^{n} Z_r^{-1}(\lambda_k), \qquad \lambda_k \in \Lambda.$$

Якщо $\mathbf{t} \in \in W_\nu(\lambda_k)$, то, враховуючи (45), отримуємо

$$\left| H(\lambda_k, \mathbf{t}) \right| = \left| \tilde{\Delta}(\lambda_k; \mathbf{t}) \right| \prod_{r=1}^{n} \left| Z_r(\lambda_k) \right| \le \exp(-\nu \lambda_k^{b/2}) \prod_{r=1}^{n} \left| Z_r(\lambda_k) \right| \le$$

$$\le C_{13} \lambda_k^{-n(n-1)(p+b)/4 - \varepsilon} \exp(-n\gamma_0 T \lambda_k^{b/2}) \prod_{r=1}^{n} \left| Z_r(\lambda_k) \right| \le$$

$$\le C_{13} \sigma_n(\lambda_k),$$

де $C_{13} = C_{13}(n, p, b, \varepsilon)$. Отже, $W_\nu(\lambda_k) \subset V(\lambda_k)$, і ряд (46) збігається тоді й тільки тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} V(\lambda_k). \tag{47}$$

Встановимо збіжність ряду (47). Для цього зауважимо, що

$$V(\lambda_k) \subset \bigcup_{q=2}^{n} V_q(\lambda_k), \qquad \lambda_k \in \Lambda. \tag{48}$$

Із (48) випливає, що для всіх (крім скінченної кількості) $\lambda_k \in \Lambda$

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} V(\lambda_k) \le \sum_{q=2}^{n} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} V_q(\lambda_k). \tag{49}$$

Згідно з теоремою Фубіні [2, с. 119]

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} V_q(\lambda_k) =$$

$$= \int\limits_{[0,T]^{n-1}} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} V_q(\lambda_k, t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_{q-1} dt_{q+1} \ldots dt_n\,, \tag{50}$$

де $V_q(\lambda_k, t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n) = \{t_q \in [0,T] : \mathbf{t} \in V_q(\lambda_k)\}$, $q = 2, \ldots, n$.

Для оцінки зверху мір Лебеґа множин $V_q(\lambda_k, t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n)$, $q = 2, \ldots, n$, $\lambda_k \in \Lambda$, застосуємо лему 3 з [8]. Для цього зауважимо, що функція $H_q(\lambda_k; \boldsymbol{\tau}_q)$ як функція змінної t_q (при фіксованих $t_1, \ldots, t_{q-1}$) є квазімногочленом, модулі показників експонент якого не перевищують $C_3 T \lambda_k^{b/2}$. Крім того, з розвинення визначника $H_q(\lambda_k; \boldsymbol{\tau}_q)$, $q = 2, \ldots, n$, за елементами останнього рядка випливають такі рівності:

$$P_{q-1}\left(\frac{\partial}{\partial t_q}, \lambda_k\right) H_q(\lambda_k; \boldsymbol{\tau}_q) = \exp(\mu_j(\lambda_k) t_q) H_{q-1}(\lambda_k; \boldsymbol{\tau}_{q-1}) Z_q(\lambda_k)\,,$$

$$q = 2, \ldots, n\,, \tag{51}$$

де індекс $j = j(q)$ однозначно визначається з умови $m_{j-1} < q \le m_j$.

Очевидно (див. (18)), що для кожного $t \in [0,T]$ виконуються оцінки

$$\left|\exp(\mu_j(\lambda_k) t)\right| = \exp(\operatorname{Re} \mu_j(\lambda_k) t) \ge \exp\left(\frac{\operatorname{Re} \mu_j(\lambda_k)}{\lambda_k^{b/2}} T \lambda_k^{b/2}\right) \ge$$

$$\ge \exp(-\gamma_0 T \lambda_k^{b/2}) = \sigma_1(\lambda_k), \qquad \lambda_k \in \Lambda, \qquad j = 1, \ldots, \ell. \tag{52}$$

Якщо $\mathbf{t} \in V_q(\lambda_k)$, $q = 2, \ldots, n$, то з формул (51), (52) та означення множин $V_q(\lambda_k)$ випливає, що

$$\forall t_q \in [0,T] \qquad \left| P_{q-1}\left(\frac{\partial}{\partial t_q}, \lambda_k\right) H_q(\lambda_k; \boldsymbol{\tau}_q) \right| \ge \sigma_1(\lambda_k) \sigma_{q-1}(\lambda_k) \left| Z_q(\lambda_k) \right|,$$

$$q = 2, \ldots, n. \tag{53}$$

Очевидно, що для кожного $q \in \{2, \ldots, n\}$ степінь многочлена $P_{q-1}(\beta, \lambda_k)$ за змінною β дорівнює $q-1$, а модуль коефіцієнта при β^{q-j-1} в цьому многочлені не перевищує $C_{14} \lambda_k^{bj/2}$, $j = 0, 1, \ldots, q-1$, де $C_{14} = C_{14}(n, C_3)$. Тому з оцінок (53) на підставі леми 3 з [8] отримуємо, що

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} V_q(\lambda_k, t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n) \le$$

$$\le C_{15} \lambda_k^{b/2} \left(\frac{\sigma_q(\lambda_k)}{\sigma_1(\lambda_k) \sigma_{q-1}(\lambda_k) \left| Z_q(\lambda_k) \right|} \right)^{1/(q-1)} \le$$

$$\le C_{15} \lambda_k^{-p/2 - \varepsilon_q}, \qquad q = 2, \ldots, n\,, \tag{54}$$

де $\varepsilon_q = \varepsilon/((q-1)(n-1)) > 0$, $q = 2, \ldots, n$, $C_{15} = C_{15}(n, T)$. На підставі (6), (49), (50) і (54) отримуємо

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} V(\lambda_k) \le C_{16} k^{-1 - 2\varepsilon/(p(n-1)^2)}\,, \tag{55}$$

$C_{16} = (n-1) C_{15} T^{n-1} (C_0)^{-p/2 - \varepsilon/(n-1)^2}$. Із (55) випливає збіжність ряду (47). ◊

Зауваження. У деяких випадках нерівність (38) справджується для довільного вектора $\mathbf{t} \in S$. Покажемо це на прикладі задачі з умовами (2), (3) для рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L\right)^n u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in D.$$

Тут

$$b = 2, \qquad \Delta(\lambda_k; \mathbf{t}) = \left(\sum_{r=0}^{n-1} a_r (-\lambda_k)^r\right)^n \tilde{\Delta}(\lambda_k; \mathbf{t}),$$

де

$$\tilde{\Delta}(\lambda_k; \mathbf{t}) = \prod_{j=1}^{n-1} (j!)^{-1} \prod_{1 \le q < j \le n} (t_j - t_q) \exp(-(t_1 + \ldots + t_n)\lambda_k).$$

Нерівність $\left|\tilde{\Delta}(\lambda_k; \mathbf{t})\right| > \exp(-nT\lambda_k)$ справджується для всіх $\lambda_k \in \Lambda$ і довільного вектора $\mathbf{t} \in S$.

З теорем 2, 3 випливає таке твердження.

Теорема 4. *Нехай справджується умова* (26), $f \in C([0,T]; E_{\alpha_1, b/2})$, $\alpha_1 > \alpha + n\gamma_0 T + (T - nt_1)\delta h_0$, $\varphi_j \in E_{\alpha_2, b/2}$, $\alpha_2 > \alpha + n\gamma_0 T - (n-1)\delta h_0 t_1$, $j = 1, \ldots, n$. *Тоді для майже всіх* (*стосовно міри Лебеґа в* $\mathbb{R}^n$) *векторів* $\mathbf{t} \in S$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(3) *з простору* $C^n([0,T]; E_{\alpha, b/2})$, *який зображується рядом* (32) *і неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$.

Отримані результати можна поширити на рівняння

$$\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{d} A_{rq} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^r L^q u(t,x) = f(t,x), \qquad d > n, \qquad (t,x) \in D,$$

параболічні за Шиловим.

Дослідження частково підтримані ДФФД України (проект №29.1/005).

1. *Василишин П. Б., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для інтегро-диференціальних рівнянь із частинними похідними // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 9. – С. 1155–1168.
2. *Дороговцев А. Я.* Элементы общей теории меры и интеграла. – Киев: Вища шк., 1989. – 152 с.
3. *Ильин В. А., Шишмарев И. А.* Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 6. – С. 883–896.
4. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
5. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – Москва: Наука, 1976. – 391 с.
6. *Напсо А. Ф., Канчукоев В. З.* Нелокальная задача с внутренним условием для нагруженного псевдопараболического уравнения // Владикавказ. мат. журн. – 2002. – **4**, № 2. – С. 44–49.
7. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Київ: Наук. думка, 1984. – 264 с.
8. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для диференціальних рівнянь із частинними похідними зі збуренням // Нелинейные граничные задачи. – 2006. – № 16. – С. 202–212.
9. *Пташник Б. Й., Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для параболічного рівняння високого порядку в паралелепіпеді // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 3. – С. 336–346.
10. *Пукальський І. Д.* Нелокальна задача Діріхле та задача оптимального керування для лінійних параболічних рівнянь з виродженням // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2006. – Вип. 314–315. – С. 150–158.

11. *Сайдаматов Э. М.* О корректности общих нелокальных неоднородных граничных задач для псевдодифференциальных уравнений с частными производными // Мат. труды. – 2006. – **9**, № 2. – С. 133–153.
12. *Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для параболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43,** № 4. – С. 42–48.
13. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – Москва: Наука, 1977. – 143 с.
14. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград: Тип. М. П. Фроловой, 1917. – XIV+308 с.
15. *Фаддєєв Д. К., Сомінський І. С.* Збірник задач з вищої алгебри. – Київ: Вища шк., 1971. – 316 с.
16. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – Москва: Наука, 1965. – 328 с.
17. *Ashyralyev A., Dural A., Sözen Y.* Well-posedness of the Rothe difference scheme for reverse parabolic equations // Iran. J. Optim. – 2009. – **1**, No. 2. –P. 107–131.
18. *Gorenfo R., Umarov S.* Cauchy and nonlocal multi-point problems for distributed order pseudo-differential equations. Part I // Z. Anal. und ihre Anwendungen. – 2005. – **24,** No. 3. – P. 449–466.

МНОГОТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Исследована корректность задачи с многоточечными условиями по временной переменной и условиями типа Дирихле по пространственным координатам для одного класса параболических за Петровским уравнений с переменными по пространственным координатам коэффициентами в ограниченной цилиндрической области. Установлены условия существования и единственности решения задачи. Доказана метрическая теорема об оценках снизу малых знаменателей, которые возникли при построении решения.

MULTIPOINT PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN A CYLINDRICAL DOMAIN

The correctness of the problem with multipoint conditions with respect to time-variable and conditions of the Dirichlet type with respect to spatial coordinates for one class of parabolic by Petrovski equations with variable with respect to spatial coordinate coefficients in a limited cylindrical domain is studied. The conditions of existence and uniqueness of solution of the problem are established. The metric theorem on evaluation from below of small denominators of the problem is proved.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
12.01.11